

Федеральное агентство по образованию

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова
(технический университет)**

В. Л. ТРУШКО, Н. Н. КАЙДАЛОВ

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК НА
ЖЕСТКИХ И ПОДАТЛИВЫХ ОПОРАХ**

**Методические указания к расчетно-
проектировочной работе**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2009**

УДК 624.04 (075.80)
ББК 38.112

Рассмотрены основы теории расчета статически неопределимых многопролетных балок с применением теорем трех и пяти моментов, приведены правила составления уравнений и приемы построения эпюр распределения усилий по длине балок. Подробно рассмотрено решение примеров с использованием стандартных программ для ЭВМ и указан порядок выполнения задания.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения шахтостроительной, горной и других специальностей.

Научный редактор: проф проф. А.Н. Ставрогин

Рецензенты:

Трушко В. Л.
Строительная механика: Методические указания / В. Л. Трушко, Н. Н. Кайдалов. Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2009. 21 с.

**УДК 624.04 /075.80/
ББК 38.112**

© Санкт-Петербургский горный институт им. Г.В. Плеханова, 2009 г.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Все многопролетные балки статически неопределимы. Рассчитывать их можно несколькими методами, отличающимися способом раскрытия статической неопределимости балок. Наиболее простым из них является метод теоремы трех моментов, разработанный Берто и Клапейроном (Франция), а для расчета балок на податливых опорах - метод теоремы пяти моментов.

После раскрытия статической неопределимости балок строят эпюры изгибающих моментов M и перерезывающих сил N . По максимальным значениям M и N определяет опасные сечения балок, в которых вычисляют максимальные нормальные σ и касательные напряжения τ , которые затем сравнивают с нормативными для данного материала.

2. ТЕОРЕМА ТРЕХ МОМЕНТОВ

Рассмотрим многопролетную балку на жестких опорах (рис.1, а).

Мысленно разрежем балку, т.е. на опорах вставим шарниры (рис.1, б). Тогда, чтобы вернуть ее в исходное горизонтальное положение, надо приложить реактивные опорные моменты, компенсирующие введение шарнира. Эти опорные моменты принимаются в качестве основных неизвестных при раскрытии статической неопределимости балки (рис.2).

Рассмотрим участок балки от 2-й до 4-й опор, который после введения шарниров можно представить в виде двух однопролетных балок, нагруженных внешней нагрузкой и реактивными опорными моментами (рис.3).

В реальной (неразрезанной) балке упругая линия плавно изменяется по ее длине и углы поворота на каждой опоре слева и справа от нее равны: $\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{прав}}$.

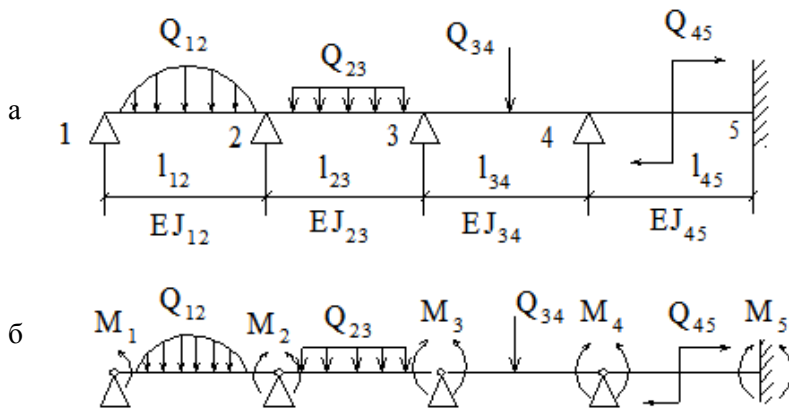


Рис. 1

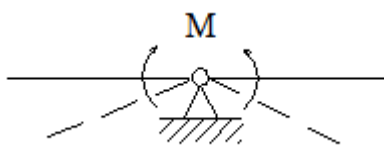


Рис. 2

Это условие используется при составлении уравнения неразрывности деформаций для определения неизвестных реактивных опорных моментов в "разрезанной" балке. Уравнение неразрывности деформаций на 3-й опоре (рис.3) имеет вид $\alpha_{32} = \alpha_{34}$, где α_{32} – угол поворота балки на 3-й опоре со стороны 2-й опоры; α_{34} – угол поворота балки на 3-й опоре со стороны 4-й опоры.

Угол поворота балки α_{32} будет складываться из углов поворота балки на 3-й опоре $\alpha_{32}(M_2)$ и $\alpha_{32}(M_3)$ от действия опорных моментов M_2 и M_3 и угла поворота $\alpha_{32}(Q_{23})$ от действия внешней нагрузки в пролете, т.е.

