

1. Расчёт статически-неопределимой шарнирно-стержневой системы на внешнее рабочее нагружение

Дано

Шарнирно-стержневая система, состоит из жесткой условно недеформируемой балки и двух стержней – стального и медного (рис. 1.1).

Система нагружена внешней рабочей нагрузкой (сосредоточенной силой и распределенной нагрузкой), подвергается воздействию изменения температуры (повышение температуры после монтажа системы) и имеет монтажную ошибку (стальной стержень при изготовлении был выполнен короче проектного размера).

Параметры системы и характеристики нагружения показаны на рис. 1.1 и сведены в табл. 1.1 и 1.2.

Задание

Подобрать из условия прочности сечения стального и медных стержней при комплексном воздействии трех заданных видов нагружения.

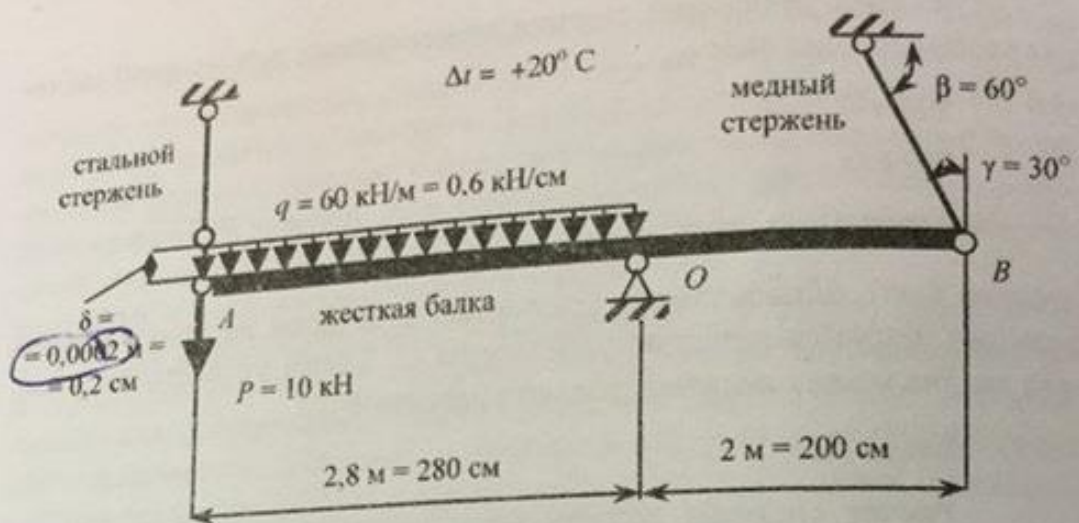


Рис. 1.1. Расчетная схема заданной шарнирно-стержневой системы

Таблица 1.1

Параметры нагружения системы

Данные нагружения	
Рабочая нагрузка: сосредоточенная сила – распределенная нагрузка –	$P = 1 \text{ т} = 10 \text{ кН};$ $q = 6 \text{ т/м} = 60 \text{ кН/м} = 0,6 \text{ кН/см}$
Температурная нагрузка (увеличение внешней температуры после монтажа системы и начала экс- плуатации на величину) –	$\Delta t = +20^\circ \text{ C}$
Монтажная ошибка (ошибка при изготовлении стального стержня – выполнен короче по сравне- нию с проектным размером на величи- ну) –	$\delta = 0,002 \text{ м} = 0,2 \text{ см}$

Таблица 1.2

Характеристики элементов системы
(физические, прочностные и упругие (жесткостные))

Стальной стержень	Медный стержень
1) Физические характеристики	
Длины стержней	
$l_{ст} = 1 \text{ м} = 100 \text{ см}$	$l_{м} = 1,5 \text{ м} = 150 \text{ см}$
2) Прочностные характеристики	
Соотношение между сечениями стального и медного стержней - $F_{ст}/F_{м} = 1/2 = 0,5$	
Коэффициент температурного расширения	
$\alpha_{ст} = 125 \cdot 10^{-7} \text{ 1/градус}$	$\alpha_{м} = 165 \cdot 10^{-7} \text{ 1/градус}$
3) Упругие характеристики (жесткостные)	
Модуль продольной упругости	
$E_{ст} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$	$E_{м} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$
Допускаемое напряжения на растяжение	
$[\sigma]_{ст}^{(+)} = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2$	$[\sigma]_{м}^{(+)} = 84 \text{ МПа} = 8,4 \text{ кН/см}^2$
Допускаемое напряжения на сжатие	
$[\sigma]_{ст}^{(-)} = 120 \text{ МПа} = 12 \text{ кН/см}^2$	$[\sigma]_{м}^{(-)} = 42 \text{ МПа} = 4,2 \text{ кН/см}^2$

Решение

Рассмотрим систему при воздействии только одной рабочей нагрузки, найдем площади сечений стержней и напряжения (рис. 1.2).

стальной стержень:
 $E_{ст} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$;
 $l_{ст} = 100 \text{ см}$

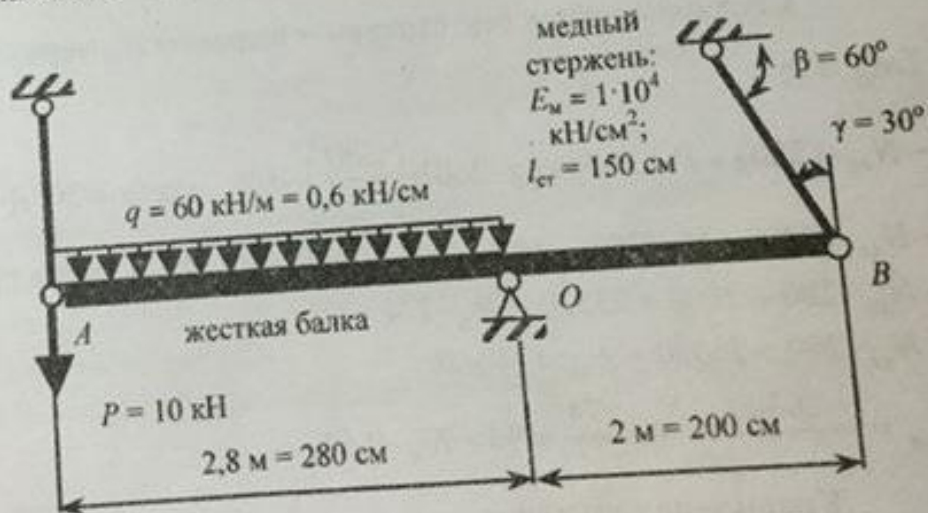


Рис. 1.2. Расчетная схема для случая внешнего нагружения шарнирно-стержневой системы

