



Федеральное агентство морского и речного
транспорта
Федеральное государственное бюджетное
образовательное
учреждение высшего образования
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА
имени адмирала С. О. МАКАРОВА**

Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра основ инженерного проектирования

**С. Н. Федотов
А. А. Вардомская**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ КРОНШТЕЙНА**

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Изд-во ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова
2019

УДК
ББК

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент В. Н. Смирнов
Заведующий кафедрой ПСПОФ
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

Федотов С.Н., Вардомская А.А. Сопротивление материалов. Расчет кронштейна: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. — СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2019. — с.

Приведены задания, методические указания, пример расчета и оформления расчетно-графической работы «Расчет кронштейна».

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям:

08.03.01 Строительство

20.03.02 Природообустройство и водопользование

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов

26.03.02 Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры

26.05.06 - Эксплуатация судовых энергетических установок.

Количество выполняемых студентами пунктов задания определяется преподавателем в зависимости от направления подготовки.

© ФГБОУ ВО «ГУМРФ
имени адмирала С. О. Макарова», 2019
© С.Н. Федотов, А.А. Вардомская, 2019

Предисловие

В условиях быстро меняющихся средствах доставки, обработки и передачи информации, включая компьютеризацию всех сторон жизни, традиционное преподавание технических дисциплин требует определенных изменений.

Без знания основ дисциплины и определенных навыков решения конкретных задач, обучать студентов пользоваться программными средствами просто бессмысленно. Кроме того, необходимо, чтобы они понимали, как эти основы реализуются в программных продуктах. И наконец, учитывая, что все программные модули имеют обучающие программы, скорость изменения их и их носителей, адаптацию пользователей к этим изменениям, обучать слушателей пользоваться этими средствами возможно и не придется.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, начинающих изучать «Сопrotивление материалов» как одну из дисциплин механики деформируемого твердого тела (механики конструкций).

Приведены задания, методические указания по их выполнению, пример расчета и оформления.

В учебных целях материалы, размеры и форма поперечных сечений стержней задаются разными.

Приведены краткие сведения об ученых, работы которых способствовали развитию данной науки.

Список литературы содержит два классических учебника по «Сопrotивлению материалов» для «механиков» и для «строителей».

В приложении приведен стандарт на равнобокие уголки.

Можно и нужно пользоваться любой учебной литературой, включая стандарты на уголки любого года издания, приведенные в учебниках, задачниках и интернете.

Для выполнения задания не требуется дополнительных знаний.

Методические указания

1.1 Основные формулы, понятия и определения

Объектом изучения в курсе «Сопротивлении материалов» является стержень. Это элемент конструкции, длина которого значительно больше двух других определяющих габариты его поперечного сечения. Основным методом сопротивления материалов является метод сечений, суть которого заключается в следующем. Делается сечение и отбрасывается одна из частей. Действие одной части стержня на другую заменяется внутренними силовыми факторами. Если в сечении имеет место только один внутренний силовой фактор – продольная сила N , то вид деформации называют центральным растяжением (сжатием) или просто растяжением- сжатием. Продольную силу условно считают внешней нагрузкой и всем усилиям при растяжении присваивается знак плюс, а при сжатии – минус.

Интегральная зависимость между продольной силой и нормальным напряжением записывается так:

$$N = \int_F \sigma dF$$

N - продольная сила,

F - площадь поперечного сечения,

dF - элементарная площадка,

σ - нормальное (перпендикулярное сечению) напряжение – интенсивность нагрузки на единицу площади.

Сказанное изображено на Рис. 1.1.

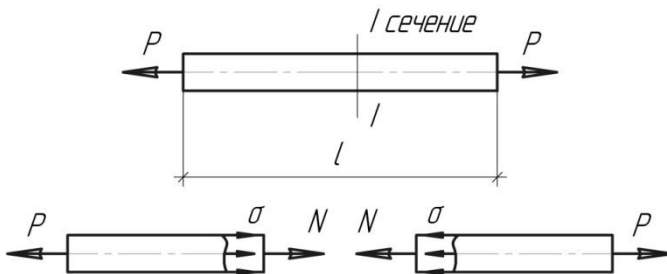


Рис. 1.1 Метод сечений

С учетом допущений данной науки на определенном расстоянии от точки приложения силы нормальные напряжения по сечению распределены равномерно $\sigma = const$, тогда

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma \int_F dF = \sigma \cdot F$$

Отсюда получаем простую, но очень важную формулу

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (1.1)$$

Основным законом сопротивления материалов является закон Гука¹. В дальнейшем закон уточнялся, уточнялись и пределы его применения. Сейчас он записывается так:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (1.2)$$

где:

Δl - абсолютная продольная деформация,

E - модуль упругости первого рода, коэффициент пропорциональности между нагрузкой и деформацией, модуль Юнга².

При расчетах на прочность конструкций условие прочности при растяжении (сжатии) записывается следующим образом:

а) при расчетах по методу допускаемых напряжений

$$\sigma = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma] \quad (1.3)$$

где

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение, устанавливается техническими условиями и нормами проектирования.

б) при расчетах по методу предельных состояний

$$\sigma = \frac{|N|}{F} \leq \gamma_c R \quad (1.4)$$

¹Роберт Гук (1635-1703) – английский физик и механик. Впервые экспериментально установил: какова «сила», таково и «удлинение».

²Томас Юнг (1773- 1829) – английский физик, механик и врач.

где:

γ_c - коэффициент условий работы (при нормальных условиях $\gamma_c = 1$),

R - расчетное сопротивление, устанавливается строительными нормами и правилами (СНиП).

В учебниках $[\sigma]$ и R задаются.

Задается и расчетная схема – идеализированное представление реальной конструкции.

Степень идеализации зависит от назначения расчета.

Стержневая геометрически неизменяемая система, на схеме которой стержни соединяются шарнирами, называют фермой (Рис. 1.2). **В системе СДО «Фарватер» показать ферму, ее монтаж и вид здания новой сцены Мариинского театра, 2012 г.**

Шарнирные соединения стержней обуславливают вид их деформации (растяжение – сжатие) и связано с силовыми аспектами взаимодействия стержней. Нагрузка при этом приводится к узлам (шарнирам).

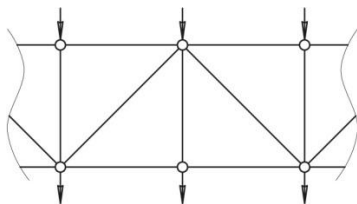


Рис. 1.2 Фрагмент схемы многофункциональной фермы новой сцены Мариинского театра

Простейшей фермой можно считать конструкцию, состоящую из двух стержней, которая служит креплением выступающих в горизонтальном направлении частей машин или сооружений. Здесь рассматривают такой вид конструкции, который называют кронштейном (Рис. 1.3).

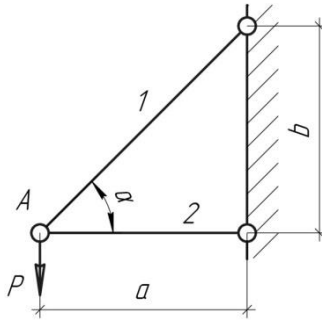


Рис.1.3 Расчетная схема кронштейна

Любая стержневая система должна удовлетворить условиям прочности и жесткости. Для проверки прочности необходимо уметь определять усилия, а для проверки жесткости – перемещения.

Найдем продольные силы в стержнях кронштейна. Имеется два неизвестных усилия. Для нахождения их необходимо составить два уравнения.