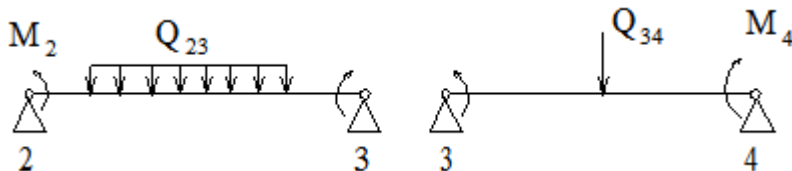
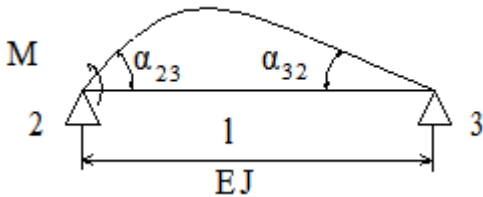


Рис. 3

$$\alpha_{32} = \alpha_{32}(M_2) + \alpha_{32}(M_3) + \alpha_{32}(Q_{23})$$

Аналогично определяется угол поворота балки α_{32} .

Для однопролетной балки, нагруженной опорным моментом, имеем (рис.4):



$$\alpha_{23} = \frac{-Ml}{3EJ}; \alpha_{32} = \frac{Ml}{6EJ}.$$

Примем правило знаков для углов поворота: положительным будем

считать угол поворота по часовой стрелке.

Найдем теперь общие углы поворота балки α_{32} и α_{34} (см. рис.3):

$$\alpha_{32} = \frac{M_2 l_{23}}{6E_{23} J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23} J_{23}} + \alpha(Q_{23}); \quad (1)$$

$$\alpha_{34} = -\frac{M_3 l_{34}}{3E_{34} J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34} J_{34}} + \alpha(Q_{34}).$$

Углы поворота от действия внешней нагрузки определяют также, как для однопролетных балок. (см. таблицу).

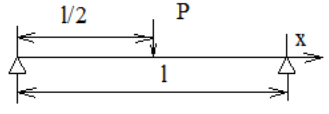
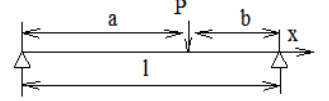
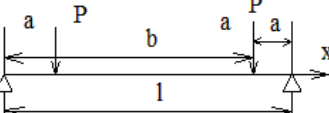
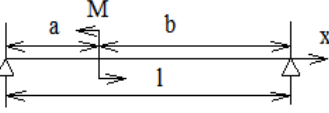
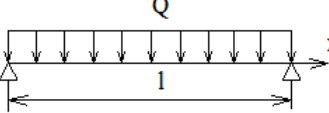
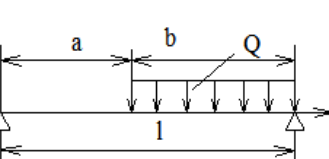
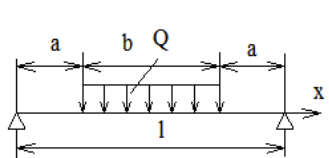
Уравнение неразрывности деформаций на 3-й опоре примет вид

$$\frac{M_2 l_{23}}{6E_{23} J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23} J_{23}} + \alpha(Q_{23}) = -\frac{M_3 l_{34}}{3E_{34} J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34} J_{34}} + \alpha(Q_{34}).$$

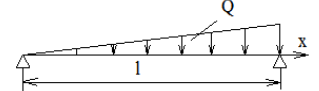
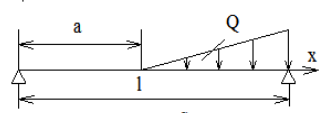
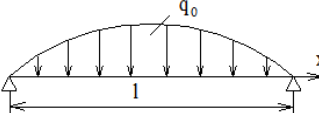
Чтобы получить уравнение неразрывности деформаций на 2-й и 4-й опорах, достаточно в этой формуле соответственно уменьшить и увеличить на единицу номера индексов.