1.1. Статическая сторона задачи (статика)

Цель этапа: выразить неизвестное внутреннее усилие в стальном стержне $-N_{ст}$, через неизвестное внутреннее усилие в медном стержне $-N_{м}$.
Используя метод сечений, вырежем жесткую балку вместе с частями примыкающих к ней стержней (рис. 1.3).

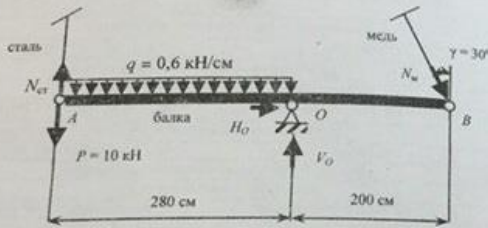


Рис. 1.3. План сил при работе системы на внешнее рабочее нагружение

Составим уравнение статики и выразим $N_{ст}$ через $N_{м}$:

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 0; \\ -N_{ст} \cdot (280) + P \cdot (280) + [q \cdot 280] \cdot \left(\frac{280}{2}\right) - [N_{м} \cdot \cos(\gamma = 30^\circ)] \cdot 200 &= 0; \\ -N_{ст} \cdot (280) + 10 \cdot (280) + [0,6 \cdot 280] \cdot (140) - [N_{м} \cdot 0,87] \cdot 200 &= 0; \\ -N_{ст} \cdot 280 + 2800 + 23520 - N_{м} \cdot 174 &= 0; \\ -N_{ст} \cdot 280 + 26320 - N_{м} \cdot 174 &= 0; \\ N_{ст} &= \frac{26320 - N_{м} \cdot 174}{280} = 94 - N_{м} \cdot 0,62. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнение статики -

$$N_{ст} = 94 - N_{м} \cdot 0,62.$$

8

1.2. Геометрическая сторона задачи (геометрия)

Цель этапа: выразить неизвестную деформацию стального стержня $-\Delta l_{ст}$ через неизвестную деформацию медного стержня $-\Delta l_{м}$.

Рассмотрим перемещения характерных точек системы и деформации стержней (рис. 1.4).

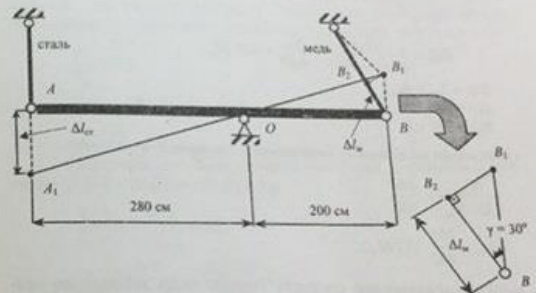


Рис. 1.4. План перемещений при работе системы на внешнее рабочее нагружение

Составим уравнение совместности деформаций.

Для этого:

- рассмотрим подобие двух треугольников $-\Delta AA_1O$ подобен ΔBB_1O ;
- составив из сторон треугольников необходимую пропорцию - $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AO}{BO}$;

9

- выразим элементы пропорции через деформации стержней и размеры сторон треугольников:

$$\begin{aligned} AA_1 &= \Delta l_{ст}; \\ BB_1 &= ? \\ \cos(\gamma = 30^\circ) &= \frac{BB_1}{BB_1} = \frac{\Delta l_{м}}{BB_1}; \\ \Downarrow \\ BB_1 &= \frac{\Delta l_{м}}{\cos(\gamma = 30^\circ)} = \frac{\Delta l_{м}}{0,87} = 1,15 \cdot \Delta l_{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BB_1 &= 1,15 \cdot \Delta l_{м}; \\ AO &= 280 \text{ см}; \\ BO &= 200 \text{ см}; \end{aligned}$$

- подставим полученные выражения и значения в пропорцию:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l_{ст}}{1,15 \cdot \Delta l_{м}} &= \frac{280}{200}; \\ \Delta l_{ст} &= \frac{280}{200} \cdot 1,15 \Delta l_{м}; \end{aligned}$$

- выразим деформацию стального стержня через деформацию медного и получим

$$\Delta l_{ст} = \Delta l_{м} \cdot 1,61. \quad (1.2)$$

1.3. Физическая сторона задачи (физика)

Цель этапа: преобразование уравнения совместности деформаций в уравнение взаимоотношения внутренних усилий (продольных сил), действующих в стальном и медном стержнях, при помощи закона Гука II вид.

Закон Гука II вида выглядит -

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

10

Подставим закон Гука в уравнение совместности деформаций (1.2) и получим -

$$\frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} F_{ст}} = \frac{N_{м} l_{м}}{E_{м} F_{м}} \cdot 1,61. \quad (1.3)$$

В данном уравнении все элементы известны, кроме внутренних усилий $-N_{ст}$ и $N_{м}$ и площадей сечений стержней $-F_{ст}$ и $F_{м}$. Используем для уменьшения числа неизвестных пропорцию между площадями в соответствии с заданными значениями табл. 1.1 и 1.2:

$$\begin{aligned} \frac{F_{ст}}{F_{м}} &= 0,5; \\ \Downarrow \\ F_{ст} &= 0,5 \cdot F_{м}. \end{aligned}$$

Подставим числовые значения известных элементов в уравнение (1.3) в размерностях кН и см:

$$\begin{aligned} \frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} F_{ст}} &= \frac{N_{м} l_{м}}{E_{м} F_{м}} \cdot 1,61; \\ \frac{N_{ст} \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot F_{м}} &= \frac{N_{м} \cdot 150}{1 \cdot 10^4 \cdot F_{м}} \cdot 1,61. \end{aligned}$$

