

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

**МЕХАНИКА.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

Лабораторный практикум



Санкт-Петербург

2014

УДК 53
ББК 22.3
М55

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *Н. Р. Галль*
доктор физико-математических наук *В. Г. Фарафонов*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве лабораторного практикума

Авторы: И. И. Коваленко, Н. П. Лавровская, Н. Н. Литвинова, Г. Л. Плехоткина, Д. Е. Погарев, В. К. Прилипка, Ю. Н. Царев, Б. Ф. Шифрин

М55 **Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика:**
лабораторный практикум / под ред. И. И. Коваленко. –
СПб.: ГУАП, 2014. – 132 с.

Приведены порядок проведения лабораторных работ, правила оформления отчета, сведения из теории погрешностей, правила математической и графической обработки результатов измерений. Даны описания двенадцати лабораторных работ, которые могут быть предложены студентам. В описании каждой работы содержатся краткие теоретические сведения, показан внешний вид лабораторной установки, подробно рассмотрены задания, порядок их выполнения и контрольные вопросы.

Практикум предназначен для студентов всех технических направлений и специальностей.

УДК 53
ББК 22.3

© Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения (ГУАП), 2014

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

В течение семестра каждый студент в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Физика» должен выполнить 3 или 6 лабораторных работ. На каждую лабораторную работу планируется не менее двух занятий: одно – на выполнение измерений и одно – на защиту отчета. Отчет пишется не во время занятий, а дома или в библиотеке.

В начале семестра до начала занятий студент должен быть проинструктирован по технике безопасности при проведении лабораторных работ по физике. Прохождение инструктажа фиксируется в специальном журнале; там нужно обязательно расписаться.

ВНИМАНИЕ!

На занятия во все физические лаборатории не допускаются студенты в верхней (уличной) одежде. Не разрешается также раздеваться и складывать верхнюю одежду в лаборатории, ее нужно сдавать в гардероб.

В лабораторию студенты должны приходить подготовленными к назначенной работе. Необходимо заранее прочитать описание работы и теоретические сведения из соответствующего раздела курса. Не забывайте о рекомендованной литературе и обязательно получите в библиотеке все пособия, выпускаемые кафедрой.

Выполнять работу студенту разрешается лишь после **допуска**, полученного после беседы с преподавателем. Преподаватель должен убедиться, что студент понимает:

- какие явления он будет наблюдать и исследовать;
- какая цель перед ним поставлена;
- какими приборами и как ведутся измерения;
- как следует проводить эксперимент.

Полученный допуск к работе отмечается преподавателем в журнале.

В процессе выполнения лабораторной работы нужно обязательно заполнить *протокол измерений* (приложение 2). У каждого студента протокол измерений должен быть свой; ведение одного протокола несколькими студентами вместе не допускается. Протокол ведется на листе формата А4. В протоколе должно быть отражено:

точное полное название и номер лабораторной работы в соответствии с методическим пособием;

фамилия, инициалы студента и номер группы;
фамилия и инициалы преподавателя;
таблица технических характеристик измерительных приборов
(название прибора, рабочий диапазон, цена деления, класс точности и др.);
параметры установки, на ней указанные;
результаты измерений;
дата и подпись студента.

Все записи должны вестись авторучкой, шариковой, капиллярной или гелевой ручкой. Запись наблюдений и данных карандашом не допускается, карандашом можно лишь чертить таблицы и графики. Ведение «черновиков протокола» и переписывание их в конце занятия начисто не рекомендуется; это ненужная трата времени и возможность допустить ошибку при переписывании. Старательность и аккуратность лучше проявить при оформлении отчета.

По окончании измерений протокол обязательно дается на подпись преподавателю. Без этой подписи протокол считается недействительным. Подпись студента в протоколе обозначает, что он отвечает за все проведенные измерения, а подпись преподавателя означает, что работа действительно выполнялась и указанные значения действительно получены именно тем студентом, который составил протокол.

По результатам, зафиксированным в протоколе измерений, студент дома пишет *отчет* и защищает его на следующем занятии. При защите отчета могут быть заданы любые вопросы по теории изучаемого явления и по полученным результатам. За принятый отчет преподаватель выставляет студенту оценку по пятибалльной системе¹ и после этого сообщает номер и название следующей лабораторной работы.

Содержание и оформление отчета

Отчет по лабораторной работе должен выполняться на листах формата А4. Записи на листах ведутся только с одной стороны. По краям листа должна быть оставлена рамка шириной не менее 20 мм.

¹ Оценки за все работы в конце семестра суммируются и пересчитываются в итоговую рейтинговую оценку.

Эту рамку рисовать на листах не нужно, но и заступать за нее не следует. В рамке в верхнем поле нужно лишь поставить номер страницы. Пронумерованными должны быть все листы отчета, начиная с третьего. Первый лист – титульный и второй лист – протокол измерений, не нумеруются.

Отчет следует писать от руки. Если Вы используете чужие заготовки, то будьте готовы отвечать за все «заимствованные» ошибки, которых бывает много. Сказанное в равной мере относится к формулам, которые Вы подсмотрели у кого-то, а не вывели сами. Лучше спросить преподавателя. Он подскажет или проверит, правильно ли у Вас получилось.

Титульный лист работы может быть написан от руки или напечатан на принтере. Образец титульного листа приведен в приложении 3. Электронная версия титульного листа находится на сайте ГУАПа.

Отчет должен содержать следующие разделы.

1. Цель работы.

Она сформулирована в описании лабораторной работы, отсюда ее следует переписать.

2. Описание лабораторной установки.

Описание установки должно быть кратким. Следует ограничиться функциональной или электрической схемой установки. Не нужно приводить внешнего вида приборов. Далее необходимо описать эксперимент и перечислить измерительные приборы в таблице технических характеристик, перенесенной из протокола измерений.

3. Рабочие формулы.

Рабочими называются только те формулы, по которым непосредственно производятся вычисления исследуемых величин. Слева в формуле должно стоять то, что следует определить, справа – то, что измерялось в работе или известно. Все приведенные формулы должны быть пронумерованы.

Вывод формул и промежуточные выражения в этом разделе приводить не нужно. Формулы для вычисления погрешностей и проведения математической обработки результатов измерений в этом разделе тоже не приводятся.

4. Результаты измерений и вычислений.

В этом разделе отчета должны быть приведены все измеренные и вычисленные результаты. По возможности, их нужно представлять в виде наглядных таблиц. В приводимых значениях

нельзя оставлять лишние десятичные разряды (подробнее об этом пойдет речь ниже). В работе может быть несколько заданий, все они должны быть приведены в этом разделе.

5. Примеры вычислений.

В этом разделе отчета должны быть приведены *подробные* примеры вычислений по каждой рабочей формуле. Не нужно приводить все вычисления, вполне достаточно одного примера по каждой формуле. Этот раздел нужен для того, чтобы преподавателю было легче найти ошибку в вычислениях или измерениях, если таковые встретятся.

6. Вычисление погрешностей.

В этом разделе отчета должны быть представлены формулы, по которым проводилась математическая обработка результатов измерений. Должны быть *выведены* формулы, по которым вычислялись систематические и случайные погрешности и представлены примеры вычислений по каждой из них.

Этот раздел отчета самый сложный для студентов. По нему больше всего вопросов, в нем больше всего ошибок. Теория погрешностей обычно бывает написана для подготовленного читателя, знакомого с высшей математикой. В настоящем пособии авторы постарались оставить лишь самое важное по этой теме и изложить материал по возможности просто.

7. Графики и рисунки.

Небольшие графики и рисунки размещаются в тексте, а большие – формата А4 – приводятся на отдельном листе. В любом случае они должны быть подписаны и пронумерованы, на них должны быть ссылки в тексте отчета. Графики *обязательно* выполняются *на миллиметровой бумаге*. На каждой оси должно быть обозначено, какая величина и в каких единицах вдоль нее откладывается. На самих осях должны быть нанесены только узлы координатной сетки. Измеренные на опыте значения подписывать на осях не следует. На график обязательно наносятся все экспериментальные точки, и проводится соединяющая их линия. Около одной или нескольких точек откладываются систематические погрешности соответствующих измерений (подробнее об этом пойдет речь ниже).

8. Окончательные результаты, их обсуждение, выводы.

В этом разделе отчета нужно подвести итог проделанной работы. Следует написать, какие получены величины и с какими погрешностями.

Если измерения проводились разными методами, то обязательно нужно сравнить эти результаты и их погрешности, сделать заключение, какой метод лучше, точнее, удобнее.

Если известно табличное значение измеренной величины, то нужно обязательно сравнить его с полученным на опыте значением и дать аргументированное заключение об их совпадении или несовпадении.

Если в работе значения одной и той же величины получены экспериментально и теоретически, то эти результаты нужно обязательно сравнить и дать аргументированное заключение об их совпадении или несовпадении.

В случае, когда между сравниваемыми величинами имеются недопустимые расхождения, это нужно обязательно отметить в отчете и высказать предположение о возможных причинах этого несовпадения.

Если в работе ставилось целью проверить какой-то физический закон или изучить явление, то в данном разделе необходимо дать обоснованный ответ на поставленный вопрос.

Вывод должен соответствовать цели работы.

Сведения из теории погрешностей

Измеренное значение любой физической или технической величины отличается от истинного значения, т.е. в любом измеренном значении содержится ошибка. Сначала остановимся на ошибках *прямых измерений*, т.е. таких, в которых искомая величина определяется непосредственно прибором. Такими, например, являются измерения времени секундомером, длины линейкой, силы тока амперметром, напряжения вольтметром и т.п.