Некоторую особенность представляют крайние опоры. В случае шарнирной крайней опоры (рис. 5) уравнение неразрывности

Расчет углов поворота поперечных сечений в зависимости от способов нагружения

Способ нагружения	Углы поворота при	
	$x=0$	$x=l$
	$\frac{Pl^2}{16EJ}$	$-\frac{Pl^2}{16EJ}$
	$\frac{Pab}{6EJ} \left(1 + \frac{b}{l}\right)$	$-\frac{Pab}{6EJ} \left(1 + \frac{a}{l}\right)$
	$\frac{Pab}{2EJ}$	$-\frac{Pab}{2EJ}$
	$\frac{Ml}{6EJ} \left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$\frac{Ml}{6EJ} \left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$
	$\frac{Ql^2}{24EJ}$	$-\frac{Ql^2}{24EJ}$
	$\frac{Qlb}{24EJ} \left(1 + \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$	$-\frac{Qlb}{24EJ} \left(1 + \frac{a}{l}\right)^2$
	$\frac{Ql^2}{48EJ} \left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right)$	$-\frac{Ql^2}{48EJ} \left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right)$

Окончание таблицы

	Углы поворота при	
	x=0	x=l
	$\frac{7}{180} \cdot \frac{Ql^2}{EJ}$	$-\frac{2}{45} \cdot \frac{Ql^2}{EJ}$
	$\frac{Qlb}{180EJ} \cdot (7 + 6\frac{a}{l} - 3\frac{a^2}{l^2})$	$-\frac{Qlb}{180EJ} \cdot (8 + 9\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2})$
	$\frac{q_0l^3}{\pi^3EJ}$	$-\frac{q_0l^3}{\pi^3EJ}$

на ней не составляют, так как $M_1 = 0$, и начинают составлять уравнение со 2-й опоры.

Если на 1-й опоре жесткая заделка (рис.6), то уравнение неразрывности $\alpha_{лев} = \alpha_{пр}$ составляется, но так $\alpha_{лев} = 0$, то и $\alpha_{12} = 0$ и уравнение принимает вид

$$-\frac{M_1 l_{12}}{3E_{12} J_{12}} - \frac{M_2 l_{12}}{6E_{12} J_{12}} + \alpha(Q_{12}) = 0.$$

Количество уравнений неразрывности деформаций равно количеству опор, причем, так как в каждое уравнение входят не более трех неизвестных опорных моментов, теорема получила название теоремы трех моментов.

После нахождения значений опорных моментов каждый пролет рассчитываемой балки рассматривается как отдельная свободно опертая однопролетная балка, на которую помимо заданной пролетной нагрузки действуют известные опорные моменты. Эпюру изгибающих моментов находят в виде суммы $M = M_Q + M_N$, где M_Q – эпюра изгибающих моментов только от пролетной нагрузки; M_N – линейная эпюра от опорных моментов.

Эпюра M_Q строится для каждого пролета, как для однопролетной свободно опертой по концам балки, с учетом всей действующей

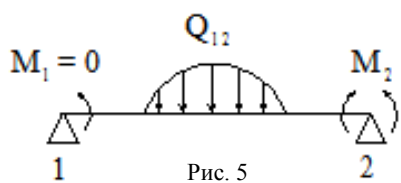


Рис. 5

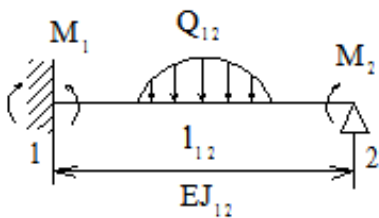


Рис. 6

в данном пролете внешней нагрузки. Ординаты эпюры откладываются в сторону сжатых волокон балки.

Эпюра M_M строится на том же чертеже и в том же масштабе следующим образом: значение опорных моментов M_i откладывают в опорных сечениях в сторону растягиваемых данными моментами волокон и полученные таким образом точки соединяют прямыми линиями.

В результате наложения двух эпюр ординаты результирующей эпюры M определяются отрезками между ломаной линией M_M , которую следует рассматривать как осевую линию результирующей эпюры, и линией M_Q .

Величина реакции R , действующей на промежуточную, i -ю, опору многопролетной балки от опертых на нее смежных пролетов балки определяется формулами

$$\begin{aligned}
 R_i &= R_{i,i-1} + R_{i,i+1}; \\
 R_{i,i-1} &= R_{i,i-1}(Q) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}; \\
 R_{i,i+1} &= R_{i,i+1}(Q) + \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $R_{i,i-1}(Q)$ и $R_{i,i+1}(Q)$ - статически определимые реакции на i -й опоре от пролетных нагрузок Q , вычисляемые в предположении свободного опирания пролетов на опорах; M_i , M_{i-1} и M_{i+1} - величины опорных моментов на i -й, $(i - 1)$ -й и $(i + 1)$ -й опорах, подставляемые с учетом знака; l_i и l_{i+1} - длина i -го и $(i + 1)$ -го пролетов балки.

Эпюры перерезывающих сил определяют, рассматривая каждый пролет как однопролетную балку с заданной пролетной нагрузкой и известными реакциями опор.