Сократим площадь сечения медного стержня, подставленную в знаменатели обеих частей уравнения, и произведем вычисления -

$$\begin{aligned} \frac{N_{ст} \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot F_{м}} &= \frac{N_{м} \cdot 150}{1 \cdot 10^4 \cdot F_{м}} \cdot 1,61; \\ \frac{N_{ст} \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,5} &= \frac{N_{м} \cdot 150}{1 \cdot 10^4} \cdot 1,61; \\ N_{ст} \cdot 0,01 &= N_{м} \cdot 0,024. \end{aligned}$$

Выразим усилие в стальном стержне через усилие в медном -

$$N_{ст} = N_{м} \cdot 2,41. \quad (1.4)$$

11

физическая сторона

1.4. Совместное решение трех сторон задачи (суть)

Цель этапа: найти неизвестные усилия в стальном и медном стержнях $N_{ст}$ и $N_{м}$ решая совместно три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

Объединим уравнения (1.2) и (1.4) в систему уравнений и найдем из нее внутренние усилия, действующие в стержнях:

$$\begin{cases} N_{ст} = 94 - N_{м} \cdot 0,62 \\ N_{ст} = N_{м} \cdot 2,41 \end{cases}$$

⇓

$$94 - N_{м} \cdot 0,62 = N_{м} \cdot 2,41;$$

$$-N_{м} \cdot 0,62 - N_{м} \cdot 2,41 = -94;$$

$$N_{м} \cdot 3,03 = 94;$$

$$N_{м} = \frac{94}{3,03} = +31,02 \text{ кН};$$

$$N_{ст} = 31,02 \cdot 2,41 = +74,76 \text{ кН}.$$

Знак плюс перед значениями усилий показывает, что их направления на плане сил (рис. 1.3) выбраны верно. Это знаки теоретической механики.

Однако, при подборе сечений необходимо учитывать особенности работы материала и работы стержней при растяжении и сжатии, что отражено в величинах допускаемых напряжений (табл. 1.2).

В связи с этим используем для усилий правила знаков сопротивления материалов: растяжение – плюс; сжатие – минус. Определим эти знаки из рис. 1.3, и 1.4. Из них видно, что стальной стержень удлиняется (растягивается), а медный сокращается (сжимается).

В результате получим усилия в стержнях с учетом их знака в соответствии с правилами знаков сопротивления материалов:

$$N_{ст} = 74,76 \text{ кН (+)} - \text{растяжение}; \quad (1.5)$$

$$N_{м} = 31,02 \text{ кН (-)} - \text{сжатие}.$$

12

в) Подберем площадь поперечного сечения стержней из соотношения между их площадями сечений и подобранных выше из условия прочности сечений:

- стального стержня –

$$\frac{F_{ст}}{F_{м}} = 0,5;$$

⇓

$$F_{ст} = 0,5 \cdot F_{м} = 0,5 \cdot 7,38 = 3,69 \text{ см}^2 = 3,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

- медного стержня –

$$\frac{F_{ст}}{F_{м}} = 0,5;$$

⇓

$$F_{м} = \frac{F_{ст}}{0,5} = \frac{4,67}{0,5} = 9,34 \text{ см}^2 = 9,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

г) Выберем из четырех подобранных величин площадей сечений стержней соответствующие нормальной работе системы:

$$F_{ст} = 4,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ и } F_{м} = 7,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$F_{ст} = 3,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ и } F_{м} = 9,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

д) Принимаем к дальнейшему расчету наибольшие значения площадей:

$$F_{ст} = 4,67 \text{ см}^2 = 4,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad (1.6)$$

$$F_{м} = 9,34 \text{ см}^2 = 9,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

д) Определим рабочие напряжения, возникающие в стержнях, соответствующие найденным внутренним усилиям (1.5) подобранным сечениям (1.6) и с учетом знака сопротивления материалов:

14

1.5. Расчет на прочность (сопротивление материалов)

Цель этапа: подбор поперечных сечений стержней и определение напряжений в стержнях при воздействии внешнего рабочего нагружения.

Рабочие формулы:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] - \text{условие прочности при растяжении и сжатии};$$

$$F_{ст} \geq \frac{N}{[\sigma]} - \text{формула для подбора сечения стержней при растяжении и сжатии, вытекающая из условия прочности}.$$

а) Выберем из таблицы задания (табл. 1.2) допускаемые напряжения для стержней с учетом вида деформирования (с учетом знака сопротивления материалов):

- стальной стержень растягивается (знак плюс) –

$$[\sigma]_{ст}^{(+)} = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2;$$

- медный стержень сжимается (знак минус) –

$$[\sigma]_{м}^{(-)} = 42 \text{ МПа} = 4,2 \text{ кН/см}^2.$$

б) Подберем из условия прочности площади поперечного сечения стержней:

- стального стержня –

$$F_{ст} \geq \frac{|N_{ст}|}{[\sigma]_{ст}^{(+)}} = \frac{74,76}{16} = 4,67 \text{ см}^2 = 4,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

- медного стержня –

$$F_{м} \geq \frac{|N_{м}|}{[\sigma]_{м}^{(-)}} = \frac{31,02}{4,2} = 7,38 \text{ см}^2 = 7,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

13

$$\sigma_{ст} = \frac{N_{ст}}{F_{ст}} = \frac{(+74,76)}{4,67} = 16 \text{ кН/см}^2 = 160 \text{ МПа (+)};$$

$$\sigma_{м} = \frac{N_{м}}{F_{м}} = \frac{(-31,02)}{9,34} = 3,32 \text{ кН/см}^2 = 33,2 \text{ МПа (-)}.$$

е) Запишем для дальнейших расчетов рабочие напряжения (напряжения в стержнях возникшие от действия внешнего рабочего нагружения):

$$\begin{aligned} \sigma_{ст}^* &= 160 \text{ МПа (+)}; \\ \sigma_{м}^* &= 33,2 \text{ МПа (-)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Расчёт статически-неопределимой шарнирно-стержневой системы на температурное нагружение

Рассмотрим систему только при воздействии изменения температуры и найдем возникающие при этом напряжения (рис. 2.1).