Ошибки могут быть обусловлены природой измеряемой величины, несовершенством измерительных приборов или обеими причинами сразу. В том случае, когда измеряемая величина случайна по своей природе, т.е. не имеет точного значения, правильнее говорить не об ошибках, а о разбросе экспериментально измеренных значений.

Ошибки, связанные с несовершенством измерительных средств, бывают случайными и неслучайными. Неслучайные ошибки корректируются введением соответствующих поправок. Случайные же ошибки приборов и других измерительных средств описываются *погрешностями*, т.е. интервалами возможного

отклонения измеренного значения величины от ее истинного значения.

Систематическая погрешность. Интервал допустимого отклонения измеренной величины от ее истинного значения называется систематической погрешностью прибора. Обычно систематическая погрешность обозначается большой греческой буквой θ , нижним индексом около которой указывается измеряемая величина. Например, систематическая погрешность времени обозначается θ_t , тока – θ_I , напряжения – θ_U , длины – θ_l , массы – θ_m .

Систематическую погрешность прямого измерения можно рассчитать по шкале прибора. Обычно на ней крупной цифрой указывается класс точности. Если эта цифра просто указана на шкале и никак не выделена, то она показывает, сколько процентов составляет систематическая погрешность от максимального значения по шкале в выбранном диапазоне. Таким образом, систематическая погрешность величины θ_X определяется пределом шкалы прибора X_{\max} и его классом точности K :

$$\theta_X = \frac{X_{\max} K}{100}. \quad (1)$$

Если эта цифра обведена кружком, то она показывает, сколько процентов составляет погрешность от измеренного значения, т.е. она задает *относительную погрешность* измерений.

$$\theta_X = \frac{XK}{100}. \quad (1a)$$

В некоторых случаях класс точности отмечен на шкале иначе. Тогда нужно пользоваться формулой, указанной в паспорте прибора.

В тех же случаях, когда класс точности прибора не указан ни на шкале, ни в паспорте (линейка, секундомер, термометр), систематическую погрешность обычно принимают равной половине цены деления шкалы.

Отметим еще раз, что по формулам (1), (1a) или по замечаниям, приведенным сразу за ними, можно найти систематическую погрешность лишь *прямого измерения*. Чаще приходится проводить косвенные измерения.

Косвенным называется такое измерение, которое сводится к измерению и вычислению. По прибору измеряются величины $x_1, x_2, x_3 \dots$, которые не являются искомыми, по ним вычисляется

искомая величина f , которая является функцией измеренных величин $f = f(x_1, x_2, x_3 \dots)$. Например, определение электрического сопротивления резистора R , которое сводится к измерению силы тока I и напряжения U и вычислению $R = U/I$, является косвенным. В данном случае $U = x_1, I = x_2, R = f = x_1/x_2$.

Систематическая погрешность косвенного измерения θ_f выражается через систематические погрешности прямых измерений $\theta_{X_1}, \theta_{X_2}, \theta_{X_3} \dots$:

$$\theta_f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \theta_{x_1} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \theta_{x_2} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| \theta_{x_3} + \dots \quad (2)$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – частные производные функции $f(x_1, x_2, x_3 \dots)$ по соответствующей переменной x_i . Частной производной функции нескольких переменных называется производная по одной из них, взятая при условии, что другие переменные принимают в этот момент фиксированные значения.

Иногда частную производную функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 обозначают f'_{x_1} . В таком обозначении x_1 – переменная, по которой берется производная. Формулу (2) можно переписать в соответствующих обозначениях:

$$\theta_f = |f'_{x_1}| \theta_{x_1} + |f'_{x_2}| \theta_{x_2} + |f'_{x_3}| \theta_{x_3} + \dots \quad (2a)$$

Формулы (2) и (2a) – это разные формы записи одной и той же формулы. В дальнейшем будем преимущественно ссылаться на формулу (2), имея ввиду обе формы записи.

Вычисление погрешности по формуле (2) скорее является оценкой, поэтому полученное значение θ_f обычно принято *округлять до одной значащей цифры*. Вторую цифру допустимо сохранять в промежуточных вычислениях и в некоторых случаях, о которых речь пойдет позже.

Пример 1

Измерение электрического тока проводится амперметром, имеющим предел измерения $I_m = 10$ А и класс точности $K_I = 1$. Напряжение измеряется вольтметром с пределом измерения $U_m = 250$ В и классом точности $K_U = 2$. Показания приборов: $I = 3$ А,

$U = 220$ В. Найти электрическое сопротивление и его систематическую погрешность.

Р е ш е н и е. Электрическое сопротивление вычисляется по известной формуле закона Ома $R = U/I$. Это выражение обозначает, что электрическое сопротивление R является функцией двух непосредственно измеряемых величин: $R = R(U, I)$. Систематические погрешности прямых измерений тока и напряжения находятся по формуле (1):

$$\theta_I = \frac{I_m K_I}{100} = \frac{10 \cdot 1}{100} = 0,1(\text{А}); \quad \theta_U = \frac{U_m K_U}{100} = \frac{250 \cdot 2}{100} = 5(\text{В}).$$

Поскольку мы имеем дело с косвенным измерением функции R , систематическую погрешность сопротивления θ_R можно выразить через погрешности тока θ_I и напряжения θ_U при помощи формулы (2а):

$$\theta_R = |R'_I| \cdot \theta_I + |R'_U| \cdot \theta_U.$$

Найдем частные производные от сопротивления по току и по напряжению:

$$R'_U = \left(\frac{U}{I} \right)'_U = \frac{1}{I} U'_U = \frac{1}{I}, \quad R'_I = \left(\frac{U}{I} \right)'_I = U \left(\frac{1}{I} \right)'_I = \frac{-U}{I^2}.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для систематической погрешности электрического сопротивления:

$$\theta_R = \frac{\theta_U}{I} + \frac{U\theta_I}{I^2}; \quad \theta_R = \frac{5}{3} + \frac{220 \cdot 0,1}{9} = \frac{37}{9} \approx 4(\text{Ом}).$$

Теперь найдем электрическое сопротивление и округлим его до целых – так же, как и систематическую погрешность

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220}{3} = 73(\text{Ом}).$$

О т в е т: $R = (73 \pm 4)$ Ом.

П р и м е р 2

Проводится косвенное измерение момента инерции маятника Максвелла массой m . Для этого измеряется время падения t маятника с высоты h . Результаты прямых измерений: $t = 1,662 \pm 0,001$ с, $h = 0,255 \pm \pm 0,002$ м. Радиус оси $r = 5$ мм, радиус нити $r_H = 0,6$ мм, масса $m = 463$ г.

Р е ш е н и е. Момент инерции маятника Максвелла вычисляется по формуле:

$$I = m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right),$$

в которой $g = 9,82 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Измеряемыми величинами являются время падения – t и начальная высота падения – h . Сказанное обозначает, что $I = I(t, h)$. Значит, для вычисления систематической погрешности θ_I нужно взять частные производные функции I по двум названным переменным.

$$I'_t = m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)'_t = m(r + r_H)^2 \frac{gt}{h};$$

$$I'_h = m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)'_h = m(r + r_H)^2 \left(\frac{-gt^2}{2h^2} \right).$$

Получаем окончательную формулу для систематической погрешности:

$$\theta_I = |I'_t| \cdot \theta_t + |I'_h| \cdot \theta_h = m(r + r_H)^2 \frac{gt}{h} \cdot \theta_t + m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h^2} \right) \cdot \theta_h.$$

Вычислим систематическую погрешность момента инерции маятника, округлив ее до первой значащей цифры:

$$\begin{aligned} \theta_I &= 0,463(0,0056)^2 \frac{9,82 \cdot 1,662}{0,255} \cdot 0,001 + \\ &+ 0,463(0,0056)^2 \frac{9,81 \cdot 1,662^2}{2 \cdot 0,255^2} \cdot 0,002 = \\ &= 1 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Теперь нужно вычислить момент инерции и округлить его до того же десятичного разряда.

$$\begin{aligned} I &= 0,463 \cdot 0,0056^2 \left(\frac{9,82 \cdot 1,662^2}{2 \cdot 0,255} - 1 \right) = \\ &= 14,4 \cdot 10^{-6} (53,1 - 1) = 750 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

О т в е т: $I = (750 \pm 7) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Пример 3

Проводится косвенное измерение показателя адиабаты γ для воздуха. Для этого выполняются два прямых измерения избыточного давления в некотором объеме, полученные в ходе специально поставленного эксперимента, $\Delta P_1 = 1450 \pm 30$ Па и $\Delta P_2 = 340 \pm 30$ Па. Требуется найти показатель адиабаты воздуха и его систематическую погрешность.

Решение. Показатель адиабаты вычисляется по формуле:

$$\gamma = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_2} \text{ и является функцией двух переменных } \gamma = \gamma(\Delta P_1, \Delta P_2).$$

Найдем производные этой функции по каждой переменной:

$$\gamma'_{\Delta P_1} = \left(\frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_2} \right)'_{\Delta P_1} = \frac{1 \cdot (\Delta P_1 - \Delta P_2) - 1 \Delta P_1}{(\Delta P_1 - \Delta P_2)^2} = \frac{-\Delta P_1}{(\Delta P_1 - \Delta P_2)^2};$$

$$\gamma'_{\Delta P_2} = \left(\frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_2} \right)'_{\Delta P_2} = \frac{-\Delta P_1}{(\Delta P_1 - \Delta P_2)^2}.$$

Теперь нужно выразить систематическую погрешность θ_γ через эти производные и через погрешность измерения избыточного давления $\theta_{\Delta P_1} = \theta_{\Delta P_2} = 30$ Па :

$$\begin{aligned} \theta_\gamma &= \left| \gamma'_{\Delta P_1} \right| \cdot \theta_{\Delta P_1} + \left| \gamma'_{\Delta P_2} \right| \cdot \theta_{\Delta P_2} = \\ &= \frac{\Delta P_1 \theta_{\Delta P_1}}{(\Delta P_1 - \Delta P_2)^2} + \frac{\Delta P_2 \theta_{\Delta P_2}}{(\Delta P_1 - \Delta P_2)^2} = \frac{(\Delta P_1 + \Delta P_2)}{(\Delta P_1 - \Delta P_2)^2} \theta_{\Delta P}. \\ \theta_\gamma &= \frac{(1450 + 340)}{(1450 - 340)^2} 30 = \frac{1790 \cdot 30}{1110^2} \approx 0,05; \quad \gamma = \frac{1450}{1450 - 340} = 1,31. \end{aligned}$$

Ответ: $\gamma = 1,31 \pm 0,05$.