Врежем узел А и составим два уравнения статики (Рис. 1.4)

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sum X = 0 \quad N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 \\ 2. \sum Y = 0 \quad N_1 \sin \alpha - P = 0 \end{array} \right\} (1.5)$$

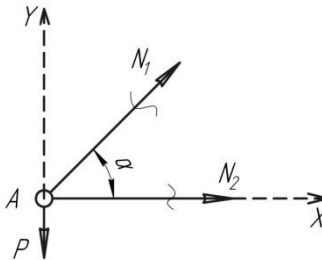


Рис. 1.4 Схема расчета продольных сил

Решая систему (1.5) получим:

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} \quad (1.6)$$

$$N_2 = -P \operatorname{ctg} \alpha \quad (1.7)$$

Знак минус у N_2 «говорит» о том, что второй стержень сжимается.

При расчете по методу допускаемых напряжений, используя правую часть равенства (1.3), можно найти требуемую площадь поперечного сечения стержня:

$$F \geq \frac{|N|}{[\sigma]} \quad (1.8)$$

Если это стандартный профиль, то по сортаменту надо выбрать ближайший больший или равный по площади профиль.

Затем, используя формулу (1.1), убедиться, что напряжение меньше или равно допускаемому. Если это не стандартный профиль, то рассчитать его размеры можно, используя полученное значение площади и заданную схему поперечного сечения стержня.

Под действием силы P (Рис. 1.3) узел A вследствие деформации стержней переместится, и надо найти это перемещение.

Из формул (1.6) и (1.7) видно, что первый стержень растягивается (продольная сила имеет знак «плюс»), а второй сжимается. Если взять циркуль, и размером большим, чем длина первого стержня, сделать засечку, а затем повторить это со вторым стержнем (Рис. 1.5), то получим точку A' – положение узла A после деформации.

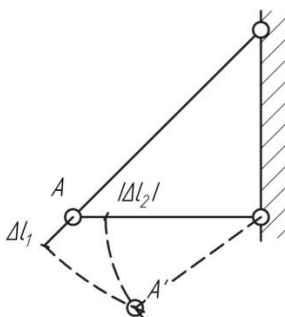


Рис. 1.5 Схема перемещения узла A

Поскольку деформации малы и подчиняются закону Гука, то дуги можно заменить хордами. При допустимой нагрузке стальной стержень длиной 1 м увеличится не более, чем на 1 мм. Если вырезать узел А и увеличить масштаб, то получим план его перемещения (Рис. 1.6)

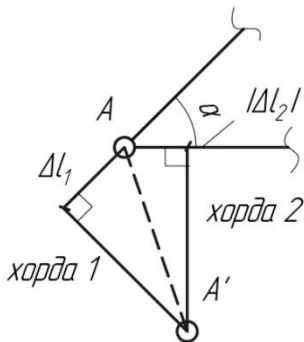


Рис. 1.6 План перемещения узла А

По формуле (1.2) можно определить $\Delta l_1, \Delta l_2$. Из Рис. 1.6 видим, что имеется два прямоугольных треугольника, у которых известны катеты, и если найти другие катеты (хорды 1, 2), то будем иметь как минимум два решения. В свою очередь, хорды 1, 2 могут быть найдены по-разному. Три варианта дополнительных построений (Рис. 1.7) дают возможность несколькими способами найти перемещение AA'

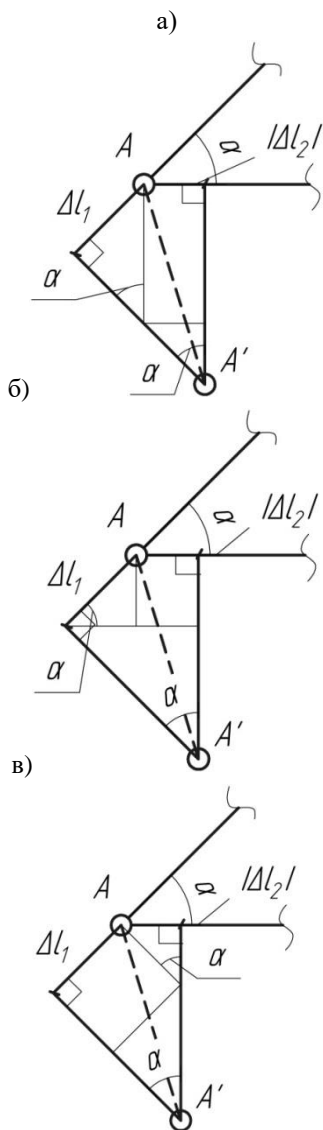


Рис. 1.7 Варианты дополнительных построений для определения перемещения AA'

Возможны и другие решения.

Теперь допустим, что надо найти перемещение какого-либо узла фермы на Рис. 1.2. Очевидно, что принятый нами путь решения здесь практически нереализуем.

1.2 Формула Максвелла – Мора

Поскольку рассматриваются области, в которых системы линейно деформируемые, т.е. справедлив закон Гука (1.2) и диаграмма на Рис. 2.1, то выражение для элементарной работы будет:

$$dA = dN \Delta l = Nd(\Delta l)$$

где:

dA - элементарная работа продольной силы,

dN - элементарное приращение продольной силы,

$d(\Delta l)$ - элементарное приращение абсолютной продольной деформации.

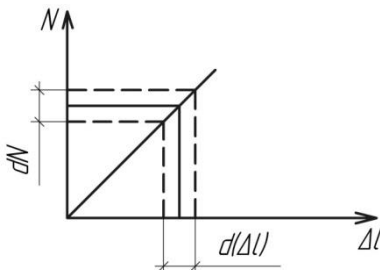


Рис. 2.1 Диаграмма, характеризующая закон Гука

Запишем (1.2) так:

$$N = \frac{EF}{l} \cdot \Delta l \quad (2.1)$$

где:

$\frac{EF}{l}$ - погонная продольная жесткость стержня, которую обозначим

через « k », тогда получим

$$N = k\Delta l \quad (2.2)$$

Работа продольной силы с учетом (2.2) будет равна

$$A = \int_0^N \frac{1}{k} NdN = \int_0^{\Delta l} k\Delta l d\Delta l = \frac{N^2}{2k} = \frac{k}{2} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} N\Delta l = \frac{N^2 l}{2EF}$$

Запишем начало и конец

$$A = \frac{N^2 l}{2EF} \quad (2.3)$$

Поскольку в методе сечений внутренние усилия считаются внешними, то

$$A = U = \frac{N^2 l}{2EF} \quad (2.4)$$

где:

U - потенциальная энергия деформации.

Вернемся к определению перемещения AA' (Рис. 1.6). Потенциальная энергия, которая накопилась в стержнях кронштейна в результате действия силы P , будет

$$U_p = \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_{ip})^2 l_i}{(EF)_i} = A_p \quad (2.5)$$

где:

U_p - потенциальная энергия стержней от действия силы P ,

N_{ip} - продольная сила в стержнях от действия силы P ,

A_p - работа силы P .

Теперь вместо силы P , по направлению AA' , приложим единичную силу (Рис. 2.2).

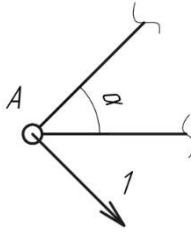


Рис. 2.2 Единичная сила, приложенная по направлению AA'

Потенциальная энергия U_1 от действия единичной силы запишется формулой

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_i)^2 l_i}{(EF)_i} = A_1 \quad (2.6)$$

где:

A_1 - работа, которую совершила единичная сила в процессе нагружения.

Теперь кронштейн будем нагружать следующим образом: сначала приложим единичную силу, а уже потом силу Р.

