

Задача № 2: Круглый стальной вал нагружен системой крутящих моментов M_1, M_2, M_3 . В сечении $Z = 1$ должно выполняться условие $\phi = 0$. Определить диаметр вала из расчета на прочность и максимальный угол закручивания по длине вала. Данные вариантов приведены на рис. 4 и в таблице 2.

Пример выполнения задачи № 2:

Пусть $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 2$ м, $M_1 = 1000$ Н·м; $M_2 = 2000$ Н·м; $M_3 = 1000$ Н·м (Рис. 3).

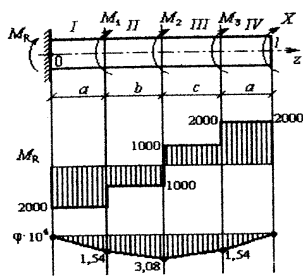


Рис. 3

Обозначим реактивный момент в левой опоре через M_R . Тогда уравнение равновесия можно записать как

$$M_R + M_1 + M_2 + M_3 + X = 0 \quad (1)$$

Задача один раз статически неопределима.

1. Записываем выражения для внутренних крутящих моментов по участкам I–IV:

$$\begin{aligned} M_I &= M_R; \\ M_{II} &= M_R + M_1; \\ M_{III} &= M_R + M_1 + M_2; \\ M_{IV} &= M_R + M_1 + M_2 + M_3. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Записываем выражения для углов закручивания по участкам:

$$\varphi_I = \frac{M_I a}{G \cdot J_p}; \quad \varphi_{II} = \frac{M_{II} b}{G \cdot J_p}; \quad \varphi_{III} = \frac{M_{III} c}{G \cdot J_p}; \quad \varphi_{IV} = \frac{M_{IV} a}{G \cdot J_p}; \quad (3)$$

где G – модуль сдвига; J_p – полярный момент инерции.

3. Составляем уравнение совместности деформаций из условия равенства нулю на правом конце вала суммарного угла закручивания:

$$(\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV})_{X=l} = 0. \quad (4)$$

4. Подставляем (3) в (4)

$$\frac{M_I a}{G \cdot J_p} + \frac{M_{II} b}{G \cdot J_p} + \frac{M_{III} c}{G \cdot J_p} + \frac{M_{IV} a}{G \cdot J_p} = 0. \quad (5)$$

5. Упрощаем (5) и подставляем в него (2):

$$\begin{aligned} M_I a + M_{II} b + M_{III} c + M_{IV} a &= 0; \\ M_R a + (M_R + M_1) b + (M_R + M_1 + M_2) c + (M_R + M_1 + M_2 + M_3) a &= 0; \end{aligned}$$

$$M_R(2a + b + c) + M_1(a + b + c) + M_2(a + c) + M_3 a = 0;$$

$$M_R = -\frac{M_1(a + b + c) + M_2(a + c) + M_3 a}{2a + b + c}. \quad (6)$$

6. Подставим в (6) значения:

$$a = 1 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \quad c = 2 \text{ м}; \\ M_1 = 1000 \text{ Н·м}; \quad M_2 = 2000 \text{ Н·м}; \quad M_3 = 1000 \text{ Н·м}.$$

Тогда получим

$$M_R = -\frac{1000(1 + 2 + 2) + 2000(1 + 2) + 1000 \cdot 1}{(2 \cdot 1 + 2 + 2)} = -2000 \text{ Н·м}.$$

7. Из (1) определим X :

$$X = -(M_R + M_1 + M_2 + M_3) = -(-2000 + 1000 + 2000 + 1000) = -2000 \text{ Н·м}.$$

8. По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 3).

9. Определяем значения углов поворота в конце каждого участка. Из (3) получаем:

$$\bar{\varphi}_i = \frac{M_R a}{G \cdot J_p}; \quad \bar{\varphi}_{II} = \bar{\varphi}_I + \frac{(M_R + M_1) b}{G \cdot J_p}; \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}_{III} = \bar{\varphi}_{II} + \frac{(M_R + M_1 + M_2) c}{G \cdot J_p}; \quad \bar{\varphi}_{IV} = \bar{\varphi}_{III} + \frac{(M_R + M_1 + M_2 + M_3) a}{G \cdot J_p}.$$

10. Из условия прочности определяем диаметр. $M_{\max} = 2000$ Н·м; $[\tau] = 50$ МПа = $50 \cdot 10^6$ Н/м².

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_p} \leq [\tau]; \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Тогда диаметр определяется из выражения:

$$d_{\min} \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} \cong 0,059 \text{ м} = 59 \text{ мм},$$

Округляем до 60 мм; $d = 60$ мм.