Пример 4

Сталкиваются два металлических шара с массой по $m = 0,113$ кг каждый, подвешенные на нитях длиной $\ell = 0,480 \pm 0,005$ м. Перед ударом один шар висел на нити вертикально, второй – был отклонен на угол $\alpha = 12,0^\circ \pm 0,5^\circ$. Измеренное время контакта шаров составляет $\tau = 124 \pm 5$ мкс. Требуется найти максимальную деформацию шаров во время удара и ее систематическую погрешность.

Р е ш е н и е. Максимальную деформацию шаров во время удара можно найти по формуле:

$$x = \frac{2\tau}{\pi} \cdot \sqrt{gl} \cdot \sin(\alpha/2).$$

Предварительное вычисление по этой формуле дает значение $17,9 \cdot 10^{-6}$ м. Деформация определяется по измеренным значениям времени столкновения, длины нити и угла начального отклонения. Значит, она является функцией этих величин: $x = x(\tau, \ell, \alpha)$.

Получим формулу вычисления систематической погрешности для косвенного измерения силы. Нам нужно выразить θ_x через погрешности прямых измерений и значения производных функции x по соответствующим переменным: $\theta_x = |x'_\tau| \theta_\tau + |x'_\ell| \theta_\ell + |x'_\alpha| \theta_\alpha$.

Вычислим частные производные от деформации по всем переменным:

$$\begin{aligned} x'_\tau &= \left(\frac{2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \right)'_{\tau} = \frac{2}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) = \left(\frac{2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \right)_{\tau} \frac{1}{\tau} = \frac{-x}{\tau}; \\ x'_\ell &= \left(\frac{2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \right)'_{\ell} = \frac{-\tau}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sin(\alpha/2) = \left(\frac{-2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \right) \frac{1}{2\ell} = \frac{-x}{2\ell}; \\ x'_\alpha &= \left(\frac{2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \right)'_{\alpha} = \frac{2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \cos(\alpha/2) = \frac{\left(\frac{2\tau}{\pi} \sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \right)}{-2\operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{-0,5x}{\operatorname{tg}\alpha/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\theta_x = |-x| \cdot \frac{\theta_\tau}{\tau} + |-x| \cdot \frac{\theta_\ell}{2\ell} + |-x| \cdot \frac{\theta_\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} = x \cdot \left(\frac{\theta_\tau}{\tau} + \frac{\theta_\ell}{2\ell} + \frac{\theta_\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} \right).$$

Измеряемые величины и их погрешности уже приведены выше. Отметим, что в системе единиц СИ углы должны измеряться в радианах, поэтому вместо $0,5^\circ$ следует подставить $\frac{0,5^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад.

$$\begin{aligned} \theta_x &= 17,9 \cdot 10^{-6} \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{124 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,005}{0,96} + \frac{0,5^\circ \cdot \pi}{180^\circ \cdot 2\operatorname{tg}(6^\circ)} \right) = \\ &= 17,9 \cdot 10^{-6} \left(\frac{5}{124} + \frac{0,005}{0,96} + \frac{0,5 \cdot 3,14}{180 \cdot 0,210} \right) = \end{aligned}$$

$$= 17,9 \cdot 10^{-6} (0,040 + 0,005 + 0,042) = 17,9 \cdot 10^{-6} \cdot 0,087 \approx 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

Записываем окончательный результат

О т в е т: $x = 17,9 \pm 1,6$ мкм,
(допустимо привести ответ $x = 18 \pm 2$ мкм).

П р и м е р 5

Сталкиваются два металлических шара с массой по $m = 0,113$ кг каждый, подвешенные на нитях длиной $\ell = 0,480 \pm 0,005$ м. Перед ударом один шар висел на нити вертикально, второй – был отклонен на угол $\alpha = 12,0^\circ \pm 0,5^\circ$. Измеренное время контакта шаров составляет $\tau = 124 \pm 5$ мкс. Требуется найти максимальную силу столкновения шаров и ее систематическую погрешность.

Р е ш е н и е. Силу столкновения шаров можно найти по формуле:

$$F = \frac{\pi m}{\tau} \cdot \sqrt{g\ell} \cdot \sin(\alpha/2).$$

Предварительное вычисление по этой формуле дает значение 649 Н. Сила удара определяется по измеренным значениям времени столкновения, длины нити и угла начального отклонения. Значит, она является функцией этих величин: $F = F(\tau, \ell, \alpha)$.

Получим формулу вычисления систематической погрешности для косвенного измерения силы. Нам нужно выразить θ_F через погрешности прямых измерений и значения производных функций F по соответствующим переменным: $\theta_F = |F'_\tau| \theta_\tau + |F'_\ell| \theta_\ell + |F'_\alpha| \theta_\alpha$.

Вычислим частные производные от силы по всем переменным:

$$\begin{aligned} F'_\tau &= \left(\frac{\pi m}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) \right)'_\tau = \frac{-\pi m}{\tau^2} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) = \\ &= - \left(\frac{\pi m}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) \right) \frac{1}{\tau} = \frac{-F}{\tau}; \\ F'_\ell &= \left(\frac{\pi m}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) \right)'_\ell = \frac{-\pi m}{2\tau} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sin(\alpha/2) = \\ &= - \left(\frac{\pi m}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) \right) \frac{1}{2\ell} = \frac{-F}{2\ell}; \end{aligned}$$

$$F'_\tau = \left(\frac{\pi m}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) \right)'_\alpha = \frac{\pi m}{2\tau} \sqrt{g\ell} \cos(\alpha/2) =$$

$$= \frac{-\left(\frac{\pi m}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin(\alpha/2) \right)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{-0,5F}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}.$$

$$\theta_F = |-F| \frac{\theta_\tau}{\tau} + |-F| \frac{\theta_\ell}{2\ell} + |-F| \frac{\theta_\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} = F \left(\frac{\theta_\tau}{\tau} + \frac{\theta_\ell}{2\ell} + \frac{\theta_\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} \right).$$

Измеряемые величины и их погрешности уже приведены выше. Отметим, что в системе единиц СИ углы должны измеряться в радианах, поэтому вместо $0,5^\circ$ следует подставить $\frac{0,5^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад.

$$\theta_F = 649 \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{124 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,005}{0,96} + \frac{0,5^\circ \cdot \pi}{180^\circ \cdot 2\operatorname{tg}(6^\circ)} \right) =$$

$$= 649 \left(\frac{5}{124} + \frac{0,005}{0,96} + \frac{0,5 \cdot 3,14}{180 \cdot 0,210} \right) =$$

$$= 649(0,040 + 0,005 + 0,042) = 649 \cdot 0,087 \approx 60(\text{Н}).$$

Поскольку значащей цифрой в полученном числе является второй десятичный разряд, т.е. десятки, значение силы тоже нужно округлить до десятков (более точного значения силы мы не знаем). Окончательно получаем:

О т в е т: $F = 650 \pm 60 \text{ Н}$.

Очень часто функция $f(x_1, x_2, x_3 \dots)$ является произведением переменных, стоящих в какой-либо степени, в числителе, знаменателе или под корнем. Такая функция может быть сведена к виду

$$f = x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots, \quad (3)$$

например $f = \frac{x_1 x_2^n \sqrt[k]{x_3}}{x_4^m} = x_1 x_2^n x_3^{(1/k)} x_4^{-m}.$

Систематическую погрешность функции (3) можно вычислить по формуле:

$$\theta_f = f \left(|n_1| \frac{\theta_{x_1}}{|x_1|} + |n_2| \frac{\theta_{x_2}}{|x_2|} + |n_3| \frac{\theta_{x_3}}{|x_3|} + \dots \right). \quad (4)$$

Эта формула проще и удобнее формул (2) или (2а), поскольку: не нужно аналитически находить частные производные функции; не нужно вычислять значения частных производных; величины в числителе и знаменателе можно вычислять в любых одинаковых удобных единицах (не обязательно в системе СИ); погрешность θ_f выражается через уже вычисленное значение самой функции.

Нужно всегда, когда это возможно, стараться пользоваться формулой (4) вместо формулы (2).

Пример 6

Проводится косвенное измерение скорости груза. Для этого измеряется пройденный путь S_2 и время движения t . Данные прямых измерений: $t = 0,392 \pm 0,001$ с, $S_2 = 0,130 \pm 0,002$ м.

Решение. Скорость равномерного движения вычисляется по формуле $v = S_2/t$ и является функцией двух переменных $v = v(S_2, t)$. Формула сводится к виду (3). По шаблону формулы (4) получим формулу для систематической погрешности косвенных измерений:

$$\theta_v = v \left(\frac{\theta_{S_2}}{S_2} + \frac{\theta_t}{t} \right).$$

Значение θ_v выражается через значение v , поэтому, сначала предварительно вычислим скорость: $v = S_2/t = 0,130/0,392 = 0,332$ м/с, затем

$$\theta_v = 0,332 \cdot \left(\frac{0,001}{0,392} + \frac{0,002}{0,130} \right) = 0,332 \cdot 0,018 = 0,006 \text{ м/с.}$$

Вычисляем скорость и записываем окончательный результат:

Ответ: $v = 0,332 \pm 0,006$ м/с.