Потенциальную энергию деформации кронштейна обозначим через U_{1+p} , работу нагрузок – A_{1+p} , усилия в стержнях кронштейна N_{1+p} . Тогда можно записать, что

$$U_{1+p} = \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_{i+p})^2 l_i}{(EF)_i} = A_{1+p} \quad (2.7)$$

На основании принципа суперпозиции: результат от действия нескольких сил равен сумме результатов от действия каждой силы в отдельности.

$$N_{i+p} = N_i + N_{i_p}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
 U_{1+p} &= \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_{i+p})^2 l_i}{(EF)_i} = \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_i + N_{i_p})^2 l_i}{(EF)_i} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_i)^2 l_i}{(EF)_i} + \sum_i^n \frac{N_{i_p} N_i l_i}{(EF)_i} + \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{(N_{i_p})^2 l_i}{(EF)_i} = A_{1+p}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

На первом этапе нагружения согласно формуле (2.6) единичная сила совершит работу A_1 . На втором этапе нагружения сила P совершит работу согласно формуле (2.5), а единичная сила на искомом перемещении $\Delta A_1 = \Delta$ совершит работу $1 \cdot \Delta$.

Таким образом

$$A_{1+p} = A_1 + A_p + 1 \cdot \Delta \tag{2.9}$$

Подставим теперь в (2.9) вместо A_{1+p} (2.8), A_1 (2.6) и вместо A_p (2.5), получим

$$\Delta = \sum_i^n \frac{N_{i_p} N_i l_i}{(EF)_i} \cdot 1 \tag{2.10}$$

Можно ввести обозначение

$$\overline{N}_i = \frac{N_i}{1} - \text{безразмерные единичные продольные силы в стержнях.}$$

Тогда формула (2.10) запишется так

$$\Delta = \sum_i^n \frac{N_{i_p} \overline{N}_i l_i}{(EF)_i} \tag{2.11}$$

А если считать единичную силу безразмерной величиной, то черту у \overline{N}_i можно убрать

$$\Delta = \sum_i^n \frac{N_{i_p} N_i l_i}{(EF)_i} \tag{2.12}$$

Слагаемые в формулах (2.11) и (2.12) будут иметь знак плюс, если усилие в стержне от единичной нагрузки будет совпадать по знаку с усилием от внешней.

В рассматриваемой задаче мы не знаем направление Δ , но мы сможем найти вертикальное Δ_B и горизонтальное Δ_T перемещение узла А, а затем уже по теореме Пифагора найти Δ .

Впервые такой подход к определению перемещений был сформулирован Д.Максвеллом³. Затем уже О.Мор⁴ получил обобщенную формулу для расчета перемещений в стержневых системах, которая теперь называется его именем. Применим формулу Мора для определения перемещения АА' (Рис. 1.6). Для наглядности решения пусть будет

$$\left. \begin{aligned} l_2 = l; F_2 = F; F_1 = 2F; \alpha = 60^\circ \\ \text{Sin } 60^\circ = 0.866; \text{Cos } 60^\circ = 0.500 \\ \text{Тогда } l_1 = 2l \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

На основании (1.6) и (1.7) запишем

$$\left. \begin{aligned} N_{1p} = \frac{P}{\text{Sin } \alpha} = 1,155P \\ N_{2p} = -P \text{ctg } \alpha = -0,577P \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

где N_{1p} , N_{2p} - продольные силы в первом и втором стержнях от действия внешней нагрузки.

Теперь приложим вертикально единичную силу (Рис. 2.3)

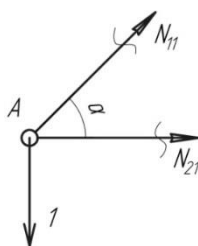


Рис. 2.3 Единичная сила, приложенная в узел А в вертикальном направлении

³Джеймс Максвелл (1831 – 1879) – шотландский физик и механик, создатель теории электромагнитного поля.

⁴Отто Мор (1835 – 1918) – немецкий механик и инженер.

Автоматически из (2.14) имеем

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{1}{\sin \alpha} \\ N_{21} = -\operatorname{ctg} \alpha \end{cases} \quad (2.15)$$

По формуле Мора найдем

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \sum_i^n \frac{N_i N_i l_i}{(EF)_i} = \frac{N_{1p} N_{11} 2l}{E2F} + \frac{N_{2p} N_{21} l}{EF} = \\ &= \frac{P \cdot l}{\sin^2 \alpha \cdot EF} + \frac{P \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot l}{EF} = \\ &= \frac{Pl}{EF} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{Pl}{EF} \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Запишем начало и конец, учитывая, что $\alpha = 60^\circ$

$$\Delta_B = 1,667 \frac{Pl}{EF} \quad (2.17)$$

Теперь приложим единичную силу в горизонтальном направлении (Рис. 2.4)

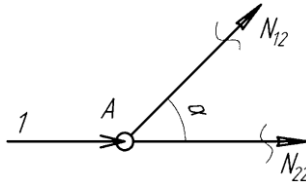


Рис. 2.4 Горизонтальная единичная нагрузка в узле А

Составим два уравнения статики

$$\left. \begin{aligned} 1. \sum Y = 0 \quad N_{12} = 0 \\ 2. \sum X = 0 \quad N_{22} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Применим формулу Мора для определения горизонтального перемещения узла А

$$\Delta_r = \sum_i^n \frac{N_{i_p} N_{i_2} l_i}{(EF)_i} = \frac{N_{1p} N_{12} 2l}{E2F} + \frac{N_{2p} N_{22} l}{EF} =$$

$$= \frac{Pl}{EF} \operatorname{ctg} \alpha \quad (2.19)$$

Или

$$\Delta_r = 0,577 \frac{Pl}{EF} \quad (2.20)$$

Если воспользоваться планом перемещений на Рис. 1.7, в), то получим формулы (2.16) и (2.19).

Очевидно, что если единичные силы приложить в противоположные стороны, то знаки вертикального и горизонтального перемещений поменяются с плюса на минус.

1.3 Общие уравнения и метод конечных элементов в механике конструкций.

Вернемся к кронштейну. Введем главную (глобальную) систему координат X, Y . По направлению глобальных осей введем возможные внешние силы P_1 и P_2 (Рис. 3.1).

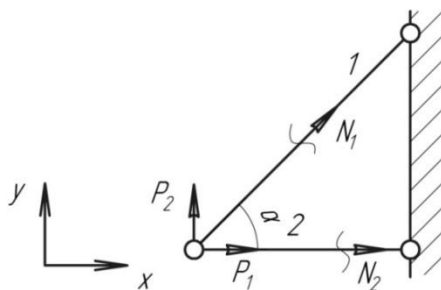


Рис. 3.1 Схема кронштейна с возможной внешней нагрузкой
Запишем уравнение равновесия

$$\begin{cases} N_1 \cos \alpha + N_2 + P_1 = 0 \\ N_1 \sin \alpha + P_2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

В матричной форме система (3.1) запишется так

$$A\vec{S} + \vec{P} = 0 \quad (3.2)$$

где:

$$A = [A] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 \\ \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица уравнений равновесия}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} - \text{вектор внешних сил}$$

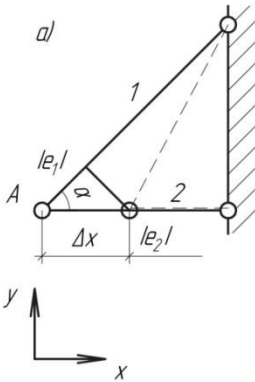
$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} - \text{вектор внутренних усилий}$$

Кронштейн, соединенный в узле А, до деформации должен оставаться соединенным в этом же узле и после деформации.

Обозначим через Δ_x перемещение узла А по направлению оси X, а через Δ_y – по направлению Y. Деформацию первого стержня обозначим как e_1 , второго как e_2 .