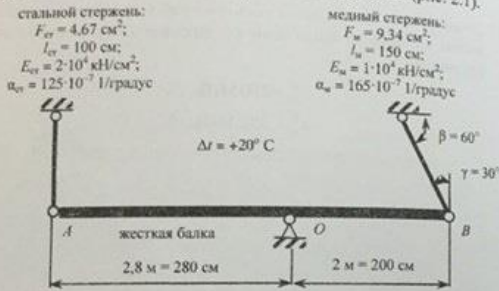


Рис. 2.1. Расчетная схема для случая изменения температуры шарнирно-стержневой системы

При изменении температуры окружающей среды в статически определимых системах не возникает дополнительных напряжений, а в статически-неопределимых – возникают, и эти напряжения могут быть весьма существенными, чтобы влиять на прочность конструкции.

В данном случае температура окружающей среды увеличилась после монтажа системы на 20°. Определим возникшие в стержнях напряжения. При этом будем их рассчитывать независимо от действия рабочих нагрузок и влияния монтажной ошибки.

При нагреве стержней они будут стремиться к удлинению, но в данной ситуации они не смогут реализовать это изменение, так как будут противодействовать друг другу. В результате фактически стержни будут находиться в сжатом состоянии, и в них будут возникать сжимающие напряжения. Необходимо отметить, что знаки напряжений в различных заданиях в этой ситуации могут меняться. Это зависит от расчетной схемы задания, что необходимо учитывать при решении.

2.1. Статика

Цель этапа: выразить неизвестное внутреннее усилие в стальном стержне – $N_{ст}$, через неизвестное внутреннее усилие в медном стержне – $N_{м}$.

Используя метод сечений, вырежем жесткую балку вместе с частями примыкающих к ней стержней (рис. 2.2).

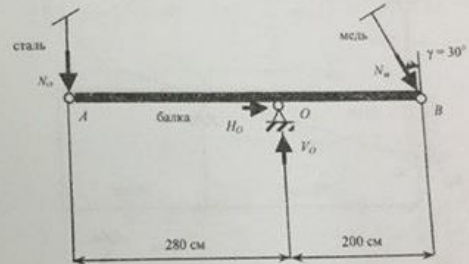


Рис. 2.2. План сил для случая изменения температуры шарнирно-стержневой системы

Составим уравнение статики и выразим $N_{ст}$ через $N_{м}$:

$$\begin{aligned} \Sigma m_O &= 0; \\ +N_{ст} \cdot (280) - [N_{м} \cdot \cos(\gamma = 30^\circ)] \cdot 200 &= 0; \\ +N_{ст} \cdot 280 - N_{м} \cdot 0,87 \cdot 200 &= 0; \\ +N_{ст} \cdot 280 - N_{м} \cdot 174 &= 0; \end{aligned}$$

$$N_{ст} = \frac{+N_{м} \cdot 174}{+280} = N_{м} \cdot 0,62.$$

$$\text{Уравнение статики} - N_{ст} = N_{м} \cdot 0,62. \quad (2.1)$$

2.2. Геометрия

Цель этапа: выразить неизвестную деформацию стального стержня – $\Delta L_{ст}$ через неизвестную деформацию медного стержня – $\Delta L_{м}$.

а) Рассмотрим перемещения характерных точек системы и деформации стержней – интерактивный вариант (рис. 2.3 и рис. 2.4).

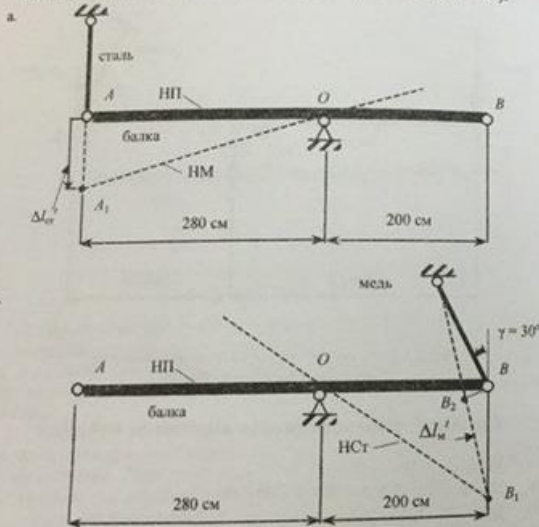
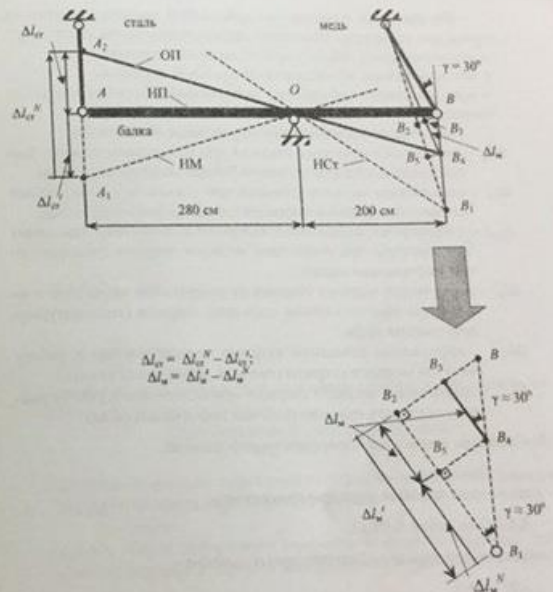


Рис. 2.3. План сил для случая изменения температуры шарнирно-стержневой системы:

- а – вариант изменения системы при отсутствии медного стержня;
- б – вариант изменения системы при отсутствии стального стержня;
- НП – начальное положение системы;
- НМ – исключен медный стержень (нет меди);
- НСт – исключен стальной стержень (нет стали);



$$\begin{aligned} \Delta L_{ст} &= \Delta L_{ст}^N - \Delta L_{ст}^M; \\ \Delta L_{м} &= \Delta L_{м}^N - \Delta L_{м}^M. \end{aligned}$$

Рис. 2.4. План сил для случая изменения температуры шарнирно-стержневой системы – полная схема:
НП – начальное положение системы;
НМ – исключен медный стержень (нет меди);
НСт – исключен стальной стержень (нет стали);
ОП – общее положение системы (совместное присутствие стали и меди)

На рисунках показано моделирование процесса изменения системы при ее нагреве. Изменения представлены последовательно:

- в предположении, что отсутствует медный стержень;
- в предположении, что отсутствует стальной стержень;
- в предположении совместного присутствия стального и медного стержня.