Пример 7

Проводится косвенное измерение ускорения груза. Для этого измеряется путь разгона S_1 ; путь, пройденный равномерно S_2 , и время равномерного движения t . Данные прямых измерений: $t = 0,392 \pm 0,001$ с, $S_1 = 0,120 \pm 0,002$ м, $S_2 = 0,130 \pm 0,002$ м.

Решение. Ускорение вычисляется по формуле $a = S_2^2/(2S_1t^2)$ и, таким образом, является функцией трех переменных $a = a(S_1, S_2, t)$, которая сводится к виду (3): $a = 0,5 \cdot S_2^2 \cdot S_1^{-1} \cdot t^{-2}$.

Согласно формуле-шаблону (4) систематическая погрешность

$$\theta_a = a \left(\frac{\theta_{s_1}}{S_1} + \frac{2\theta_{s_2}}{S_2} + \frac{2\theta_t}{t} \right)$$

выражается через значение ускорения и относительные погрешности всех переменных. Сначала предварительно вычислим ускорение, затем $-\theta_a$.

$$a = \frac{S_2^2}{2S_1 t^2} = \frac{0,13^2}{2 \cdot 0,12 \cdot 0,392^2} = \frac{0,0169}{0,00369} = 0,458 \text{ м/с}^2.$$

$$\theta_a = a \left(\frac{0,002}{0,120} + \frac{2 \cdot 0,002}{0,130} + \frac{2 \cdot 0,001}{0,392} \right) = 0,458 \cdot 0,053 = 0,03 \text{ м/с}^2.$$

Округляем ускорение до сотых, как погрешность, и записываем окончательный результат.

О т в е т: $a = 0,46 \pm 0,03 \text{ м/с}^2$.

П р и м е р 8

Проводится косвенное измерение ускорения свободного падения g при помощи математического маятника. Непосредственно измеряются длина маятника ℓ и период колебаний T . Результаты прямых измерений: $\ell = 51,5 \pm \pm 0,5 \text{ см}$, $T = 1,4455 \pm 0,0005 \text{ с}$.

Р е ш е н и е. Ускорение свободного падения можно найти с помощью формулы:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}.$$

Поскольку $g = g(\ell, T)$ – функция вида (3) $g = 4\pi^2 \ell T^{-2}$, её систематическая погрешность находится по формуле-шаблону (4).

$$\theta_g = g \left(\frac{\theta_\ell}{\ell} + \frac{2\theta_T}{T} \right).$$

Предварительное вычисление даёт $g = \frac{4\pi^2 0,515}{1,4455^2} = 9,73 \text{ м/с}^2$.

Затем вычислим θ_g :

$$\theta_g = 9,73 \left(\frac{0,005}{0,515} + \frac{2 \cdot 0,0005}{1,4455} \right) = 9,73(0,0097 + 0,0007) = 0,10 \text{ м/с}^2.$$

Мы получили значение $g = 9,73 \pm 0,10 \text{ м/с}^2$, которое можно оставить в таком виде, а можно округлить погрешность и результат до десятых; и то и другое допустимо.

О т в е т: $g = 9,73 \pm 0,10 \text{ м/с}^2$ или $g = 9,7 \pm 0,1 \text{ м/с}^2$.

П р и м е р 9

Проводится косвенное измерение коэффициента вязкости воздуха. Для этого измеряется поток воздуха через капилляр $Q = (1,050 \pm 0,025) \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ и перепад давления на концах капилляра $\Delta P = 540 \pm 20 \text{ Па}$. Радиус капилляра $R = 0,0005 \pm 0,00001 \text{ м}$, длина капилляра $\ell = 0,1000 \pm 0,0005 \text{ м}$.

Р е ш е н и е. Коэффициент вязкости воздуха выражается через измеренные величины и параметры установки по формуле:

$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 Q \ell}$, и является функцией $\eta = \eta(Q, \Delta P, R, \ell)$. Предваритель-

ное вычисление по этой формуле дает результат:

$$\eta = \frac{\pi(0,5 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 540}{8 \cdot 1,05 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-1}} = \frac{3,14 \cdot 540 \cdot 10^{-12}}{16 \cdot 8 \cdot 1,05 \cdot 10^{-6}} \approx 12,62 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Написанная функция $\eta = \eta(Q, \Delta P, R, \ell)$ сводится к виду (3) и её систематическая погрешность может быть найдена по формуле-шаблону (4).

$$\eta = (\pi/8) (R^4 \cdot \Delta P \cdot Q^{-1} \cdot \ell^{-1})$$

$$\theta_\eta = \eta \cdot \left(\frac{4\theta_R}{R} + \frac{\theta_{\Delta P}}{\Delta P} + \frac{\theta_Q}{Q} + \frac{\theta_\ell}{\ell} \right).$$

Вычисления дают следующие значения:

$$\begin{aligned} \theta_\eta &= 12,62 \cdot 10^{-6} \left(\frac{4 \cdot 0,00001}{0,0005} + \frac{20}{540} + \frac{0,025}{1,05} + \frac{0,0005}{0,1} \right) = \\ &= 12,62 \cdot 10^{-6} (0,08 + 0,037 + 0,024 + 0,005) = \\ &= 12,62 \cdot 10^{-6} \cdot 0,15 = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Окончательное значение коэффициента вязкости нужно округлить до соответствующего десятичного разряда и записать с ис-

пользованием соответствующей десятичной приставки. В данном случае возможны два варианта записи окончательного ответа.

О т в е т: $\eta = 13 \pm 2$ мкПа·с, или $\eta = 12,6 \pm 1,9$ мкПа·с.

Случайная погрешность. При многократном повторении измерений полученные результаты будут отличаться друг от друга. В качестве результата серии из N измерений (как прямых, так и косвенных) в таком случае разумно взять среднее арифметическое:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}. \quad (5)$$

Средняя квадратичная погрешность отдельно взятого измерения X_i обычно обозначается S_X и вычисляется по формуле:

$$S_X = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_N - \bar{X})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}}. \quad (6)$$

Эта величина показывает стандартное отклонение результата отдельного опыта X_i от получившегося среднего значения \bar{X} .

С увеличением числа измерений N величины \bar{X} и S_X не должны сильно меняться, они должны лишь уточняться. Однако если провести несколько серий измерений X , в каждой из них получится свое среднее значение \bar{X}_k . Разброс этих средних значений определяется *средним квадратичным отклонением* $S_{\bar{X}}$. Интуитивно ясно, что эта величина должна быть существенно меньше, чем S_X . С увеличением числа измерений N в каждой серии средние значения \bar{X}_k будут определяться точнее. Следовательно, они будут меньше отличаться друг от друга, и их разброс станет меньше. Таким образом, с увеличением числа измерений среднее квадратичное отклонение должно уменьшаться, а достоверность полученного результата – увеличиваться. Как следует из теории,

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{N}}. \quad (7)$$

Окончательная формула для среднего квадратичного отклонения:

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}}. \quad (8)$$

Рассмотрим серию косвенных измерений. Пусть в опыте с номером i измеряются величины $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots$, по которым вычисляется искомая величина – функция $f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots)$. Следует различать *два случая* при проведении таких измерений.

Сначала рассмотрим случай, когда внешние условия не меняются от опыта к опыту. При такой постановке эксперимента значения каждой переменной меняются лишь вследствие случайных ошибок измерений. В таком случае по формуле (5) находят средние значения каждой переменной – $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots$, а по формулам (6–8) – их случайные погрешности. Среднее значение величины f вычисляют по формуле

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots). \quad (9)$$

Среднее квадратичное отклонение этой величины можно выразить через средние квадратичные отклонения каждой из переменных:

$$S_{\bar{f}} = \sqrt{(f'_{x_1})^2 (S_{x_1})^2 + (f'_{x_2})^2 (S_{x_2})^2 + (f'_{x_3})^2 (S_{x_3})^2 + \dots}. \quad (10)$$

Отметим, что эта формула получена в предположении, что все случайные ошибки прямых измерений независимы, т.е. ошибка измерения одной величины не влечет за собой автоматически ошибки другой.

Кроме описанного метода обработки серии косвенных измерений существует и другой, применимый в случае проведения серии измерений как при неизменных, так и при меняющихся внешних условиях. Состоит он в том, что по результатам i -го измерения сначала находится величина $f_i = f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots)$, а затем получившийся набор значений f_i обрабатывается так же, как и в случае прямых измерений. Это значит, что по формуле (5) находится среднее значение величины \bar{f} , а по формулам (6–8) – средняя квадратичная погрешность S_f и среднее квадратичное отклонение $S_{\bar{f}}$.

В случае, когда число измерений N невелико (~ 10 или меньше), среднее квадратичное отклонение округляют по тем же правилам, что и систематическую погрешность, т.е. сохраняют одну значащую цифру, вторую иногда сохраняют лишь в случае, когда первая равна единице или двойке. При записи средней квадратичной погрешности S_X сохраняют тот же десятичный разряд, что и в среднем квадратичном отклонении $S_{\bar{X}}$.

Результатами математической обработки серии измерений, как прямых, так и косвенных, являются: *среднее значение*, вычисленное по формуле (5) или (9), *среднее квадратичное отклонение*, вычисленное по формулам (7), (8) или (10) и *полное число измерений* N .

Пример 10

Определяется момент инерции маятника Максвелла. Для этого измеряется время падения маятника массой $m = 556$ г с высоты $h = 21$ см. Радиус оси $r = 5$ мм, радиус нити $r_H = 0,6$ мм. Проводится серия измерений времени падения t при названных условиях. Результаты измерений даны в табл. 1.