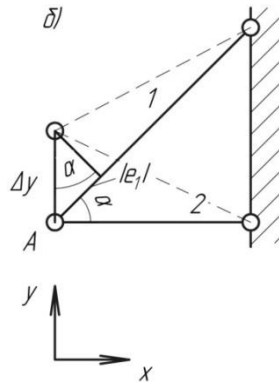
При положительных перемещениях деформации стержней отрицательны.

На Рис. 3.2 показаны перемещения узла А по оси X (а) и по оси Y (б)



$$\Delta_x \neq 0 \quad \Delta_y = 0$$

$$|e_1| = \Delta_x \cos \alpha, \quad |e_2| = \Delta_x$$



$$\Delta_x = 0 \quad \Delta_y \neq 0$$

$$|e_1| = \Delta_y \sin \alpha, \quad |e_2| = 0$$

Рис. 3.2 Горизонтальное перемещение узла А (а);
вертикальное перемещение узла А (б)

При одновременном перемещении по осям X и Y ($\Delta_x \neq 0$ $\Delta_y \neq 0$) получим

$$\begin{cases} |e_1| = \Delta_x \cos \alpha + \Delta_y \sin \alpha \\ |e_2| = \Delta_x \end{cases} \quad (3.3)$$

Перенесем правые части уравнений в левые. Запишем деформации с отрицательным знаком и умножим обе части уравнений на минус единицу. Тогда в матричной форме получим

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Матрица, стоящая перед вектором перемещений, представляет собой транспонированную матрицу уравнений равновесия узла А. Замена строк на столбцы называется транспонированием и обозначается A^T .

Важный в механике принцип двойственности. В общем случае доказывается использованием формулы (2.4). Перепишем (3.4) с учетом введенных обозначений

$$A^T \vec{Z} + \vec{e} = 0 \quad (3.5)$$

где:

- \vec{Z} - вектор перемещений;

- \vec{e} - вектор деформаций.

Запишем закон Гука для каждого из стержней

$$\begin{cases} S_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1} \cdot e_1 \\ S_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2} \cdot e_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.6) в матричной форме запишется

$$[\kappa] \vec{e} = \vec{S} \quad (3.7)$$

$$\text{где: } [K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Сведем уравнения (3.2), (3.5) и (3.7) в систему

$$\begin{cases} A\vec{S} + \vec{P} = 0 - \text{уравнения равновесия} \\ A^T \vec{Z} + \vec{e} = 0 - \text{геометрические уравнения} \\ [K]\vec{e} = \vec{S} - \text{физические уравнения} \end{cases} \quad (3.8)$$

Систему уравнений (3.8) называют полной системой уравнений строительной механики или общими уравнениями механики конструкций.

Теперь сделаем следующие преобразования: сначала (3.7) поставим в (3.2), получим

$$A[K]\vec{e} + \vec{P} = 0 \quad (3.9)$$

Затем в (3.9) подставим \vec{e} из (3.5)

$$-A[K]A^T \vec{Z} + \vec{P} = 0$$

или

$$A[K]A^T \vec{Z} = \vec{P} \quad (3.10)$$

Введем обозначение

$$[K] = A[K]A^T \quad (3.11)$$

где:

$[K]$ - матрица жесткости конструкции

$$[K]\vec{Z} = \vec{P} \quad (3.12)$$

Из (3.12) находятся перемещения

$$\vec{Z} = [K]^{-1}\vec{P} \quad (3.13)$$

где:

$[K]^{-1}$ - обратная матрица матрице $[K]$

После определения перемещений \vec{Z} внутренние усилия \vec{S} могут быть найдены по (3.7), куда надо подставить \vec{e} из (3.5).

Получим

$$\vec{S} = -[\kappa]A^T \vec{Z} \quad (3.14)$$

Такое совместное решение общих уравнений называют методом перемещений.

Метод конечных элементов, реализованный в форме метода перемещений, в настоящее время является фундаментальным методом механики.

В нашем случае конечным элементом является стержень с шарнирами на концах, который называют ферменным элементом.

Применим основной метод сопротивления материалов и рассечем ферменный элемент (Рис. 3.3). Спроецируем усилие S на оси X и Y в начале (n) и в конце (k) стержня.

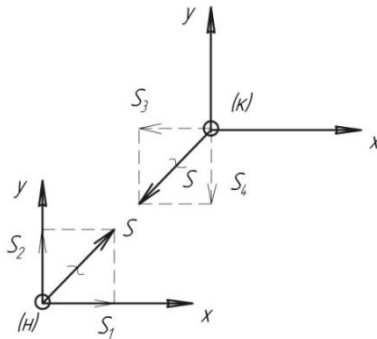


Рис. 3.3 Расчетная схема ферменного элемента

Получим

$$\begin{aligned} S_1 &= S \cdot \cos \alpha; & S_2 &= S \cdot \sin \alpha; \\ S_3 &= -S \cdot \cos \alpha; & S_4 &= -S \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.15)$$

Запишем (3.15) в матричном виде

$$[A] = [\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad -\sin \alpha]^T \quad (3.16)$$

где:

$[A]$ - статическая матрица ферменного элемента.

Матрицу, выражающую внутренние усилия через его деформацию, называют матрицей внутренней жесткости.

$$[k] = \frac{EF}{l} \cdot [1]$$

Теперь, если умножить матрицу $[k]$ справа на A^T , то получим матрицу усилий от единичной деформации. Для краткости записи введем обозначения:

$$c = \text{Cos } \alpha; s = \text{Sin } \alpha; \frac{EF}{l} = f$$

Тогда получим

$$[k][A]^T = f[c \ s \ -c \ -s] \quad (3.17)$$

И, наконец, если (3.17) умножить на матрицу $[A]$ слева, то получим матрицу жесткости ферменного элемента. Матрица жесткости ферменного элемента в глобальной системе координат $[K^G]$

$$[K^G] = [A][k][A]^T = [k_{ij}] =$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ \text{сим} & & K_{33} & K_{34} \\ \text{метрично} & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Для сокращения записей, с учетом введенных обозначений, введем дополнительные:

$$g_1 = fc^2, \quad g_2 = fcs, \quad g_3 = fs^2$$

Тогда элементы матрица жесткости $[K]$ определяется по формулам

$$\begin{cases} K_{11} = K_{33} = -K_{13} = g_1; \\ K_{22} = K_{44} = -K_{24} = g_3; \\ K_{12} = K_{34} = -K_{14} = -K_{23} = g_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

Имеем матрицу жесткости каждого конечного элемента, теперь их надо «правильно связать», чтобы получить матрицу жесткости конструкции. Сделать это можно с помощью известной нам процедуры (3.11), где вместо $[k]$ надо подставить K'

$$K' = \begin{bmatrix} k_1^r & & & \\ & k_2^r & 0 & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & k_m^r \end{bmatrix}$$

где:

K' – квазидиагональная матрица с m ненулевыми элементами, каждый из которых является матрицей жесткости конечного элемента. А вместо матрицы $[A]$ подставить матрицу инцидентностей $[I]$ (матрицу инцидентностей), которая характеризует бинарное отношение между возможными перемещениями узлов конструкции и конечного элемента. Другими словами, каждая строка матрицы $[I]$ должна отвечать одному возможному перемещению узла конструкции, а каждый столбец – одному возможному конечному перемещению конечного элемента. Причем, если перемещение конца стержня отвечает перемещению узла схемы, элемент матрицы $[I]$ принимает значение единицы, иначе – нулевое значение. Сказанное запишем формулой:

$$[K] = I[K']I^T \quad (3.20)$$

Далее по (3.13) находят \vec{Z} , а по (3.14) \vec{S} .