Вычисляем значение полярного момента инерции

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,06)^4}{32} \cong 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

11. Вычисляем значения углов поворота по участкам из выражений (40). Примем $G = 1 \cdot 10^5$ МПа:

$$\bar{\varphi}_I = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^{11} \cdot 1,3 \cdot 10^{-4}} = -1,54 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$\bar{\varphi}_{II} = -\frac{10^3 \cdot 2}{10^{11} \cdot 1,3 \cdot 10^{-4}} - 1,54 \cdot 10^{-4} = -3,08 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$\bar{\varphi}_{III} = \frac{10^3 \cdot 2}{10^{11} \cdot 1,3 \cdot 10^{-4}} - 3,08 \cdot 10^{-4} = -1,54 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$\bar{\varphi}_{IV} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^{11} \cdot 1,3 \cdot 10^{-4}} - 1,54 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Эпюры углов поворота построены на рис.3.

12. Определяем наибольший относительный угол закручивания (по модулю):

$$\theta_I = \frac{\varphi_I}{a} = 1,54 \cdot 10^{-4} \text{ рад/м}; \quad \theta_{II} = \frac{\varphi_{II}}{b} = 1,54 \cdot 10^{-4} \text{ рад/м};$$

$$\theta_{III} = \frac{\varphi_{III}}{c} = 1,54 \cdot 10^{-4} \text{ рад/м}; \quad \theta_{IV} = \frac{\varphi_{IV}}{a} = 1,54 \cdot 10^{-4} \text{ рад/м}.$$

Относительный угол закручивания на всех участках одинаков и равен $\theta_{\max} = 1,54 \cdot 10^{-4}$ рад/м.

На рис.4 приведены схемы, в табл.2 – исходные данные для выполнения задания по вариантам.

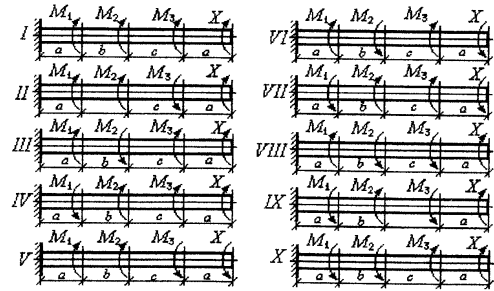


Рис.4

Таблица 2

№ п.п.	Номер схемы (рис.)	Расстояния, м			Моменты, Н·м			[τ], МПа
		a	b	c	M ₁	M ₂	M ₃	
1	I	1	2	2	1000	1200	1500	65
2		1	2	1	1500	2000	2500	80
3		1	1,5	3	2000	1200	1200	65
4	II	2	1	3	1100	1300	1800	50
5		1,5	2	2,5	1000	800	2000	80
6		2	1,5	2,5	1200	1400	1800	70
7		2,5	2	2,5	1000	1100	1000	75
8	III	1,4	1,2	2,1	600	800	1200	60
9		1,8	1,5	1,8	700	800	1000	65
10		2,2	1,6	1,5	1100	900	800	70
11		2	1,8	1,2	1100	600	400	65
12	IV	1,5	2	1,2	3000	2000	1000	80
13		1,2	1,6	1,4	1000	1200	1200	80
14		1,0	1,8	2	1200	800	600	60
15		0,8	2	1,5	1400	400	500	70
16	V	1,2	1,5	1	1300	1100	900	50
17		2	1,5	2	1200	800	600	60
18		1,5	2	1,5	1000	1100	900	80
19		2	2,5	2	800	700	500	50
20	VI	2	1,5	1	800	1200	800	60
21		3	2	1,5	600	700	1000	60
22		3,5	1,5	1	1600	1000	700	70
23	VII	1,5	1,8	2,1	2000	500	1300	70
24		2	1,6	1,8	1200	900	1000	70
25		2	1,4	1,4	1100	1500	1400	80
26	VIII	2,1	1,5	2	1000	900	900	75
27		2,2	1,0	1,5	900	1300	800	80
28		1,8	1,5	2	1200	1400	500	65
29	IX	1,5	2,5	1	1300	1100	1300	70
30		2	2	1,5	900	1200	1400	65
31		2,5	2	1,8	1000	1000	1500	65
32	X	1,3	1,2	1,3	1300	1200	1600	75
33		1,5	1,6	1,2	1500	1000	1700	75
34		2	1,8	1,5	900	1100	1200	70
35		1,8	2,0	1,5	700	900	800	60
36		2	1,5	1,5	600	500	1000	60