При этом на рисунке имеются условные обозначения:

- $\Delta l_{ст}$ – деформация стального стержня при совместном присутствии стального и медного стержней (общая деформация стали);
- $\Delta l_{м}$ – деформация медного стержня при совместном присутствии стального и медного стержней (общая деформация меди);
- $\Delta l_{ст}^t$ – деформация стального стержня от воздействия изменения температуры при отсутствии медного стержня (температурная деформация меди);
- $\Delta l_{м}^t$ – деформация медного стержня от воздействия изменения температуры при отсутствии стального стержня (температурная деформация меди);
- $\Delta l_{ст}^N$ – деформация стального стержня при включении в работу системы медного стержня (силовая деформация стали);
- $\Delta l_{м}^N$ – деформация медного стержня при включении в работу системы стального стержня (силовая деформация меди).

б) Составим уравнение совместности деформаций.

Для этого:

- рассмотрим подобие двух треугольников –

$$\Delta AA_2O \text{ подобен } \Delta BB_2O;$$

- создадим пропорцию из сторон треугольников –

$$\frac{AA_2}{BB_2} = \frac{AO}{BO};$$

- выразим элементы пропорции через деформации стержней и размеры треугольников:

$$\begin{aligned} AA_2 &= \Delta l_{ст}; \\ BB_2 &= ? \end{aligned}$$

$$\cos(\gamma = 30^\circ) = \frac{BB_2}{BB_1} = \frac{\Delta l_{м}}{BB_1};$$

↓

$$BB_2 = \frac{\Delta l_{м}}{\cos(\gamma = 30^\circ)} = \frac{\Delta l_{м}}{0,87} = 1,15 \cdot \Delta l_{м};$$

↓

$$BB_2 = 1,15 \cdot \Delta l_{м};$$

$$AO = 280 \text{ см};$$

$$BO = 200 \text{ см};$$

- подставим полученные выражения и значения в пропорцию –

$$\frac{\Delta l_{ст}}{1,15 \cdot \Delta l_{м}} = \frac{280}{200};$$

↓

$$\Delta l_{ст} = \frac{280}{200} \cdot 1,15 \cdot \Delta l_{м};$$

- выразим общую деформацию стального стержня через общую деформацию медного и получим –

$$\Delta l_{ст} = \Delta l_{м} \cdot 1,61. \quad (2.2)$$

в) Составим уравнение совместности деформаций с учетом температурных и силовых деформаций стержней.

Для этого:

- выразим общие деформации стального и медного стержней через их температурные и силовые деформации (см. рис. 2.3):

$$\Delta l_{ст} = \Delta l_{ст}^t + \Delta l_{ст}^N;$$

$$\Delta l_{м} = \Delta l_{м}^t + \Delta l_{м}^N;$$

- подставим полученные выражения в уравнение (2.2) и получим уравнение совместности деформаций при температурных изменениях окружающей среды:

$$\Delta l_{ст} = \Delta l_{ст}^t + \Delta l_{ст}^N = (\Delta l_{ст}^t + \Delta l_{м}^N) \cdot 1,61. \quad (2.3)$$

21

2.3. Физика

Цель этапа: преобразование уравнения совместности деформаций в уравнение взаимоотношения внутренних продольных сил, действующих в стальном и медном стержнях, при помощи закона Гука II вид и температурного закона.

Закон Гука II вид выглядит –

$$\Delta l^N = \frac{Nl}{EF}.$$

Температурный закон выглядит –

$$\Delta l^t = \alpha \cdot \Delta t \cdot l.$$

Подставим закон Гука и температурный закон в уравнение совместности деформаций (2.3) и получим:

$$\Delta l_{ст}^N - \Delta l_{ст}^t = (\Delta l_{м}^t + \Delta l_{м}^N) \cdot 1,61;$$

$$\frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} F_{ст}} - \alpha_{ст} \cdot \Delta t \cdot l_{ст} = \left(\alpha_{м} \cdot \Delta t \cdot l_{м} + \frac{N_{м} l_{м}}{E_{м} F_{м}} \right) \cdot 1,61. \quad (2.4)$$

В данном уравнении все элементы известны, кроме внутренних усилий: $N_{ст}$ и $N_{м}$. Подставим числовые значения элементов в уравнение (2.4) с размерностями, кН·см и 1/град:

$$\begin{aligned} \frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} F_{ст}} - \alpha_{ст} \cdot \Delta t \cdot l_{ст} &= \left(\alpha_{м} \cdot \Delta t \cdot l_{м} + \frac{N_{м} l_{м}}{E_{м} F_{м}} \right) \cdot 1,61; \\ \frac{N_{ст} \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 4,67} - 125 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 100 &= \left(165 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 150 + \frac{N_{м} \cdot 150}{1 \cdot 10^4 \cdot 9,34} \right) \cdot 1,61. \end{aligned}$$

Выразим усилие в стальном стержне через усилие в медном –

$$N_{ст} = 98,13 - N_{м} \cdot 2,38. \quad (2.5)$$

22

2.4. Силтез

Цель этапа: найти неизвестные усилия в стальном и медном стержнях решая совместно три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

Объединим уравнение (2.1) и (2.5) в систему уравнений и найдем из нее внутренние усилия, действующие в стержнях:

$$\begin{cases} N_{ст} = N_{м} \cdot 0,62 \\ N_{ст} = 98,13 - N_{м} \cdot 2,38 \end{cases}$$

↓

$$N_{м} \cdot 0,62 = 98,13 - N_{м} \cdot 2,38;$$

$$N_{м} \cdot 0,62 + N_{м} \cdot 2,38 = 98,13;$$

$$N_{м} \cdot 3 = 98,13;$$

$$N_{м} = \frac{98,13}{3} = +32,71 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} N_{ст} &= N_{м} \cdot 0,62 = \\ &= 32,71 \cdot 0,62 = +20,28 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знаки плюс перед значениями усилий является знаками теоретической механики и они показывают, что их направления на плане сил (см. рис. 2.2) выбраны верно.