Таблица 1

t, c	1,465	1,466	1,479	1,467	1,502	1,477	1,474	1,468	1,470	1,462
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Момент инерции маятника Максвелла вычисляется по формуле

$$I = m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right),$$

где $g = 9,82$ м/с² – ускорение свободного падения. Измеряется время падения. Найдём среднее время падения и среднее квадратичное отклонение $S_{\bar{t}}$.

$$\bar{t} = \frac{1,465 + 1,466 + 1,479 + 1,467 + 1,502 + 1,477 + 1,474 + 1,468 + 1,470 + 1,462}{10} = 1,473 \text{ с.}$$

Предварительное вычисление момента инерции маятника:

$$I = 0,556(0,0056)^2 \left(\frac{9,82 \cdot 1,473^2}{2 \cdot 0,21} - 1 \right) = 17,44 \cdot 10^{-6} \cdot 49,68 = 717 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$\begin{aligned}
S_{\bar{t}} &= \sqrt{\frac{(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + (t_3 - \bar{t})^2 + \dots + (t_{10} - \bar{t})^2}{9 \cdot 10}} = \\
&= \sqrt{\frac{(1,465 - 1,473)^2 + (1,466 - 1,473)^2 + (1,479 - 1,473)^2 + \dots + (1,462 - 1,473)^2}{90}} = \\
&= \sqrt{\frac{0,008^2 + 0,007^2 + 0,006^2 + 0,006^2 + 0,029^2 + 0,004^2 + 0,001^2 + 0,005^2 + 0,003^2 + 0,011^2}{90}} = \\
&= \sqrt{\frac{0,001198}{90}} \approx 0,004 \text{ с.}
\end{aligned}$$

Теперь найдём момент инерции маятника и выразим величину $S_{\bar{I}}$ через I и $S_{\bar{t}}$.

$$\begin{aligned}
I'_t &= m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)'_t = m(r + r_H)^2 \frac{gt}{h} = m(r + r_H)^2 \frac{gt^2}{2h} \cdot \frac{2}{t} \approx \\
&\approx m(r + r_H)^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \frac{2}{t} = \frac{2I}{t}.
\end{aligned}$$

(Выражение в больших круглых скобках примерно равно 50; единицей в нём при вычислении погрешности можно пренебречь.)

$$S_{\bar{I}} = I'_t S_{\bar{t}} = 2I \frac{S_{\bar{t}}}{t}.$$

$$S_{\bar{I}} = 2 \cdot 717 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,004}{1,473} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

О т в е т: $I = 717 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $S_{\bar{I}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $N = 10$.

Полная погрешность измерений. Как уже отмечалось выше, ошибки могут быть обусловлены природой измеряемой величины, несовершенством измерительных приборов, несовершенством методики эксперимента или несколькими причинами сразу. Приборные ошибки и, соответственно, приборные погрешности полностью исключить невозможно. Можно лишь априори установить их границы с помощью систематической погрешности. Погрешности, обусловленные всеми возможными причинами вместе, называют

полными. Обычно их обозначают большой греческой буквой Δ , нижним индексом около которой указывают измеряемую величину или записывают рядом с измеренным значением через знак « \pm ». Договоримся считать, что *полная погрешность задает интервал, в который с вероятностью 95% попадает истинное значение измеряемой величины.*

В большинстве лабораторных работ по курсу физики проводятся измерения *неслучайных* по своей природе величин, разброс значений которых обусловлен лишь случайными ошибками измерительных приборов. В таком случае средняя квадратичная погрешность измеряемой величины должна оказаться сравнимой или меньше интервала, определяемого систематической погрешностью:

$$S_x \leq \theta_x. \quad (11)$$

Среднее квадратичное отклонение должно всегда получаться меньше этого интервала.

$$S_x^- < \theta_x. \quad (12)$$

Невыполнение этих условий обычно бывает связано с *промахами*, т.е. грубыми ошибками экспериментатора при измерениях. И наоборот, знак строгого неравенства в условии (11) и выполнение условия (12) в более жестком виде

$$S_x^- \ll \theta_x, \quad (12a)$$

свидетельствует о старательности, аккуратности экспериментатора и о надежности полученных результатов. В описываемом случае полная погрешность среднего значения определяется только систематической погрешностью:

$$\Delta_x = \theta_x. \quad (13)$$

В случае проведения *технических испытаний* обычно имеют дело с величинами, *случайными по своей природе*. Разброс измеряемых параметров при таких испытаниях связан с немного различными характеристиками испытываемых образцов и с ошибками, вносимыми измерительными приборами. Средняя квадратичная погрешность и среднее квадратичное отклонение, определенные по формулам (6), (7), (8), (10), включают в себя обе названные причины и поэтому не ограничены интервалом систематической погрешности. В этой ситуации случайную погрешность серии изме-

рений и систематическую погрешность, связанную с несовершенством измерительных приборов, объединяют в полную погрешность:

$$\Delta_{\bar{X}} = \theta_X + k \cdot S_{\bar{X}}. \quad (14)$$

В этой формуле k – коэффициент Стьюдента, зависящий от количества проведенных измерений в серии. Более полная таблица коэффициентов Стьюдента приведена в приложении 1.

$N = 5$	$k = 2,5;$
$N = 10$	$k = 2,3;$
$N = 20$	$k = 2,0.$

Обработка серии измерений и представление результатов. По результатам серии измерений нужно при помощи формулы (5) или (9) найти среднее значение. После этого по формулам (6), (7), (8) нужно найти среднюю квадратичную погрешность и среднее квадратичное отклонение. Для одного, нескольких или всех полученных значений по формулам (1), (2) рассчитать систематическую погрешность. Дальнейший порядок обработки результатов измерений зависит от того, какие величины измеряются, случайные или неслучайные*.

Если измеряемая величина по своей природе не является случайной, и ее случайные ошибки связаны лишь с влиянием измерительных приборов на процесс измерений, систематические и случайные погрешности нужно сравнить по критериям (11) и (12). В качестве полной погрешности, в этом случае, следует взять систематическую погрешность – формула (13).

Если измеряемая величина является случайной по своей природе, то случайную и систематическую погрешность следует объединить в полную по формуле (14).

Результатом серии измерений при любом способе обработки должны быть: среднее значение и полная погрешность измеряемой величины. Кроме того, приводится среднее квадратичное отклонение и полное число измерений.

* Измеряемую величину следует считать случайной по своей природе, если при ее измерении возникают неконтролируемые экспериментатором факторы или физический процесс протекает так быстро, что экспериментатор не успевает провести достоверные измерения. Например, в лабораторной работе № 9 студенту предлагается во время эксперимента поддерживать постоянной частоту вращения гироскопа. Поскольку измерение длится достаточно долго, иногда около минуты, а частота вращения все-таки уплывает, экспериментатор сталкивается со случайным фактором, который не учитывается систематической погрешностью прибора.

Для единичного измерения указывается полученное значение и его систематическая погрешность.

Окончательная запись и округление полученных результатов с учетом погрешности измерений. Все полученные результаты должны приводиться с погрешностями.

- Погрешность записывается после измеренной величины через знак \pm . Единицы измерения результата и погрешности должны быть одинаковыми. Они указываются после погрешности. Если при расчете значения величин, подставляемых в формулу, приводятся без наименования, то итоговое значение имеет наименование в скобках.
- Если результат приводится в нормированном виде, то есть числом, умноженным на 10 в некоторой степени, то и погрешность нужно привести в виде числа, умноженного на 10 в той же степени.

НЕПРАВИЛЬНО

$$V = 10,6 \text{ м/с} \pm 20 \text{ см/с}$$
$$D = 11,3 \text{ см} \pm 5 \text{ мм}$$
$$S = 2,26 \cdot 10^{-6} \pm 7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$$

ПРАВИЛЬНО

$$V = 10,6 \pm 0,2 \text{ м/с}$$
$$D = 11,3 \pm 0,5 \text{ см}$$
$$S = (2,26 \pm 0,07) \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

- Полученный результат и погрешность должны быть обязательно округлены. Нужно оставить лишь те цифры, которые известны. Лишние цифры – это «мусор», их приводить нельзя.
- Сначала округляют погрешность, затем измеренную величину. Погрешность *округляют до одной значащей цифры*, т.е. до первой слева цифры, не равной 0.
- В полученном результате сохраняют последним тот десятичный разряд, до которого округлена погрешность.

НЕПРАВИЛЬНО

$$R = 10,627319 \pm 0,666666 \text{ Ом}$$
$$C = 389,45 \pm 21,33 \text{ нФ}$$
$$R = 10,63 \pm 0,7 \text{ Ом}$$
$$R = 11 \pm 0,07 \text{ Ом}$$

ПРАВИЛЬНО

$$R = 10,6 \pm 0,7 \text{ Ом}$$
$$C = 390 \pm 20 \text{ нФ}$$
$$R = 10,6 \pm 0,7 \text{ Ом}$$
$$R = 11,14 \pm 0,07 \text{ Ом}$$

- Вторую цифру в погрешности можно сохранить (можно и не сохранять) лишь в случаях, когда первая цифра равна 1 или 2, причем, если речь идет о цифре после 2, то ее следует округлить до 0 или 5.

- Если первая цифра в погрешности 8 или 9, то ее можно округлить (можно и не округлять) до единицы старшего десятичного разряда.