3. ТЕОРЕМА ПЯТИ МОМЕНТОВ

Многопролетная балка в общем случае может опираться на податливые (упругие) опоры (рис.7). Упругое проседание принято характеризовать коэффициентами податливости

$$f_i = A_i R_i,$$

где A_i - коэффициент пропорциональности между проседанием i -й опоры и давлением на нее; R_i - давление балки на i -ю опору (реакция имеет противоположное направление).

Раскрытие статической неопределимости многопролетных балок на податливых опорах осуществляется аналогично тому, как это делается в теореме трех моментов, т.е. уравнение неразрывности деформаций имеет вид $\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{прав}}$. Углы поворота балки на опоре слева и справа равны.

Однако в составлении уравнений суммарных углов поворота балки на податливой опоре есть особенности, ибо появляются дополнительные неизвестные (углы поворота, вызванные проседанием опор).

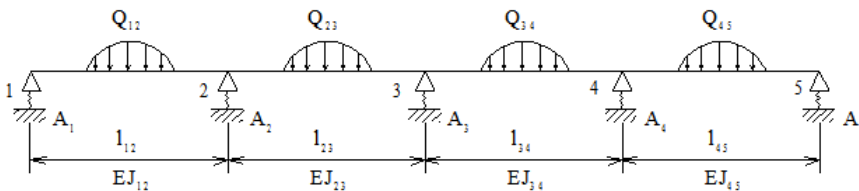


Рис. 7

Рассмотрим расчетную схему многопролетной балки на упругих опорах (рис. 8) и составим уравнение неразрывности деформаций для 3-й опоры:

$$\alpha_{32} = \alpha_{34}$$

$$\alpha_{32} = \frac{M_2 l_{23}}{6E_{23}J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23}J_{23}} + \alpha_{32}(Q_{23}) + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}};$$

$$\alpha_{34} = -\frac{M_3 l_{34}}{3E_{34}J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34}J_{34}} + \alpha_{34}(Q_{34}) + \frac{f_4 - f_3}{l_{34}}$$

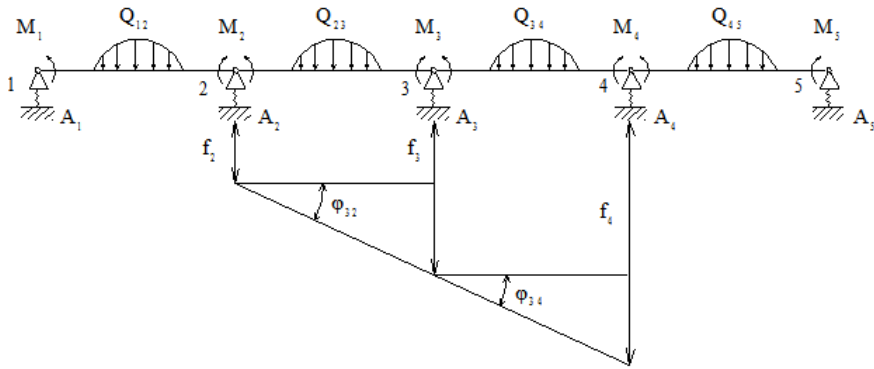


Рис. 8

Тогда уравнение неразрывности деформаций примет вид

$$\begin{aligned} \frac{M_2 l_{23}}{6E_{23}J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23}J_{23}} + \alpha_{32}(Q_{23}) + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}} = \\ = -\frac{M_3 l_{34}}{3E_{34}J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34}J_{34}} + \alpha_{34}(Q_{34}) + \frac{f_4 - f_3}{l_{34}} \end{aligned}$$

Таких уравнений можно составить столько, сколько неизвестных опорных моментов. Записав основную систему уравнений, увидим, что в ней есть дополнительные неизвестные f_i . Основной системы уравнений оказывается недостаточно, так как неизвестных величин больше, чем уравнений, на количество податливых опор.

Для определения этих неизвестных составляется вспомогательная система уравнений, по числу неизвестных коэффициентов податливости опор:

$$f_i = A_i \cdot R_i$$

Вспомогательное уравнение для 3-й опоры имеет вид:

$$f_3 = A_3 [R_{32} + R_{34}] = A_3 \left[\left(-\frac{M_2}{l_{23}} + \frac{M_3}{l_{23}} + R_{32}(Q_{23}) \right) + \left(\frac{M_3}{l_{34}} - \frac{M_4}{l_{34}} + R_{34}(Q_{24}) \right) \right]$$

После составления вспомогательной системы уравнений все f_i подставляются в основную систему уравнений. В результате под-

становки и приведения подобных членов получается система уравнений, в каждое из которых входит не более пяти неизвестных опорных моментов, поэтому теорема получила название теоремы пяти моментов.