Применим для найденных усилий правила знаков сопротивления материалов. Определим эти знаки из рис. 2.2 и 2.3. Из рисунков видно, что стальной и медный стержни сокращаются (сжимаются), что согласно правилам знаков сопротивления материалов дает усилиям знак минус.

В результате получим усилия в стержнях с учетом их знака в соответствии с правилами знаков сопротивления материалов:

$$N_{ст} = 20,28 \text{ кН (+)} - \text{растяжение}; \quad (2.6)$$

$$N_{м} = 32,71 \text{ кН (-)} - \text{сжатие}.$$

23

2.5. Сопротивление материалов

Цель этапа: определение напряжений в стержнях при температурном воздействии.

Рабочая формула –

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \text{ – условие прочности при растяжении и сжатии.}$$

Определим рабочие напряжения, возникающие в стержнях, соответствующие найденным внутренним усилиям (2.6), подобранным ранее сечениям (1.6) и с учетом знака сопротивления материалов для усилий и напряжений:

$$\sigma_{ст} = \frac{(N_{ст})}{F_{ст}} = \frac{(-20,28)}{4,67} = 4,34 \text{ кН/см}^2 = 43,4 \text{ МПа (-)};$$

$$\sigma_{м} = \frac{(N_{м})}{F_{м}} = \frac{(-32,71)}{9,34} = 3,5 \text{ кН/см}^2 = 35 \text{ МПа (-)}.$$

е) Запишем для дальнейших расчетов температурные напряжения (напряжения в стержнях возникшие от изменения температуры окружающей среды):

$$\begin{aligned} \sigma'_{ст} &= 43,4 \text{ МПа (-)}; \\ \sigma'_{м} &= 35 \text{ МПа (-)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Расчёт статически-неопределимой шарнирно-стержневой системы на нагрузки от монтажной ошибки

Рассмотрим систему только при наличии монтажной ошибки (ошибка при изготовлении стального стержня) и найдем возникающие при этом напряжения (рис. 3.1).

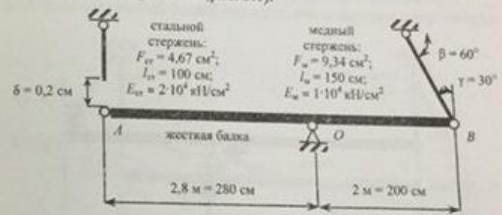


Рис. 3.1. Расчетная схема для случая наличия монтажной ошибки при изготовлении шарнирно-стержневой системы

При изготовлении стального стержня была допущена ошибка. Он был сделан короче на незначительную величину – δ . В статически определимых системах от ошибок такого рода не возникает дополнительных напряжений, а в статически-неопределимых – возникают, и эти напряжения могут быть весьма существенными, чтобы влиять на прочность конструкции.

В данном случае ошибка равна $\delta = 0,2$ см, определим возникшие при этом в стержнях напряжения. Будем их рассчитывать независимо от действия рабочих нагрузок и влияния изменения температуры. При сборке системы, стержни будут необходимо механически удлинить, однако, оставаясь в рамках упругих деформаций, т. е. без разрушения стержней и создания у них пластических деформаций. После сборки системы стержни будут находиться в растянутом состоянии, и них будут возникать растягивающие напряжения. Необходимо отметить, что знаки напряжений в различных заданиях в этой ситуации могут меняться. Это зависит от расчетной схемы задания, что необходимо учитывать при решении.

25

3.1. Статика

Цель этапа: выразить неизвестное внутреннее усилие в стальном стержне – $N_{ст}$, через неизвестное внутреннее усилие в медном стержне – $N_{м}$.

Используя метод сечений, вырежем жесткую балку вместе с частями примыкающих к ней стержней (рис. 3.2).

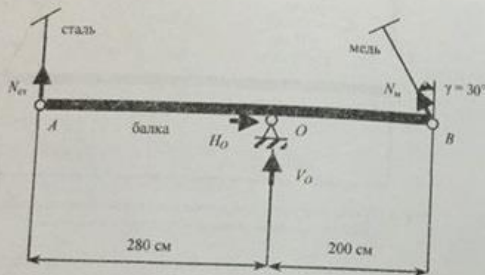


Рис. 3.2. План сил работы системы при наличии монтажной ошибки

Составим уравнение статики и выразим $N_{ст}$ через $N_{м}$:

$$\begin{aligned} \Sigma M_O &= 0; \\ -N_{ст} \cdot (280) + [N_{м} \cdot \cos(\gamma = 30^\circ)] \cdot 200 &= 0; \\ -N_{ст} \cdot 280 + N_{м} \cdot 0,87 \cdot 200 &= 0; \\ -N_{ст} \cdot 280 + N_{м} \cdot 174 &= 0; \\ N_{ст} &= \frac{-N_{м} \cdot 174}{-280} = N_{м} \cdot 0,62. \end{aligned}$$

Уравнение статики –

$$N_{ст} = N_{м} \cdot 0,62. \quad (3.1)$$

26

3.2. Геометрия

Целью этапа: выразить неизвестную деформацию стального стержня – $\Delta L_{ст}$, через неизвестную деформацию медного стержня – $\Delta L_{м}$.

Рассмотрим перемещения характерных точек системы и деформации стержней (рис. 3.3).