НЕПРАВИЛЬНО
 $\ell = 621,54 \pm 11,7 \text{ м}$

ПРАВИЛЬНО
 $\ell = 622 \pm 12 \text{ м}$

ПРАВИЛЬНО
 $\ell = 620 \pm 10 \text{ м}$

$\ell = 1,273 \pm 0,023 \text{ м}$

$\ell = 1,273 \pm 0,025 \text{ нФ}$

$\ell = 1,27 \pm 0,03 \text{ м}$

$\ell = 4,316 \pm 0,086 \text{ м}$

$\ell = 4,3 \pm 0,1 \text{ м}$

$\ell = 4,32 \pm 0,09 \text{ м}$

$q = (384,7 \pm 8,1)10^{-9} \text{ Кл}$

$q = (380 \pm 10)10^{-9} \text{ Ом}$

$q = (384 \pm 8)10^{-9} \text{ Кл}$

- В погрешности округление проводится в большую сторону если старшая отбрасываемая цифра – 3 и более.
- В измеряемой величине последняя сохраняемая цифра не меняется, если старшая из отбрасываемых меньше 5, и увеличивается на 1, если – больше. Если же отбрасываемая цифра равна 5 и все последующие цифры – нули или неизвестны, то последнюю сохраненную цифру при округлении нужно сделать четной.

НЕПРАВИЛЬНО
 $t = 16,33333 \pm 0,33333 \text{ с}$
 $m_1 = 18,350 \pm 0,287 \text{ кг}$
 $m_2 = 33,450 \pm 0,287 \text{ кг}$
 $m_3 = 33,451 \pm 0,287 \text{ кг}$

ПРАВИЛЬНО
 $t = 16,3 \pm 0,4 \text{ с}$
 $m_1 = 18,4 \pm 0,3 \text{ кг}$
 $m_2 = 33,4 \pm 0,3 \text{ кг}$
 $m_3 = 33,5 \pm 0,3 \text{ кг}$

На стадии предварительных, промежуточных вычислений допустимо и даже полезно сохранять одну лишнюю цифру (не больше), чтобы не накапливать вычислительную ошибку. При окончательной записи нужно строго соблюдать правила сохранения последней цифры. Сохранение лишних цифр, равно как и несохранение известных цифр при окончательной записи результата измерения или его погрешности, является ошибкой, свидетельствующей о неграмотности экспериментатора. Такая ошибка влечет за собой снижение оценки за работу.

Допустимые расхождения между результатами измерений. В тех случаях, когда это возможно, нужно сравнивать полученное экспериментально значение \bar{X} с теоретическим или табличным X_T . В тех случаях, когда выполняется условие

$$|\bar{X} - X_T| \leq \Delta_{\bar{X}}, \quad (15)$$

расхождение величин \bar{X} и X_T следует считать допустимым и не требующим объяснения. Этот факт нужно обязательно отметить в отчете.

Если же условие (15) нарушается, то это свидетельствует об ошибках в проведении, постановке эксперимента или в расчетах величин \bar{X} и $\Delta_{\bar{X}}$. В этом случае нужно обязательно еще раз проверить свои измерения, расчеты и в отчете попытаться объяснить причину имеющихся расхождений или хотя бы выдвинуть правдоподобную гипотезу.

Графическая обработка результатов измерений

Графики нужно обязательно строить на миллиметровой бумаге, которая выступает в роли одного из измерительных инструментов.

Сначала нужно решить, какая из наблюдаемых величин будет функцией и какая аргументом. В соответствии со сделанным выбором график нужно озаглавить.

После этого следует разумно выбрать масштаб по обеим осям. Его нужно выбирать с учетом значений тех величин, которые по этим осям будут откладываться. Единица масштабной сетки должна соответствовать 1, 2, 5, 10 и т.д. единицам измеряемой величины. Представляемые на осях интервалы значений должны быть такими, чтобы по возможности использовать все поле графика. В некоторых случаях координатные оси разумно изобразить с разрывом.

После выбора масштаба нужно начертить координатные оси и подписать, какие величины и в каких единицах вдоль них откладываются. На осях нужно нанести узлы координатной сетки. Под осью абсцисс и слева от оси ординат эти узлы нужно подписать. Подписываются только числа; единицы их измерения указываются на осях. Значения, полученные на опыте, на осях не отмечаются.

На график обязательно наносятся все экспериментальные точки. Около них двумя вертикальным и двумя горизонтальным отрезками откладываются систематические погрешности измеряемых величин (рис. 1).

Для большей наглядности для возможности получения параметров функциональной зависимости и для получения градуировочных графиков через экспериментальные точки проводят линию.

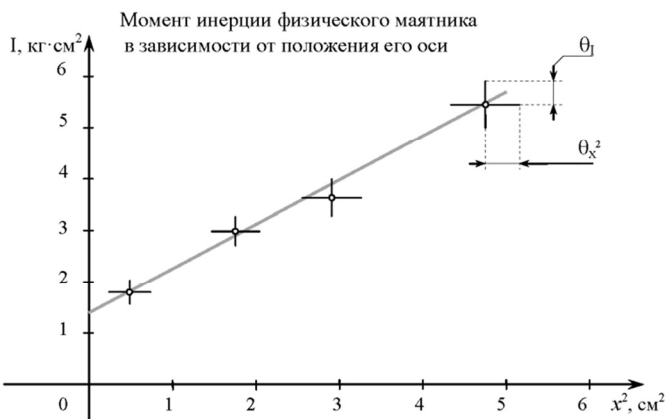


Рис. 1. Образец оформления графика

Ее следует проводить не через конкретные точки, а плавно вблизи них, избегая изломов и пересекая “крестики” погрешностей. Если известен теоретический закон, связывающий измеряемые величины, то линия на графике должна ему подчиняться.

Если теоретический закон, связывающий две измеряемые величины x и f , записывается в виде

$$f = kx + b, \quad (16)$$

то на графике должна получиться прямая линия. Ее нужно провести по линейке через имеющийся набор точек. Разумеется, все точки не окажутся на прямой, поэтому нужно проводить прямую таким образом, чтобы она проходила по возможности ближе к максимальному числу точек.

Проводя прямую линию через набор экспериментальных точек (рис. 2), нужно руководствоваться следующими правилами:

прямая должна пересечь все или почти все крестики, обозначающие систематические погрешности отложенных величин;

число точек, оказавшихся выше и ниже проведенной прямой, должно быть примерно одинаковым.

Иногда получается, что через набор точек невозможно провести прямую, руководствуясь сформулированными правилами (рис. 2 *з, д*). Если из общего набора выпадает только одна точка (рис. 2, *з*), то ее следует считать промахом и в дальнейшем не учитывать. Если же сильно выбиваются несколько точек или явно видна нелинейность (рис. 2, *д*), то следует сделать вывод, что экспериментальные дан-

ные противоречат теоретической зависимости (16). Если же наблюдаются случаи, показанные на рис. 2, в или рис. 2, г, то можно говорить о том, что экспериментальные данные подтверждают теоретическую зависимость.

В случае, когда через экспериментальные точки удалось провести прямую линию, по графику находят параметры k и b уравнения (16). Параметр b равен отрезку, отсекаемому на оси f при $x = 0$, а угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой, который можно найти по катетам треугольника, изображенного на рис. 3.

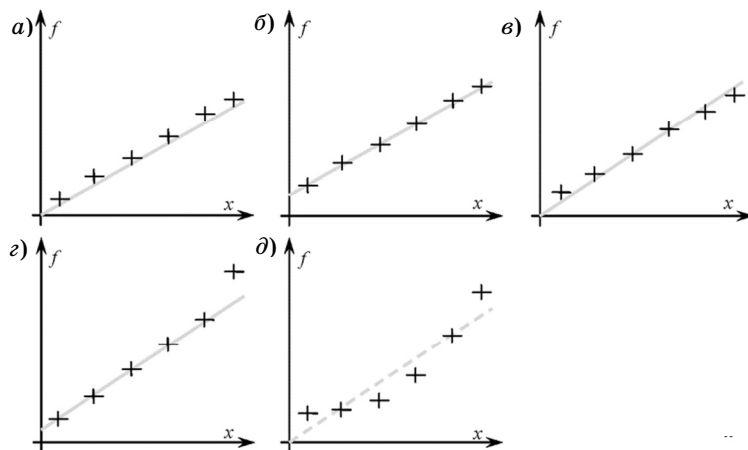


Рис. 2. Прямая $f = kx + b$, проведённая через экспериментальные точки:
 а – неправильно; б – правильно; в – неправильно; г – промах;
 д – линию провести невозможно

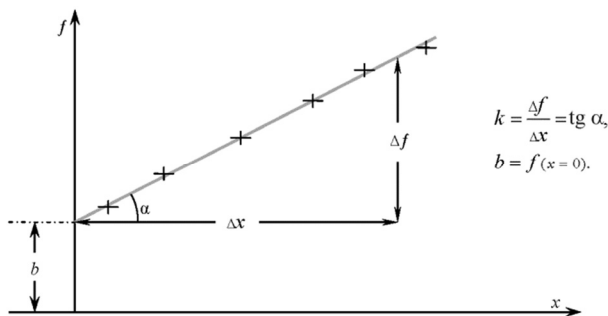


Рис. 3. Графическое определение параметров прямой

Обратим внимание на то, что катеты Δx и Δf измеряются не между экспериментальными точками, а по проведенной линии.

Оценка погрешностей величин k и b , определенных графически. Систематическую погрешность величины b разумно принять равной значению систематической погрешности θ_f при наименьшем x .

Систематическую погрешность величины k можно принять равной

$$\theta_k = k \left(\frac{\theta_f}{(\Delta f)} + \frac{\theta_x}{(\Delta x)} \right), \quad (17)$$

где Δf и Δx – катеты треугольника на рис. 3, а θ_f и θ_x – систематические погрешности величин f и x .