После решения системы уравнений и нахождения значений опорных моментов каждый пролет рассчитываемой балки рассматривается как отдельная свободно опертая балка, на которую помимо заданной пролетной нагрузки действуют известные опорные моменты. Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил строятся аналогично изложенному выше.

4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТА

Рекомендуемый порядок расчета следующий:

- 1) строят расчетную схему балки с нанесением необходимых моментов;
- 2) составляют систему уравнений для определения неизвестных опорных моментов;
- 3) решают систему уравнений и определяют значения опорных моментов;
- 4) вычисляют значения опорных реакций;
- 5) строят эпюры перерезывающих сил и изгибающих по длине балки;
- 6) производят проверку прочности балки или подбирают ее сечение.

ЗАДАНИЕ. Раскрыть статическую неопределимость, вычислить опорные реакции и построить эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил, подобрать двутавровое сечение двух пролетной неразрезной балки, жесткозаделанной с двух концов. Рассмотреть два случая:

- 1) средняя опора жесткая;
- 2) средняя опора податливая с коэффициентом податливости

$$A = n \frac{l_0^3}{EJ},$$

где $n = 1$.

Жесткость балки EJ по ее длине постоянна.

РЕШЕНИЕ. Случай 1. Промежуточная, 2-я, опора жесткая (рис.9,а). Мысленно разрежем балку на опорах (вставим шарниры) и приложим реактивные опорные моменты, компенсирующие введение шарниров, которые примем за лишние неизвестные (рис.10).

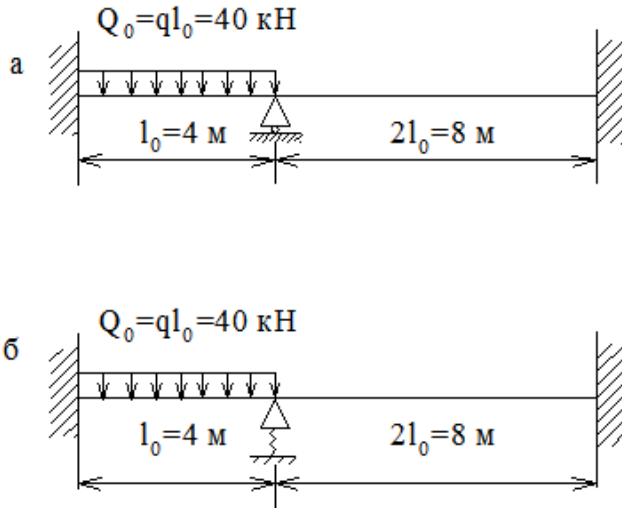


Рис. 9

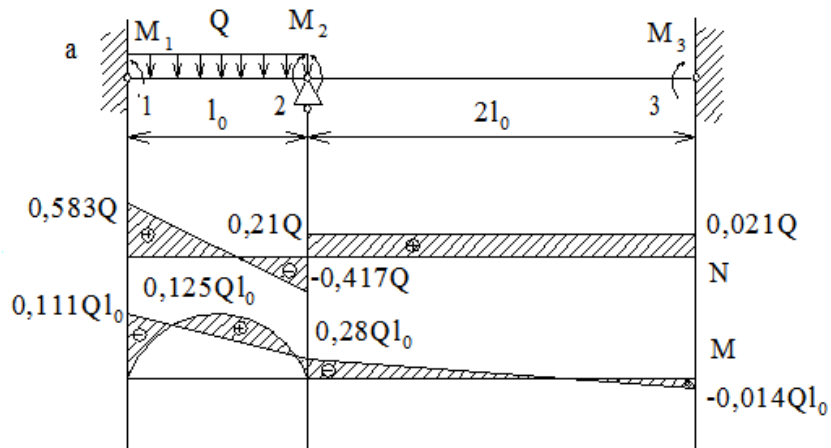


Рис. 10

Для каждой опоры балки составим уравнения неразрывности деформаций по теореме трех моментов. Для 1-й опоры при жесткой заделке $\alpha_{12}=0$, уравнение принимает вид:

$$-\frac{M_1 l_{12}}{3EJ} - \frac{M_2 l_{12}}{6EJ} + \frac{Q l_{12}^2}{24EJ} = 0 \quad (3)$$

Для 2-й, (промежуточной) опоры:

$$\frac{M_1 l_{12}}{6EJ} + \frac{M_2 l_{12}}{3EJ} - \frac{Q l_{12}^2}{24EJ} = -\frac{M_2 l_{23}}{3EJ} - \frac{M_3 l_{23}}{6EJ} \quad (4)$$