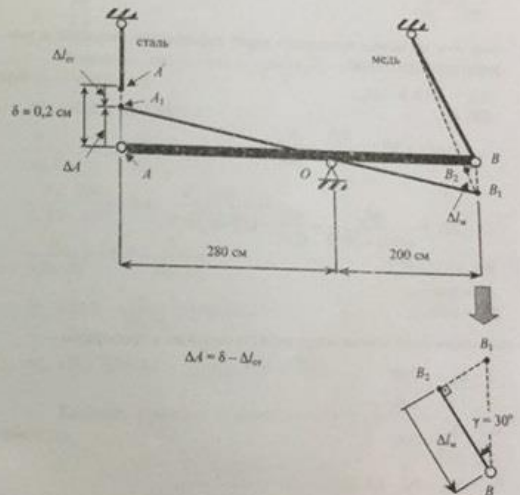


Рис. 3.3. План перемещений при наличии монтажной ошибки в шарнирно-стержневой системе

27

Составим уравнение совместности деформаций.

Для этого:

- рассмотрим подобие двух треугольников –

$$\triangle AA_1O \text{ подобен } \triangle BB_1O;$$

- создадим пропорцию из сторон треугольников –

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AO}{BO};$$

- выразим элементы пропорции через деформации стержней и размеры треугольников:

$$AA_1 = \Delta A = \delta - \Delta l_{ст};$$

$$BB_1 = ?$$

$$\cos(\gamma = 30^\circ) = \frac{BB_2}{BB_1} = \frac{\Delta l_m}{BB_1};$$

⇓

$$BB_1 = \frac{\Delta l_m}{\cos(\gamma = 30^\circ)} = \frac{\Delta l_m}{0,87} = 1,15 \cdot \Delta l_m;$$

$$BB_1 = 1,15 \cdot \Delta l_m;$$

$$AO = 280 \text{ см};$$

$$BO = 200 \text{ см};$$

- подставим полученные выражения и значения в пропорцию –

$$\frac{\delta - \Delta l_{ст}}{1,15 \cdot \Delta l_m} = \frac{280}{200};$$

$$\frac{0,2 - \Delta l_{ст}}{1,15 \cdot \Delta l_m} = 1,4;$$

$$0,2 - \Delta l_{ст} = \Delta l_m \cdot 1,4 \cdot 1,15;$$

$$0,2 - \Delta l_{ст} = \Delta l_m \cdot 1,61;$$

- выразим деформацию стального стержня через деформацию медного и получим уравнение совместности деформаций –

$$\Delta l_{ст} = 0,2 - \Delta l_m \cdot 1,61. \quad (3.2)$$

28

3.3. Физика

Цель этапа: преобразование уравнения совместности деформаций в уравнение взаимоотношения внутренних продольных сил, действующих в стальном и медном стержнях, при использовании закона Гука II вид.

Закон Гука II вид выглядит –

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}.$$

Подставим закон Гука в уравнение совместности деформаций (3.2) и получим:

$$\Delta l_{ст} = 0,2 - \Delta l_m \cdot 1,61;$$

$$\frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} F_{ст}} = 0,2 - \frac{N_m l_m}{E_m F_m} \cdot 1,61;$$

$$\frac{N_{ст} \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 4,67} = 0,2 - \frac{N_m \cdot 150}{1 \cdot 10^4 \cdot 9,34} \cdot 1,61;$$

$$\frac{N_{ст}}{9,34 \cdot 10^2} = 0,2 - \frac{N_m}{386,75};$$

$$N_{ст} = \left(0,2 - \frac{N_m}{386,75} \right) \cdot 9,34 \cdot 10^2;$$

$$N_{ст} = 0,2 \cdot 9,34 \cdot 10^2 - \frac{N_m}{386,75} \cdot 9,34 \cdot 10^2.$$

Выразим усилие в стальном стержне через усилие в медном –

$$N_{ст} = 186,8 - N_m \cdot 2,41. \quad (3.3)$$

29

3.4. Синтез

Цель этапа: найти неизвестные усилия в стальном и медном стержнях решая совместно три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

Объединим уравнение (3.2) и (3.3) в систему уравнений и найдем из нее внутренние усилия, действующие в стержнях:

$$\begin{cases} N_{ст} = N_m \cdot 0,62 \\ N_{ст} = 186,8 - N_m \cdot 2,41 \end{cases}$$

⇓

$$N_m \cdot 0,62 = 186,8 - N_m \cdot 2,41;$$

$$N_m \cdot 0,62 + N_m \cdot 2,41 = 186,8;$$

$$N_m \cdot 3,03 = 186,8;$$

$$N_m = \frac{186,8}{3,03} = +61,65 \text{ кН};$$

$$N_{ст} = N_m \cdot 0,62 =$$

$$= 61,65 \cdot 0,62 = +38,22 \text{ кН}.$$

Знак плюс перед значениями усилий показывает, что их направления на плане сил (см. рис. 3.4) выбраны верно. Это знаки теоретической механики.

Используем для усилий правила знаков сопротивления материалов: растяжение – плюс; сжатие – минус. Определим эти знаки из рис. 3.2 и 3.3. Из них видно, что стальной и медный стержни удлиняются (растягиваются).

В результате получим усилия в стержнях с учетом их знака в соответствии с правилами знаков сопротивления материалов:

$$N_{ст} = 38,22 \text{ кН (+)} - \text{растяжение}; \quad (3.4)$$

$$N_m = 61,65 \text{ кН (+)} - \text{растяжение}.$$

3.5. Сопротивление материалов

Цель этапа: определение напряжений в стержнях при наличии монтажной ошибки.