Решим нашу задачу методом конечных элементов (Рис. 1.3).

Исходные данные (2.13).

Матрицы жесткости конечных элементов определяем по формулам (3.19), (3.18).

$$k_1^r = f \begin{bmatrix} 0,25 & 0,433 & -0,25 & -0,433 \\ & 0,75 & -0,433 & -0,75 \\ \text{сим} - & & 0,25 & 0,433 \\ \text{метрично} & & & 0,75 \end{bmatrix}$$

$$k_2^r = f \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим} - & & 1 & 0 \\ \text{метрично} & & & 0 \end{bmatrix}$$

На Рис. 3.4а) показана схема возможных перемещений узлов конструкции, а на Рис. 3.4 б) схема возможных перемещений концов конечных элементов.

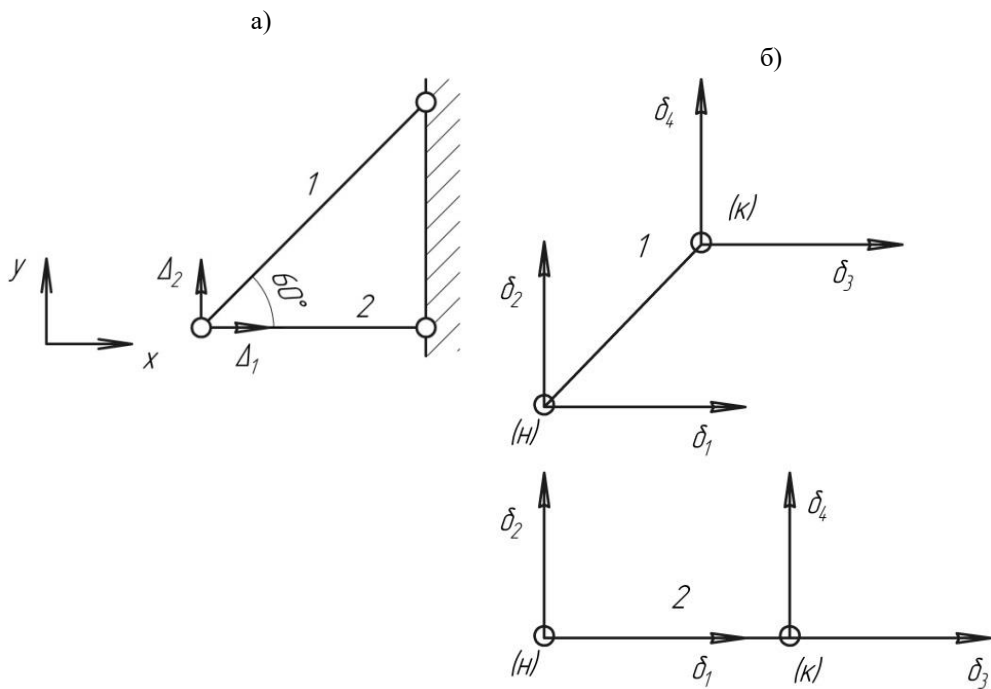


Рис. 3.4 Схема построения матрицы [Г]

Тогда матрица [I] будет следующей

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

или в виде таблицы 1.

Таблица 1

Δ / δ	1-ый конечный элемент				2-ой конечный элемент			
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
Δ_1	1	0	0	0	1	0	0	0
Δ_2	0	1	0	0	0	1	0	0

Далее по формуле (3.20) находим матрицу жесткости конструкции

$$[K] = I[K^*]I^T = f \begin{bmatrix} 1,25 & 0,433 \\ 0,433 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем обратную матрицу $[K]^{-1}$

$$\begin{aligned} [K]^{-1} &= \frac{1}{0,75f} \begin{bmatrix} 0,75 & -0,433 \\ -0,433 & 1,25 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{f} \begin{bmatrix} 1 & -0,577 \\ -0,577 & 1,667 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

По формуле (3.13) найдем \vec{Z}

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} 1 & -0,577 \\ -0,577 & 1,667 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

или

$$\Delta_1 = 0,577 \frac{Pl}{EF};$$

$$\Delta_2 = -1,667 \frac{Pl}{EF}$$

Что совпадает с решением (2.20) и (2.17). Возможное перемещение направлено вверх по оси Y , а действительное вниз, поэтому стоит знак минус.

Для того, чтобы воспользоваться формулой (3.14) надо построить вектор перемещений концов конечного элемента, осуществить листинг (список) перемещений концов стержней.

В нашем случае начало элементов (n) перемещаются в горизонтальном в вертикальном направлениях, а концы (k) – закреплены (перемещения равны нулю), поэтому:

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = [0,577 \quad -1,667 \quad 0 \quad 0]^T \cdot \frac{Pl}{EF}$$

Теперь можно воспользоваться формулой (3.14)

$$N_1 = -f [0,5 \quad 0,866 \quad -0,5 \quad -0,866] \begin{bmatrix} 0,577 \\ -1,667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{Pl}{EF} = 1,155P$$

$$N_2 = -f [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0,577 \\ -1,667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{Pl}{EF} = -0,577P$$

что совпадает с решением (2.14).

Мы рассмотрели шарнирно-стержневой конечный элемент, из которых состоят фермы, применяемые для перекрытия больших площадей [В системе СДО «ФАРВАТЕР» показать строительство ангаров для самолетов в Шереметьево, 2018 г.] и не только. Их применение обусловлено «целесообразностью» по сравнению с другими решениями. Приборы на надводных и подводных судах устанавливаются на кронштейнах с целью экономии пространства и времени для уборки помещений. Однако, такие элементы встречаются и в балочных конструкциях. Стержни, преимущественно работающие на изгиб, называют балками. Тогда такой элемент нагружают внешней нагрузкой (Рис. 3.5, а), которую приводят к узлам стержня. В плоских стержневых системах возможны еще два варианта – балочный (изгибаемый) с двумя

жесткими заделками (Рис. 3.5, б)) и шарнирно-балочный (комбинированный), который имеет два варианта: с шарниром в начале и с шарниром в конце стержня (Рис. 3.5, в,г)).

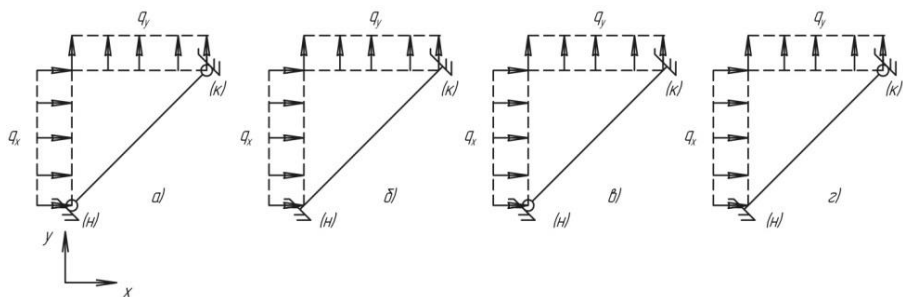


Рис 3.5 Типы конечных элементов для плоских стержневых систем

Матрица жесткости для типа (Рис.35, а) рассчитывается по формулам (3.19) и (3.18). Для остальных типов конечных элементов матрицы жесткости получаются аналогичным образом.

Самый большой размер матрицы $[K^r]$ будет 6×6 для элемента на Рис. 3.5, б), т.к. на плоскости могут быть 3 внутренних силовых фактора, а стержень имеет 2 конца.

Ясно, что для всех типов стержней можно ограничиться одной матрицей 6×6 , и при наклонном стержне все элементы матрицы $[K^r]$ будут ненулевыми. Для типа конечного элемента на Рис. 3.5, в) их будет пять, для типа на Рис. 3.5, а) только четыре. Для пространственного стержня матрица жесткости $[K^r]$ будет иметь в общем случае размер 12×12 . Поскольку шесть внутренних силовых фактора умножаются на два.