Для оценки случайных погрешностей S_k и S_b проводят следующие действия:

по имеющемуся набору точек проводят еще одну прямую;

для нее находят новые значения величин k' и b' ;

считают, что $S_k = |k - k'|$, а $S_b = |b - b'|$.

Очень часто изучаемые величины теоретически прямо пропорциональны друг другу:

$$f = kx. \quad (18)$$

Прямая пропорциональность является частным случаем линейной зависимости (16) при $b = 0$. График функции (18) должен обязательно проходить через начало координат. Проводя прямую линию через набор экспериментальных точек (рис. 4), нужно руководствоваться следующими правилами:

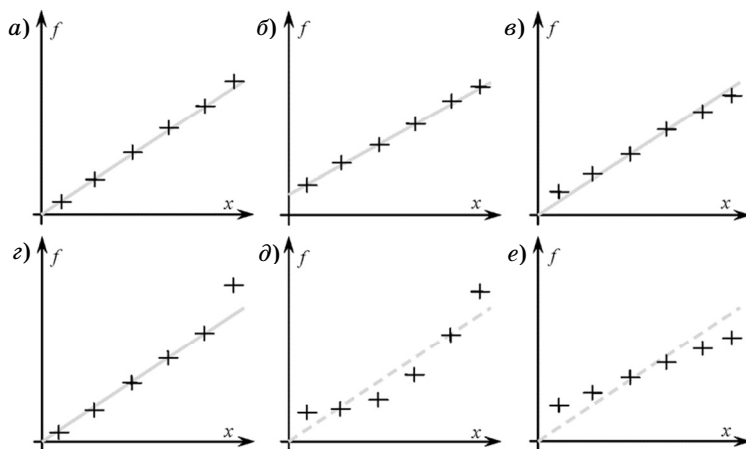
прямая должна обязательно проходить через начало координат;

прямая должна пересечь максимальное количество крестиков, обозначающих систематические погрешности отложенных величин;

число точек, оказавшихся выше и ниже проведенной прямой, должно быть примерно одинаковым.

В некоторых случаях (рис. 4, ∂ , e) через имеющиеся экспериментальные точки невозможно провести прямую (18). Если из общего набора выбивается только одна точка (рис. 4, z), то ее следует считать промахом и в дальнейшем не учитывать. Если же таких точек несколько или наблюдается нелинейность (рис. 4, ∂), или очевидно, что экспериментальная зависимость проходит мимо начала координат (рис. 4, e), то следует сделать вывод, что данные опыта противоречат теоретической формуле (18). Если наблюда-

ются случаи, показанные на рис. 4, а, в или рис. 4, з, то можно говорить о том, что экспериментальные данные подтверждают эту теоретическую зависимость.



*Рис. 4. Прямая $f = kx$, проведённая через экспериментальные точки:
 а – правильно; б – неправильно; в – правильно; г – промах;
 д и е – линию провести невозможно.*

Если через имеющийся набор данных прямую провести удалось, то величину b определять не нужно, поскольку она в этом случае обязана равняться нулю. Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ находится так же, как и в прошлом случае (см. рис. 3).

Лабораторная работа № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Цель работы: ознакомление с методикой обработки результатов измерений; определение электрического сопротивления; экспериментальная проверка закона Ома; определение удельного сопротивления нихрома.

Теоретические сведения

Напряжением или *разностью потенциалов* между двумя точками электрического поля называется отношение работы сил Кулона по переносу заряда из первой точки во вторую к величине перенесенного заряда:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}. \quad (1.1)$$

Падением напряжения на проводнике называется напряжение между его концами. В международной системе единиц (СИ) электрический заряд измеряется в кулонах (Кл), а напряжение – в вольтах (В).

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}.$$

Прибор, измеряющий напряжение, называется *вольтметром*. В электрических схемах он обозначается символом \textcircled{V} .

Силой тока или просто *током* называется отношение заряда, протекшего по проводнику, ко времени его протекания:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (1.2)$$

Написанная формула применима лишь для вычисления постоянного, т.е. неизменного во времени, тока. Для вычисления тока, меняющегося со временем, нужно пользоваться другой формулой:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (1.2a)$$

В международной системе единиц (СИ) ток измеряется в амперах (А)

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Прибор, измеряющий силу тока, называется *амперметром*. В электрических схемах он обозначается символом \textcircled{A} .

Из закона Ома для участка цепи следует, что отношение падения напряжения на проводнике к силе тока в нем есть величина постоянная, называемая электрическим сопротивлением.

$$R = \frac{U}{I} = \text{const.} \quad (1.3)$$

Электрическое сопротивление проводника (резистора) не зависит от падения напряжения на нем и от величины протекающего по нему тока. Сопротивление зависит лишь от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он изготовлен. Для тонкого длинного проводника справедливо соотношение:

$$R = \rho \frac{\ell}{S}. \quad (1.4)$$

В этой формуле ℓ – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения, а ρ – удельное сопротивление материала.

В международной системе единиц (СИ) электрическое сопротивление измеряется в омах (Ом).

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} / 1 \text{ А}.$$

Сопротивление проводников, соединенных последовательно, можно рассчитать по формуле:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N. \quad (1.5)$$

Для вычисления сопротивления параллельно соединенных проводников нужно пользоваться другой формулой:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}. \quad (1.6)$$

Электроизмерительные приборы – амперметр и вольтметр – имеют свои собственные внутренние сопротивления, поэтому, будучи включенными в электрическую цепь, они изменяют сопротивление этой цепи или ее отдельных участков и таким образом влияют на показания друг друга. Для того, чтобы измерить силу тока в проводнике и падение напряжения на нем, амперметр нужно подключить к исследуемому проводнику последовательно, а вольтметр – параллельно. Таким образом, для внесения ми-

нимальных искажений в электрическую цепь, сопротивление амперметра должно быть как можно меньше, а вольтметра – как можно больше. Однако, это условие удается соблюсти не всегда, поэтому приходится учитывать падение напряжения на амперметре и ток через вольтметр.

Лабораторная установка

Для определения неизвестного сопротивления необходимо измерить силу тока, текущего через проводник, и падение напряжения на нем. Для этого можно использовать одну из схем, приведенных на рис. 1.1. При помощи амперметра можно измерить ток через резистор I , при помощи вольтметра падение напряжения на нем U ; по этим данным при помощи формулы (1.3) можно рассчитать электрическое сопротивление. В случае, когда для сопротивлений амперметра R_A , резистора R и вольтметра R_V справедливо неравенство $R_A \ll R \ll R_V$, обе эти схемы одинаково пригодны для решения поставленной задачи.

Если сопротивление R оказывается сравнимым с сопротивлением амперметра R_A или вольтметра R_V , то желательно, а иногда просто необходимо, учитывать падение напряжения на амперметре (в схеме A) или ток через вольтметр (в схеме B). Уточненные формулы, учитывающие поправки на внутренние сопротивления измерительных приборов, записываются следующим образом:

$$\text{для схемы } A \quad R = \frac{U}{I} - R_A, \quad (1.7)$$

$$\text{для схемы } B \quad \frac{1}{R} = \frac{I}{U} - \frac{1}{R_V}. \quad (1.8)$$

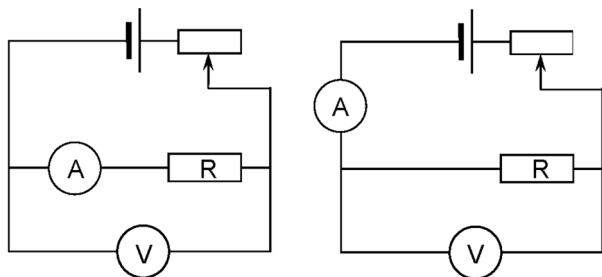


Рис. 1.1. Различные варианты измерительных схем.
Слева – схема A , справа – схема B

Рабочая установка содержит измерительную часть, включающую вольтметр, миллиамперметр и стойку с нанесенной метрической шкалой. На стойке смонтированы два неподвижных кронштейна, между которыми натянут исследуемый провод, и третий подвижный кронштейн с контактным зажимом. На подвижном кронштейне нанесена риска, облегчающая определение длины исследуемого провода.

На лицевую панель выведены кнопка Вкл./Выкл., шкалы вольтметра и миллиамперметра, ручка регулировки напряжения источника, кнопка переключения схем $A \leftrightarrow B$ и другие кнопки.

Параметры установки:

сопротивление вольтметра $R_V = 2500 \text{ Ом}$,

сопротивление амперметра $R_A = 0,2 \text{ Ом}$,

диаметр провода $D = 0,36 \text{ мм}$, (если не указан на приборе),

длина провода $l = [5-50] \text{ см}$, (задается преподавателем)

Задания и порядок их выполнения

Прежде чем приступить к выполнению работы обязательно нужно ознакомиться с лабораторной установкой:

разобраться, как переключаются схемы A и B ;

определить цену деления амперметра и вольтметра, научиться снимать отсчет с приборов;

определить границы, в пределах которых может меняться ток и напряжение;

разобраться, как устанавливается необходимая длина провода;

рассчитать систематические погрешности приборов, систематическую погрешность длины провода принять $\theta_l = 2 \text{ мм}$;

составить таблицу технических характеристик приборов.

Таблица 1.1

Технические характеристики приборов

Прибор	Цена деления	Предел измерения	Класс точности	Систематическая погрешность	Внутреннее сопротивление
Миллиамперметр					
Вольтметр					
Линейка					

Студенту предлагается выполнить одно или несколько из приведенных ниже заданий. Задание №1 является стандартным опытом в этой работе. Оно обязательно выполняется каждым студентом и является основой для выполнения следующих более сложных заданий.

Задание 1. Измерение электрического сопротивления провода.

Включить указанную преподавателем схему (А или В).

Установить заданную преподавателем длину провода.