Для 3-й опоры при жесткой заделке $\alpha_{32}=0$, уравнение принимает вид:

$$\frac{M_2 l_{23}}{6EJ} + \frac{M_3 l_{23}}{3EJ} = 0 \quad (5)$$

Таким образом, мы получили систему из трех уравнений (3)-(5), в которых неизвестными являются значения опорных моментов M_1, M_2, M_3 . Выразив длину каждого пролета, балки через l_0 , приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} -8M_1 l_0 - 4M_2 l_0 + Q l_0^2 &= 0; \\ 4M_1 l_0 + 8M_2 l_0 - Q l_0^2 &= -16M_2 l_0 - 8M_3 l_0; \\ M_2 l_0 + 2M_3 l_0 &= 0 \end{aligned}$$

Сократив на l_0 запишем уравнения в канонической форме:

$$\begin{aligned} 8M_1 + 4M_2 &= Q l_0; \\ 4M_1 + 24M_2 + 8M_3 &= -Q l_0; \\ M_2 + 2M_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы линейных уравнений можно найти, например, в матричной форме^x.

В общем виде решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} M_1 + \alpha_{12} M_2 + \alpha_{13} M_3 &= b_1; \\ \alpha_{21} M_1 + \alpha_{22} M_2 + \alpha_{23} M_3 &= b_2; \\ \alpha_{31} M_1 + \alpha_{32} M_2 + \alpha_{33} M_3 &= b_3; \end{aligned}$$

где

$$M_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ b_2 & \alpha_{22} & \alpha_{22} \\ b_3 & \alpha_{32} & \alpha_{32} \end{vmatrix} : D;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & b_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & b_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & b_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix} : D;$$

^x ПРИМЕЧАНИЕ: Решить систему линейных уравнений можно с использованием программы стандартной CALL SIMQ (A,B,N,K,S), описанной в УНВИ ЛГИ.

$$M_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & b_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & b_3 \end{vmatrix} : D;$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}, D \neq 0.$$

Для системы (6):

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 24 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8(24 \cdot 2 - 8 \cdot 1) - 4(4 \cdot 2 - 8 \cdot 0) + 0(4 \cdot 1 - 24 \cdot 0) = 288;$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} Ql_0 & 4 & 0 \\ Ql_0 & 24 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} : D = [Ql_0(24 \cdot 2 - 8 \cdot 1) - 4(Ql_0 \cdot 2 - 8 \cdot 0) + 0(Ql_0 \cdot 1 - 24 \cdot 0) : 288 = 0,111Ql_0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 8 & Ql_0 & 0 \\ 4 & Ql_0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} : D = [8(Ql_0 \cdot 2 - 0 \cdot 8) - \\ - Ql_0(4 \cdot 2 - 0 \cdot 8) + 0(4 \cdot 0 - 0 \cdot Ql_0)] : 288 = 0,028Ql_0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & Ql_0 \\ 4 & 24 & Ql_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} : D = [8(24 \cdot 0 - Ql_0 \cdot 1) - \\ - 4(4 \cdot 0 - 0 \cdot Ql_0) + Ql_0(4 \cdot 1 - 24 \cdot 0)] : 288 = -0,014Ql_0;$$

Окончательно $M_1 = 0,111Ql_0$; $M_2 = 0,028Ql_0$; $M_3 = -0,014Ql_0$.

После вычисления неизвестных опорных моментов переходим к определению опорных реакций по формулам (2). Для 1-й, 2-й и 3-й опор соответственно:

$$R_1 = R_{12} = R_{12}(Q) + \frac{M_1}{l_{12}} - \frac{M_2}{l_{12}} = \frac{Q}{2} + \frac{0,111Ql_0}{l_0} - \frac{0,028Ql_0}{l_0} = 0,583Q;$$

$$R_2 = R_{21} + R_{23} = R_{21}(Q) + \frac{M_2}{l_{12}} - \frac{M_1}{l_{12}} + \frac{M_2}{l_{23}} - \frac{M_3}{l_{23}} = \frac{Q}{2} + \frac{0,028Ql_0}{l_0} - \frac{0,111Ql_0}{l_0} + \frac{0,028Ql_0}{2l_0} - \frac{-0,014Ql_0}{2l_0} = 0,438Q;$$

$$R_3 = R_{32} = \frac{M_3}{l_{23}} - \frac{M_2}{l_{23}} = \frac{-0,014Ql_0}{2l_0} - \frac{0,028Ql_0}{2l_0} = -0,021Q.$$

Для проверки правильности вычислений опорных реакций составим уравнения равновесия, проектируя все силы, действующие на балку, на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = 0,583Q - Q + 0,438Q - 0,021Q = 0.$$

Для построения эпюры изгибающих моментов для заданной балки проводим нулевую линию (рис.10) и от нее откладываем над 1-й, 2-й и 3-й опорами величины соответствующих опорных моментов в сторону растягиваемых данными моментами волокон. Полученные точки соединяем прямыми линиями, образуя эпюру опорных моментов. Затем для каждого пролета, как для однопролетной, сво-

бодно опертой по концам балки, строим эпюру изгибающих моментов от всей внешней нагрузки в данном пролете, откладывая ординаты моментов от нулевой линии в сторону сжатых волокон.