Для континуальных (непрерывных) систем, пластин, оболочек, массивов рассматриваемый нами путь от частного к общему к решению не приведет. Поскольку точного решения здесь просто нет (пока нет).

В этом случае МКЭ приходится рассматривать как вариационный метод, связанный с понятием полной потенциальной энергии системы и утверждением, что вариация δ (небольшое отклонение) полной потенциальной энергии равна нулю.

$$\delta \mathcal{E} = 0 \quad (3.21)$$

Вариационный принцип Лагранжа⁵.

Сформулировать словами (3.21) можно так: в состоянии равновесия полная потенциальная энергия системы принимает стационарное значение по сравнению со всеми смежными состояниями. Или так: со всеми возможными положениями деформируемая система займет такое, при котором ее потенциальная энергия будет минимальной.

Переход от континуальных систем к дискретным (от дифференциальных уравнений механики конструкций к алгебраическим) происходит с использованием метода Ритца⁶. Пластины, оболочки и массивы разбиваются на конечные элементы. Конечные элементы могут быть различной формы. Пластины и оболочки разбиваются на треугольные (3 узла), четырехугольные (4 узла) конечные элементы. Массивные тела на трапециевидные (8 узлов) конечные элементы.

Из теоретической механики известно, что обобщенная сила равна производной от энергии по обобщенному перемещению с обратным знаком. В уравнениях Ритца знак минус опущен и упругой силой названа сама производная. Такую силу надо рассматривать как силу, противоположно направленную силам упругости. Чтобы связать МКЭ с общими уравнениями механики конструкций внесем некоторые изменения в эти уравнения.

Уравнения (3.2) и (3.14), в которых у вектора \vec{S} меняется знак на противоположный, запишутся так:

$$A\vec{S} - \vec{P} = 0 \quad (3.22)$$

$$\vec{S} = [K]A^T \vec{Z} \quad (3.23)$$

Подставляя последнее уравнение в (3.7), получим:

$$A^T \vec{Z} = \vec{e} \quad (3.24)$$

Тогда общая система уравнений примет вид:

⁵Жозеф Лагранж (1736 – 1813) – итальянский математик и механик.

⁶Вальтер Ритц (1878 – 1909) – швейцарский физик, теоретик и математик.

$$\begin{cases} A\vec{S} = \vec{P} \\ A^T \vec{Z} = \vec{e} \\ [K]\vec{e} = \vec{S} \end{cases} \quad (3.25)$$

Легко убедиться в том, что конечные формулы (3.12) и (3.13) для определения перемещений не изменятся.

Для этого (3.23) подставим в (3.22)

$$A[K]A^T \vec{Z} = \vec{P} \quad (3.26),$$

а поскольку $[K] = A[K]A^T$, то автоматически получаем (3.12) и (3.13).

Дальше «просто». Выражение для потенциальной энергии в k -том конечном элементе можно представить в форме (общий случай – трехосное напряженное состояние)

$$U_k = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_k^T \sigma_k dV \quad (3.27),$$

которая получается из (2.4) с учетом вывода формулы (1.1), и понятия относительной деформации $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial X}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial Y}$; $\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial Z}$, где U, V, W перемещения по осям X, Y, Z .

В свою очередь формула (3.27), записанная через матрицу жесткости – k -того конечного элемента будет

$$U_k = \frac{1}{2} \vec{Z}_k^T [K]_k \vec{Z}_k \quad (3.28)$$

Суммируя потенциальную энергию по всем $k=1,2,\dots,m$ конечным элементам, получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \vec{Z}_k^T [K]_k \vec{Z}_k = \frac{1}{2} \vec{Z}^T [K] \vec{Z} \quad (3.29),$$

где:

$[K]$ – известная нам матрица жесткости конструкции.

Теперь вернемся к понятию полной потенциальной энергии, которая складывается из потенциальной энергии упругой деформации и потенциальной энергии внешних сил.

$$\mathcal{E} = U + \Pi \quad (3.30)$$

Потенциальную энергию внешних сил выразим через узловые перемещения

$$\Pi = -\vec{Z}^T \cdot \vec{P} \quad (3.31)$$

Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \vec{Z}^T [K] \vec{Z} - \vec{Z}^T \cdot \vec{P} \quad (3.32)$$

Этот функционал является неоднородной квадратичной формой неизвестных коэффициентов Z_1, Z_2, \dots, Z_M , из которых составлен вектор узловых перемещений.

Вариационное уравнение (3.21) примет вид:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_j} \right) \delta Z_j = 0$$

Откуда в силу произвольности вариации δZ_j и на основании основной леммы вариационного исчисления приходят к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов - узловых перемещений. В матричной форме эти уравнения записываются так

$$[K] \vec{Z} = \vec{P},$$

что совпадает с (3.12).

Отсюда понятно, почему МКЭ является универсальным методом в механике конструкций (и не только).

В «Википедии» читаем: «МКЭ – это численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Метод широко используется для решения задач механики деформируемого твердого тела (механики конструкций) и т.д.» Наиболее известными программными продуктами в механике конструкций являются ЛИРА, ANSYS, SCAD, AMPWinMachin и др.

Авторы надеются (возможно наивно), что студенту хватит терпения дочитать «это» до конца. И тогда, посещая любой супермаркет или, например, стадион «Газпром Арена», он обратит внимание на

металлические конструкции вокруг него [Показать в СДО «ФАРВАТЕР» строительство и здание «Газпром Арена», 2017 г.] и вспомнит, что о расчете таких конструкций он читал (и не только). И, возвращаясь со стадиона на трамвае, вдруг увидит, что кронштейны, на которых закреплены сидения, выполнены по схеме 3 задания.

Любой путь начинается с первого шага. Сделай его при изучении замечательной науки «Сопротивление материалов» и выполни самостоятельно предлагаемое задание.

Оформляется задание строго в соответствии с примером (Приложение 2).

Слово «строго» включает в себя:

- титульный лист
- исходные данные на отдельном листе
- проведение расчета по схеме: определяемая величина, формула, числа, ответ с определенным в примере числом значащих цифр и размерность.

Допускается компьютерное оформление задания.

ЗАДАНИЕ № 1
по теме “Центральное растяжение-сжатие”

РАСЧЕТ КРОНШТЕЙНА

1. Подобрать из условия прочности при центральном растяжении-сжатии поперечные сечения стержней кронштейна. Сечение стального стержня принять по сортаменту из двух равнобоких уголков. Деревянный стержень принять квадратного или круглого сечения в соответствии с расчетной схемой, округлив требуемый размер стороны квадрата или диаметра до целых сантиметров. Допускаемые напряжения: для стали $[\sigma]_c = 90$ МПа, для древесины $[\sigma]_д = 8$ МПа.

2. Определить путем построения плана перемещений истинное линейное перемещение узла, в котором приложена сила P . Модули упругости для стали $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа, для древесины $E_д = 10^4$ МПа.

3. Используя формулу Максвелла-Мора определить линейное перемещение узла, в котором приложена сила P .

4. Провести расчеты на ПК.