Рабочая формула –

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] - \text{условие прочности при растяжении и сжатии}.$$

Определим монтажные напряжения, возникающие в стержнях, соответствующие найденным внутренним усилиям (3.4), подобранным сечениям (1.6) и с учетом правила знаков сопротивления материалов:

$$\sigma_{ст} = \frac{(N_{ст})}{F_{ст}} = \frac{(+38,22)}{4,67} = 8,18 \text{ кН/см}^2 = 81,8 \text{ МПа (+)};$$

$$\sigma_m = \frac{(N_m)}{F_m} = \frac{(+61,65)}{9,34} = 6,6 \text{ кН/см}^2 = 66 \text{ МПа (+)}.$$

Запишем для дальнейших расчетов монтажные напряжения (напряжения в стержнях, возникшие в результате монтажной ошибки):

$$\sigma_{ст}^{\Delta} = 81,8 \text{ МПа (+)}; \quad (3.5)$$

$$\sigma_m^{\Delta} = 66 \text{ МПа (+)}.$$

4. Проверка прочности подобранных сечений при совместном действии всех видов нагрузки

1. Определим общие напряжения от совместного действия всех видов нагружения:
 - для стального стержня – $\sigma_{ст} = (\sigma_{ст}^a) + (\sigma_{ст}^b) + (\sigma_{ст}^c) = (+160) + (-43,4) + (+81,8) = 198,4 \text{ МПа (+)}$
 - для медного стержня – $\sigma_{м} = (\sigma_{м}^a) + (\sigma_{м}^b) + (\sigma_{м}^c) = (-33,2) + (-35) + (+66) = 2,2 \text{ МПа (-)}$
2. Проверим прочность подобранных сечений стержней на совместное действие нагрузок с учетом знака сопротивления материалов:
 - стальной стержень – $\sigma_{ст} = 198,4 \text{ МПа (+)} > [\sigma]_{ст}^{(+)} = 160 \text{ МПа}$;
 $\sigma_{ст} = 198,4 \text{ МПа (+)} > ([\sigma]_{ст}^{(+)} + 5\%) = 168 \text{ МПа}$;
вывод: условие прочности для стального стержня не выполняется;
 - медный стержень – $\sigma_{м} = 2,2 \text{ МПа (-)} < [\sigma]_{м}^{(-)} = 42 \text{ МПа}$;
вывод: условие прочности для медного стержня выполняется.

Общий вывод: в связи с невыполнением условия прочности для стального стержня требуется подбор новых сечений как стального, так и медного стержней.

3. Подберем новые сечения стержней исходя из требований условия прочности:

существует - $F_{ст} = 4,67 \text{ см}^2 \rightarrow \sigma_{ст} = 198,4 \text{ МПа}$;

требуется - $F_{ст} = x \text{ см}^2 \rightarrow \sigma_{ст} = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Составим обратную пропорцию и найдем новую площадь сечения стального стержня:

$$\frac{x}{F_{ст}} = \frac{\sigma_{ст}}{[\sigma]} \Rightarrow x = \frac{\sigma_{ст}}{[\sigma]} \cdot F_{ст} = \frac{198,4}{160} \cdot 4,67 = 5,79 \text{ см}^2.$$

Примем площадь стального стержня – $F_{ст} = 6 \text{ см}^2$;

Примем площадь медного стержня – $F_{м} = F_{ст}/0,5 = 6/0,5 = 12 \text{ см}^2$.

Окончательно принимаем: $F_{ст} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;
 $F_{м} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

5. Задание к курсовой работе, к 1 части

Требуется выполнить в расчетно-графической работе

1. Подобрать сечения стального и медного стержней, т.е. определить площади поперечных сечений стержней (стального и медного – $F_{ст}$, $F_{м}$) и определить напряжения в стержнях (в стальном – $\sigma_{ст}^a$ и в медном – $\sigma_{м}^a$) от действия внешних нагрузок – P и q (рабочие напряжения).
2. Определить дополнительные напряжения в стержнях ($\sigma_{ст}^b$, $\sigma_{м}^b$) от изменения (увеличения) температуры на $\Delta t = +20^\circ \text{ C}$ (температурные напряжения).
3. Определить дополнительные напряжения в стержнях ($\sigma_{ст}^c$, $\sigma_{м}^c$) от монтажной ошибки (ошибки при изготовлении стального стержня: выполнил короче проектного на величину – $\delta = 0,2 \text{ см}$ (монтажные напряжения)).
4. Определить общие напряжения в стержнях от трех заданных воздействий ($\sigma_{ст}$, $\sigma_{м}$): действия внешней нагрузки, изменения температуры и монтажной ошибки; проверить правильность подобранных сечений по условию прочности; в случае не выполнения условия прочности подобрать новые сечения его удовлетворяющие.
5. Данные для выполнения курсовой работы взять в соответствии с выданным шифром задания из табл. 5.1, табл. 5.2 и табл. 5.3.

Таблица 5.1

Общие данные для выполнения курсовой работы

Материал стержня	Допускаемые напряжения на растяжение, МПа	Допускаемые напряжения на сжатие, МПа	Модуль продольной упругости, МПа	Коэффициент линейного расширения материала, 1/градус
сталь	$[\sigma]_{ст}^{(+)} = 160$	$[\sigma]_{ст}^{(-)} = 120$	$E_{ст} = 2 \cdot 10^5$	$\alpha_{ст} = 125 \cdot 10^{-7}$
медь	$[\sigma]_{м}^{(+)} = 84$	$[\sigma]_{м}^{(-)} = 42$	$E_{м} = 1 \cdot 10^5$	$\alpha_{м} = 165 \cdot 10^{-7}$

Таблица 5.2

Индивидуальные данные для выполнения курсовой работы

Шифр задания	a , м	b , м	$l_{ст}$, м	$l_{м}$, м	P , кН	q , кН/м	Соотношение между площадями сечений стержней $F_{ст}/F_{м}$	
A, B, C	1	1,0	2,8	1,0	1,9	10	100	1/1
	2	1,2	2,6	1,1	1,8	20	90	1/2
	3	1,4	2,4	1,2	1,7	30	80	2/1
	4	1,6	2,2	1,3	1,6	40	70	1/3
	5	1,8	2,0	1,4	1,5	50	60	3/1
	6	2,0	1,8	1,5	1,4	60	50	2/3
	7	2,2	1,6	1,6	1,3	70	40	3/2
	8	2,4	1,4	1,7	1,2	80	30	3/4
	9	2,6	1,2	1,8	1,1	90	20	4/3
	0	2,8	1,0	1,9	1,0	100	10	3/5

Расчетные схемы для выполнения РГР

Таблица 5.3

Статически-неопределимые шарнирно-стержневые системы			
	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			

Статически-неопределимые шарнирно-стержневые системы			
	A	B	C
6			
7			
8			
9			
0			