В результате наложения двух эпюр получаем результирующую эпюру изгибающих моментов, которую заштриховываем, проставляя числовые значения в характерных точках.

Эпюры перерезывающих сил при известных значениях опорных реакций и внешней нагрузки строятся обычным порядком, как для простых статически определимых балок (рис.10).

Случай 2. Промежуточная, 2-я, опора податливая с коэффициентом податливости $A = nl^3 / EJ$, где $n = 1$ (рис.9, б). Раскрытие статической неопределенности заданной балки осуществляем аналогично изложенному в первой части расчета с добавлением дополнительных неизвестных углов поворота от проседания второй опоры (рис. 11).

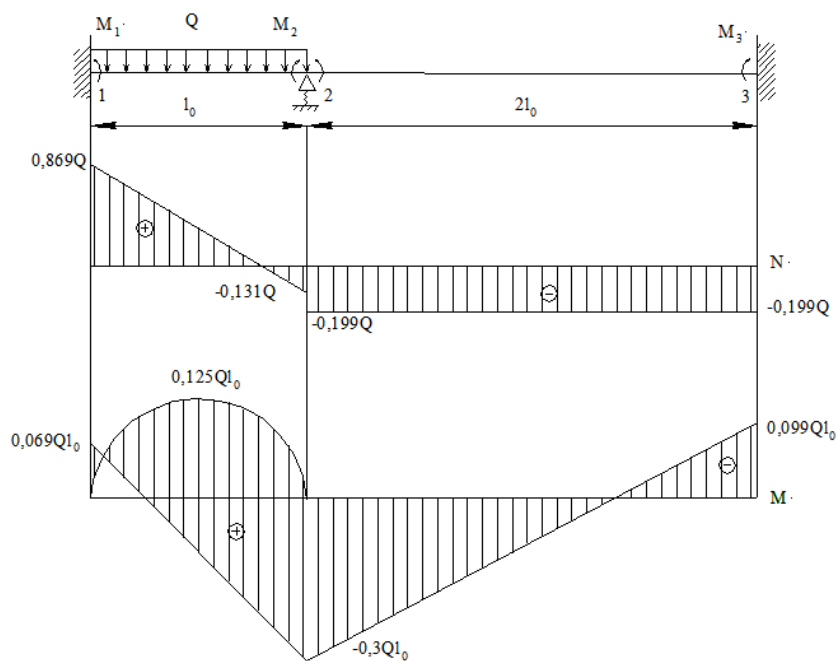


Рис. 11

Для каждой опоры балки составим уравнения неразрывности деформаций по теореме пяти моментов, учитывая, что 1-я и 3-я опоры при жесткой заделке, а 2-я - податливая. Итак, для 1-й, 2-й и 3-й опор соответственно

$$-\frac{M_1 l_{12}}{3EJ} - \frac{M_2 l_{12}}{6EJ} + \frac{Ql_{12}^2}{24EJ} + \frac{f_2 - f_1}{l_{12}} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{M_1 l_{12}}{6EJ} + \frac{M_2 l_{12}}{3EJ} - \frac{Ql_{12}^2}{24EJ} + \frac{f_2 - f_1}{l_{12}} = -\frac{M_2 l_{23}}{3EJ} - \frac{M_3 l_{23}}{6EJ} + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}}; \quad (8)$$

$$\frac{M_2 l_{23}}{6EJ} + \frac{M_3 l_{23}}{3EJ} + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}} = 0. \quad (9)$$

В полученной системе из трех уравнений (7)-(9) неизвестными являются значения опорных моментов M_1 , M_2 , M_3 и проседание податливой второй опоры f_2 . В нашем случае податлива только 2-я опора, следовательно, $f_2 \neq 0$, а $f_1 = f_3 = 0$.