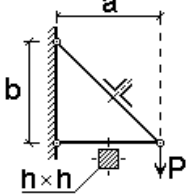
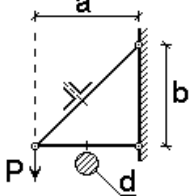
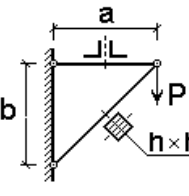
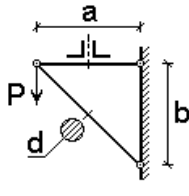
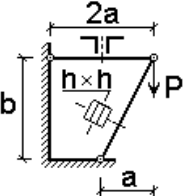
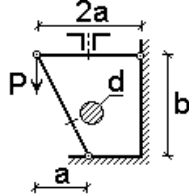
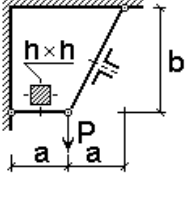
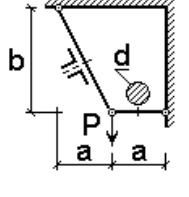
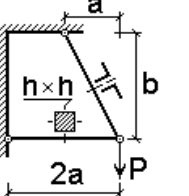
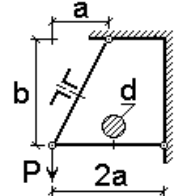
5. Сравнить полученные результаты и сделать выводы.

Исходные данные принимаются в соответствии с шифром студента, который необходимо получить у преподавателя.

Численные данные к расчету кронштейна определяются по 1-й цифре шифра из следующей таблицы:

Группа	1-я цифра шифра	а см	б см	Р кН
21	0	40	100	200
	1	50	110	220
	2	60	120	240
	3	70	130	260
22	0	60	140	270
	1	70	150	280
	2	80	160	290
	3	90	170	300
23	0	80	180	310
	1	90	190	320
	2	110	200	330
	3	120	210	340
24	0	100	220	350
	1	110	230	360
	2	130	240	370
	3	150	250	380

Расчетная схема кронштейна принимается по 2-й цифре шифра:

 <p>1</p>	 <p>2</p>
 <p>3</p>	 <p>4</p>
 <p>5</p>	 <p>6</p>
 <p>7</p>	 <p>8</p>
 <p>9</p>	 <p>0</p>

Пример расчета и оформления задания



Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**«Государственный университет морского и речного флота имени
адмирала С.О.Макарова»**

Кафедра **Основ инженерного проектирования**

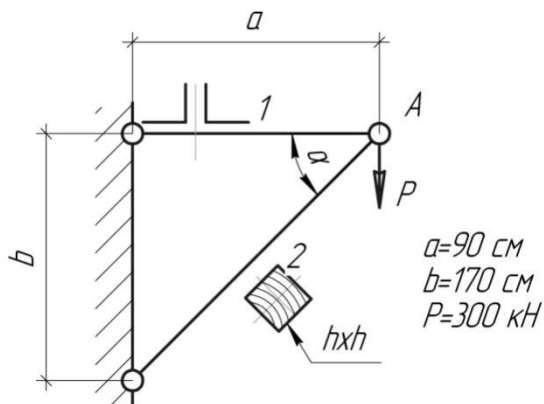
Учебная дисциплина:
«Сопротивление материалов»

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА
«Расчет кронштейна»

Выполнил:
Вариант №
Проверил:

Санкт-Петербург
2019

1. Исходные данные



1. Подобрать из условия прочности при центральном растяжении-сжатии поперечные сечения стержней кронштейна. Сечение стального стержня 1 принять по сортаменту из двух равнобоких уголков. Деревянный стержень 2 принять квадратного сечения, округлив требуемый размер стороны квадрата до целых сантиметров. Допускаемые напряжения: для стали $[\sigma]_{ст} = 90\text{ МПа}$, для древесины $[\sigma]_д = 8\text{ МПа}$.

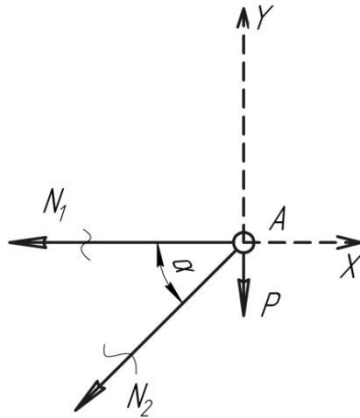
2. Определить путем построения плана перемещений истинное линейное перемещение узла, в котором приложена сила P . Модули упругости для стали $E_c = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$, для древесины $E_d = 10^4\text{ МПа}$.

3. Используя формулу Максвелла-Мора определить линейное перемещение узла, в котором приложена сила P .

4. Провести расчеты на ПК.

5. Сравнить полученные результаты и сделать выводы.

2. Определение усилий в стержнях



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{170}{90} = 1,89$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = 62,12^\circ$$

$$\operatorname{Sin} \alpha = 0,884$$

$$\operatorname{Cos} \alpha = 0,486$$

$$l_2 = \frac{b}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{1700}{0,884} = 1923 \text{ мм}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sum X = 0 - N_1 - N_2 \operatorname{Cos} \alpha = 0 \\ 2. \sum Y = 0 - N_2 \operatorname{Sin} \alpha - P = 0 \end{array} \right\}$$

$$N_2 = -\frac{P}{\operatorname{Sin} \alpha} = -\frac{300}{0,884} = -339,4 \text{ кН}$$

$$N_1 = -N_2 \operatorname{Cos} \alpha = 339,4 \cdot 0,486 = 158,8 \text{ кН}$$

3. Подбор сечений и проверка прочности

$$F_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma_{cm}]} = \frac{158,8 \cdot 10^3}{90 \cdot 10^6} = 1,765 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 17,65 \text{ см}^2$$

$$F_{yz} = \frac{F_1}{2} = \frac{17,65}{2} = 8,82 \text{ см}^2$$

Выбираю уголок №9 90х90х6 с $F_{yz} = 10,6 \text{ см}^2$

Тогда

$$F_1 = 2F_{yz} = 2 \cdot 10,6 = 21,2 \text{ см}^2$$

$$F_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma_o]} = \frac{339,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 42,43 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 424,3 \text{ см}^2$$

$$h = \sqrt{F_2} = \sqrt{424,3} = 20,6 \text{ см}$$

Принимаем $h = 21 \text{ см}$ $F_2 = h^2 = 441 \text{ см}^2$

$$\sigma_{cm} = \frac{|N_1|}{F_1} = \frac{158,8 \cdot 10^3}{21,2 \cdot 10^{-4}} = 7,49 \cdot 10^7 \text{ Па} =$$

$$= 74,9 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{cm} = 90 \text{ МПа}$$

$$\sigma_o = \frac{|N_2|}{F_2} = \frac{339,4 \cdot 10^3}{441 \cdot 10^{-4}} = 0,77 \cdot 10^7 \text{ Па} =$$

$$= 7,7 \text{ МПа} \leq [\sigma]_o = 8 \text{ МПа}$$

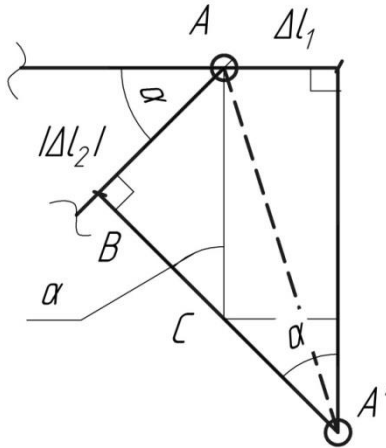
4. Определение перемещений узла А по плану перемещений

$$E_1 F_1 = 2 \cdot 10^8 \cdot 21,2 \cdot 10^{-4} = 42,4 \cdot 10^4 \text{ кН}$$

$$E_2 F_2 = 1 \cdot 10^7 \cdot 441 \cdot 10^{-4} = 441 \cdot 10^3 \text{ кН}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{158,8 \cdot 900}{42,4 \cdot 10^4} = 0,34 \text{ мм}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{-339,4 \cdot 1923}{441 \cdot 10^3} = -1,48 \text{ мм}$$



$$BC = |\Delta l_2| \operatorname{ctg} \alpha = \frac{|\Delta l_2| \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha};$$

$$A'C = \frac{\Delta l_1}{\operatorname{Sin} \alpha};$$

$$A'B = BC + A'C = \frac{|\Delta l_2| \operatorname{Cos} \alpha + \Delta l_1}{\operatorname{Sin} \alpha} =$$

$$= \frac{1,48 \cdot 0,468 + 0,34}{0,884} = 1,17 \text{ мм};$$

$$AA' = \sqrt{(AB)^2 + (A'B)^2} =$$

$$= \sqrt{1,48^2 + 1,17^2} = 1,89 \text{ мм}$$

5. Определение перемещения узла А по формуле Мора

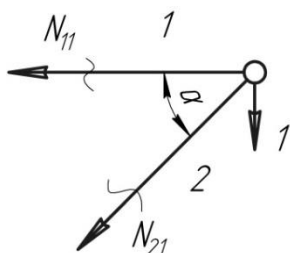
Исходные данные

$$N_{1p} = P \operatorname{ctg} \alpha = 158,8 \text{ кН}$$

$$N_{2p} = -\frac{P}{\sin \alpha} = -339,4 \text{ кН}$$

а) Определение вертикального перемещения узла А

1. Определяем усилия в стержнях от единичной нагрузки



$$N_{11} = \operatorname{ctg} \alpha = 0,529$$

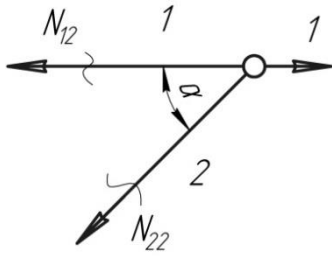
$$N_{21} = -\frac{1}{\sin \alpha} = -1,131$$

2. Определяем вертикальное перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \sum_i^n \frac{N_{ip} N_{i1} l_i}{(EF)_i} = \frac{N_{1p} N_{11} l_1}{E_1 F_1} + \frac{N_{2p} N_{21} l_2}{E_2 F_2} = \\ &= \frac{158,8 \cdot 0,529 \cdot 900}{42,4 \cdot 10^4} + \frac{(-339,4) \cdot (-1,131) \cdot 1923}{441 \cdot 10^3} = \\ &= 0,178 + 1,674 = 1,85 \text{ мм} \end{aligned}$$

б) Определение горизонтального перемещения узла А

1. Определяем усилия в стержнях от единичной нагрузки



$$\sum Y = 0 \quad N_{22} = 0$$

$$\sum X = 0 \quad N_{12} = 1$$

2. Определяем горизонтальное перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \sum_i^n \frac{N_{ip} N_{i2} l_i}{EF} = \frac{N_{1p} N_{12} l_1}{E_1 F_1} + \frac{N_{2p} N_{22} l_2}{E_2 F_2} = \\ &= \frac{158,8 \cdot 1 \cdot 900}{42,4 \cdot 10^4} = 0,34 \text{ мм} \end{aligned}$$

в) Определяем перемещение узла

$$\Delta = \sqrt{\Delta_s^2 + \Delta_x^2} = \sqrt{1,85^2 + 0,34^2} = 1,89 \text{ мм}$$

6.Расчеты на ПК

Исходные данные

Info:расчет кронштейна

ps=

4 2 3 2 2

f=

42.4e4 0

441e3 0

u=

0 1.7

0 0

0.9 1.7

me=

1 1 3

2 2 3

mo=

1 2

2 2

mp=

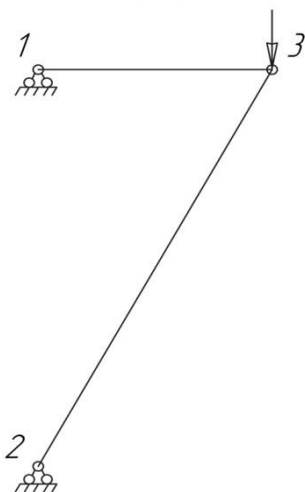
pv=

1 0 0

h=

3 0 -300

Расчетная схема



Эпюра N (кН)

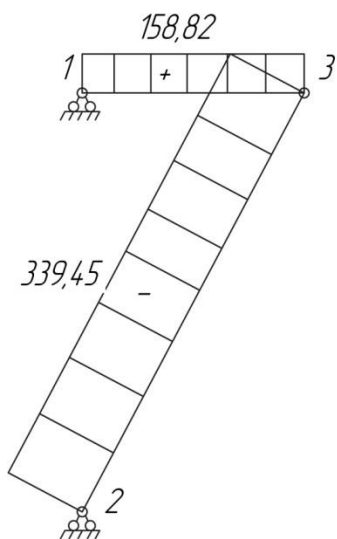
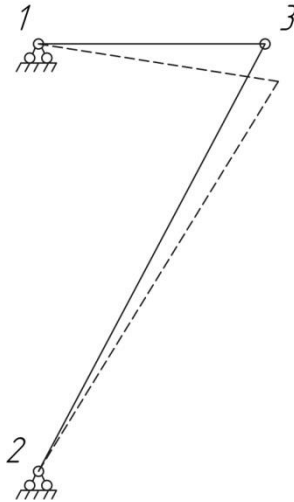


Схема линейных перемещений узлов



РЕЗУЛЬТАТЫ к задаче k.txt

Таблица внутренних усилий

n1	n2	N
1	3	158.82
2	3	-339.45

Таблица перемещений

nu	SX	SY
1	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00
3	3.371E-04	-1.854E-03

Реакции опор:

nu	RX	RY
1	-158.824	0.000
2	158.824	300.000

Сумма реакций опор:

SRX	SRY
-0.000	300.000

Невязки уравнений равновесия:

по X	по Y
------	------

-0.000 0.000

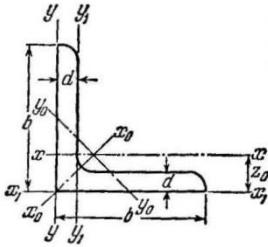
Параметры СЛАНУ: n = 2 k = 2

$$\Delta = \sqrt{\Delta_g^2 + \Delta_c^2} = \sqrt{1,85^2 + 0,34^2} = 1,89 \text{ мм}$$

Расчеты, выполненные разными методами и средствами, совпадают.

Сортамент прокатной стали в соответствии
с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8509-72

Уголки равнополочные



Номер профиля	b d		Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
	мм			x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		
	J _x , см ⁴	i _x , см		J _{x0} max, см ⁴	i _{x0} max, см	J _{y0} min, см ⁴	i _{y0} min, см	J _{x1} , см ⁴	Z ₀ , см			
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,92	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37		
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10

Уголки равнополочные (продолжение)

Номер профиля	b	d	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м длины профиля, кг
				x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁		
				J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x0} max, см ⁴	i _{x0} max, см	J _{y0} min, см ⁴	i _{y0} min, см	J _{x1} , см ⁴	z ₀ , см	
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30		
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4		
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6		
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4		

Литература

1. В.И. Феодосьев, Сопротивление материалов: Москва, Издательство МВТУ им. Н.Э. Баумана, 2016 -543 с.
2. А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин, Сопротивление материалов: Москва: Высш.шк., 2009 – 560 с.

Содержание

Предисловие.....	3
1. Методические указания	
1.1 Основные формулы, понятия и определения.....	4
1.2 Формула Максвелла – Мора.....	11
1.3 Общие уравнения и метод конечных элементов в механике конструкций.....	17
2. Приложения	
Приложение 1	33
Приложение 2	36
Приложение 3.....	47
3. Литература	49