Таким образом, в системе из трех уравнений имеем четыре неизвестных (M_1 , M_2 , M_3 и f_2). Для их определения необходимо составить одно дополнительное уравнение, так как у нас только одна податливая опора:

$$f_2 = AR_2 = A \left[-\frac{M_1}{l_{12}} + \frac{M_2}{l_{12}} + \frac{Q}{2} + \frac{M_2}{l_{23}} - \frac{M_3}{l_{23}} \right] \quad (10)$$

В полученной системе из четырех уравнений с четырьмя неизвестными (7)-(10) выразим длины пролетов балки через l_0 :

$$-\frac{M_1 l_0}{3} - \frac{M_2 l_0}{6} + \frac{Ql_0^2}{24} + \frac{EJ f_2}{2l_0} = 0;$$

$$\frac{M_1 l_0}{6} + \frac{M_2 l_0}{3} - \frac{Ql_0^2}{24} + \frac{EJ f_2}{l_0} = -\frac{2M_2 l_0}{3} - \frac{2M_3 l_0}{6} - \frac{EJ f_2}{2l_0};$$

$$\frac{2M_2 l_0}{6} + \frac{2M_3 l_0}{3} - \frac{EJ f_2}{2l_0} = 0;$$

$$f_2 = \frac{l_0^2}{EJ} \left[-M_1 + \frac{3}{2}M_2 - \frac{M_3}{2} + \frac{Ql_0}{2} \right].$$

Подставив выражение для f_2 в уравнения (7)-(9), после соот-

ветствующих преобразований получим:

$$\begin{cases} -32M_1 + 32M_2 - 12M_3 = -13Ql_0; \\ -32M_1 + 46M_2 - 10M_3 = -17Ql_0; \\ 6M_1 - 5M_2 + 11M_3 = 3Ql_0. \end{cases}$$

Решив систему трех линейных уравнений, определим значения опорных моментов: $M_1 = 0,69Ql_0$; $M_2 = -0,3Ql_0$; $M_3 = 0,099Ql_0$. Теперь определим опорные реакции: для 1-й, 2-й и 3-й опор соответственно

$$R_1 = R_{12} = R_{12}(Q) + \frac{M_1}{l_{12}} - \frac{M_2}{l_{12}} = \frac{Q}{2} + \frac{0,069Ql_0}{l_0} - \frac{-0,3Ql_0}{l_0} = 0,869Q;$$

$$R_2 = R_{21} + R_{23} = R_{21}(Q) + \frac{M_2}{l_{12}} - \frac{M_1}{l_{12}} + \frac{M_2}{l_{23}} - \frac{M_3}{l_{23}} = \frac{Q}{2} + \frac{-0,3Ql_0}{l_0} - \frac{0,069Ql_0}{l_0} + \frac{-0,3Ql_0}{2l_0} - \frac{0,099Ql_0}{2l_0} = -0,068Q;$$

$$R_3 = R_{32} = \frac{M_3}{l_{23}} - \frac{M_2}{l_{23}} = \frac{0,099Ql_0}{2l_0} - \frac{-0,3Ql_0}{2l_0} = 0,199Q.$$

Для проверки правильности вычислений опорных реакций составим уравнение равновесия, проектируя все силы, действующие на балку, на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = 0,869Q - 0,068Q + 0,199Q - Q = 0.$$

Построение эпюр изгибающих моментов и перерезывающих сил производится аналогично изложенному в первой части расчета. Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил представлены на рис.11.

Подбор сечения балки для обоих случаев производим обычным порядком.

Случай 1. Средняя опора жесткая. Из эпюры изгибающих моментов (рис.10) видно, что момент максимален в заделке (1-я опора):

$$|M_{\max}| = 0,111Ql_0 = 0,111 \cdot 40 \cdot 4 = 17,76 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Момент сопротивления

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{17,76 \text{ кН} \cdot \text{м}}{180000 \text{ кПа}} = 98,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

где $[\sigma]$ - нормативное напряжение, для стали $[\sigma] = 180000$ кПа.

По сортаменту прокатной стали подбираем двутавровую балку № 16 с $W_x = 109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Случай 2. Средняя опора податливая. Из эпюры изгибающих моментов (рис. 11) видно, что момент максимален на расстоянии 0,869 l от 1-й опоры (заделки):

$$|M_{\max}| = 0,32 Q l_0 = 0,32 \cdot 40 \cdot 4 = 51,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Момент сопротивления

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{51,2 \text{ кН} \cdot \text{м}}{180000 \text{ кПа}} = 284,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По сортаменту прокатной стали подбираем двутавровую балку № 24 ($W_x = 289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$).

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бурчаков Ю. И., Гнедин В.Е., Денисов В.М. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1983. 255 с.
2. Справочник по строительной механике / Г.В. Бойцов, О.М. Палий, В.А. Постнов, В.С. Чувиковский. Л.: Судостроение, 1982. Т. 1. 376 с.
3. Строительная механика. Стержневые системы / Под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения.....	3
2. Теорема трех моментов.....	3
3. Теорема пяти моментов.....	9
4. Пример выполнения расчета	11
Рекомендуемый библиографический список.....	20