Снять показания амперметра и вольтметра при различных токах и напряжениях 7–10 раз. Измерения следует проводить таким образом, чтобы первое значение было получено при минимально возможном токе, последнее при максимально возможном, остальные при различных промежуточных значениях.

Вычислить отношения U_i/I_i для каждого измерения i .

Вычислить уточненные по формулам (1.7) или (1.8) значения R_i .

Для нескольких значений R_i по указанию преподавателя вычислить систематическую погрешность θ_R . Если никаких указаний не получено, то вычислить погрешности для всех значений.

Результаты измерений и вычислений занести в таблицу. Для каждой электрической схемы и каждой длины провода заполнить свою таблицу.

Таблица 1.2

Результаты измерений и вычислений

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, В$										
$I, мА$										
$U/I, Ом$										
$R, Ом$										
$\theta_R, Ом$										

Величина в четвёртой строке вычисляется по формуле (1.3), величина в пятой строке – по формуле (1.7) или (1.8). Формула, по которой вычисляется величина θ_R в шестой строке, выводится

самостоятельно – так же, как в примере 1 вводной части настоящего пособия или как в приложении 4.

Провести статистическую обработку серии величин R_i (пятая строка табл. 1.2). Найти среднее значение \bar{R} и среднее квадратичное отклонение $S_{\bar{R}}$. *Обработку надо проводить по данным сразу двух таблиц, т.е. для 20 значений.*

Убедиться, что все полученные значения R_i в каждой из таблиц близки среднему. Это значит: каждое из 20 значений должно отличаться от среднего значения не больше, чем на θ_{R_i} , стоящее под ним строкой ниже.

Этот факт должен стать подтверждением закона Ома.

Считать измеряемую величину неслучайной по своей природе, поэтому полную погрешность Δ_R принять равной систематической θ_R , вычисленной при самом большом значении тока. Случайную погрешность $S_{\bar{R}}$ нужно сравнить с этим значением.

Задание 2. Изучение различных схем включения приборов.

Провести измерения сопротивления для одной и той же длины провода при помощи разных схем (см. задание 1).

Сравнить средние значения электрических сопротивлений, полученные на разных схемах и ответить на вопрос, допустимы ли расхождения между ними. Дать мотивированное заключение о предпочтительности одной из приведенных электрических схем.

Предпочтение следует отдать той схеме, для которой сопротивление можно вычислять, не учитывая поправок на внутренние сопротивления приборов. Этот критерий основан на соображении удобства; электрическое сопротивление обычно рассчитывают без учета этих поправок, т.е. просто по формуле (1.3).

Задание 3. Изучение зависимости сопротивления от его длины.

Провести несколько серий измерений с разными длинами провода (см. задание 1). Сравнить получившиеся сопротивления.

Построить график и объяснить зависимость $R(\ell)$ (рис. 1.2).

Прямую линию нужно обязательно провести через начало координат и все полученные в эксперименте «крестики». Если она проходит мимо одного или нескольких из них, то либо она проведена неверно, либо при измерениях допущена грубая ошибка – «промах».

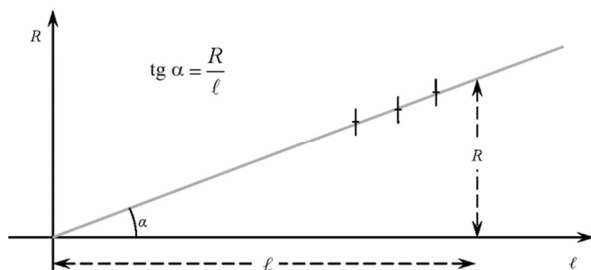


Рис. 1.2. График зависимости сопротивления от его длины

По найденному значению R , зная длину провода l и его диаметр D , можно найти удельное сопротивление по формуле

$$\rho = \frac{\pi D^2 R}{4l}. \quad (1.9)$$

Среднее значение удельного сопротивления можно найти либо проведя статистическую обработку значений, вычисленных по (1.9), либо графически по катетам получившегося на рисунке треугольника.

$$\rho = \frac{\pi D^2 \operatorname{tg} \alpha}{4}. \quad (1.10)$$

Систематическую погрешность удельного сопротивления θ_ρ вычислить для самой большой из имеющихся длин провода. Систематическую погрешность диаметра провода считать $\theta_D = 0,005$ мм.

Найти удельное сопротивление металла по указанию преподавателя: графически или статистически; оценить случайную, систематическую и полную погрешности полученного значения.

Сравнить получившийся результат с табличным значением удельного сопротивления нихрома — $\rho_T = 1,05 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

Контрольные вопросы

1. Что называется электрическим током, падением напряжения, электрическим сопротивлением?
2. Как нужно включать в электрическую схему амперметр и как — вольтметр?

3. Каким образом нужно учитывать внутренние сопротивления приборов при измерении сопротивления образца?
4. При измерении каких электрических сопротивлений удобнее пользоваться схемой *A* и каких – схемой *B*?
5. Зависит ли систематическая погрешность сопротивления от того, на какой схеме проводились измерения?
6. Почему точность измерения электрического сопротивления возрастает с увеличением напряжения, приложенного к образцу?
7. В каком случае можно говорить, что экспериментальные данные подтверждают закон Ома и в каком – нельзя?
8. В каком случае значения сопротивлений, полученные при помощи разных схем, можно объединять (усреднять) и в каком – нельзя?
9. В каком случае по экспериментальной зависимости $R(\ell)$ можно получить значение удельного сопротивления и в каком – нельзя?

Лабораторная работа № 2

МАШИНА АТВУДА

Цель работы: исследование равномерного и равноускоренного прямолинейного движения.

Теоретические сведения

Положение материальной точки в произвольный момент времени t однозначно задается при помощи радиуса-вектора \vec{r} , соединяющего начало координат с движущейся точкой. Скорость \vec{v} точки в момент времени t равна производной по времени от радиуса-вектора:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.1)$$

Ускорение материальной точки \vec{a} определяется как производная по времени от скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.2)$$

Если известен закон, по которому изменяется ускорение $\vec{a}(t)$, и задана скорость материальной точки в начальный момент времени, то можно найти скорость материальной точки в любой момент времени t :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt. \quad (2.3)$$

Перемещение $\Delta\vec{r}$ материальной точки к моменту времени t можно найти, если известен закон, по которому изменяется скорость $\vec{v}(t)$:

$$\Delta\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt. \quad (2.4)$$

Из написанных формул можно получить формулы для скоростей и перемещений в ряде конкретных случаев. Остановимся на одном из них, на случае прямолинейного равноускоренного дви-

жения с нулевой начальной скоростью вдоль вертикальной оси. В этом случае формулы (2.3) и (2.4) могут быть переписаны в виде:

$$v = at, \quad (2.5)$$

$$S = 0,5at^2. \quad (2.6)$$

Скорость, которую приобретет тело, прошедшее путь S с ускорением a и нулевой начальной скоростью, можно найти по формуле:

$$v = \sqrt{2aS}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим систему из двух одинаковых грузов массой M каждый (рис. 2.1). Грузы соединены нерастяжимой, невесомой нитью, перекинутой через блок. Массой блока и трением при его вращении пренебрежем. К одному из грузов добавим малую массу m . Система грузов начнет движение с ускорением. Если же в некоторый момент времени t_1 дополнительный груз m отделится от системы, то движение грузов станет равномерным со скоростью

$$v = \sqrt{2aS_1}, \quad (2.7a)$$

где S_1 – путь пройденный телами за время t_1 равноускоренного движения.

За время t_2 равномерного движения грузы переместятся на расстояние

$$S_2 = vt_2 = \sqrt{2aS_1} \cdot t_2.$$

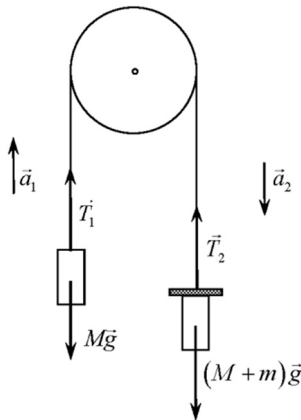


Рис. 2.1. Система грузов на блоке

Ускорение грузов выражается через пути равноускоренного S_1 и равномерного S_2 движения и через время равномерного движения t_2

$$a = \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2}. \quad (2.8)$$

Найдем ту же величину из решения динамической задачи. Запишем второй закон Ньютона для системы двух тел массами M и $M+m$.

$$\begin{cases} M\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + M\vec{g}, \\ (M+m)\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + (M+m)\vec{g}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Спроектируем все векторы в этих уравнениях на вертикальное направление. Учитывая, что $T_1 = T_2 = T$ и $a_1 = a_2 = a$,

$$\begin{cases} Ma = T - Mg, \\ -(M+m)a = T - (M+m)g. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе и получаем:

$$(M + M + m)a = (-M + M + m)g; \quad (2M + m)a = mg.$$

Таким образом, ускорение системы грузов будет равно:

$$a = \frac{mg}{2M + m}. \quad (2.10)$$

Подставляя это выражение в (2.7а) получим скорость, с которой заканчивается равноускоренное движение и начинается равномерное:

$$v = \sqrt{\frac{mgS_1}{2M + m}}. \quad (2.11)$$

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки приведен на рис. 2.2. На вертикальной стойке закреплен блок 1, через который проходит нить с большими грузами 2а и 2б. На правый груз 2а сверху может помещаться дополнительный небольшой грузик кольцо 3. Электромагнит 4 фиксирует начальное положение грузов при помощи

фрикционной муфты. На вертикальной стойке находятся три подвижных кронштейна 5, 6 и 7. Верхний кронштейн 5 имеет риску, по которой устанавливается низ большого груза. Для измерения расстояний на стойке нанесена миллиметровая шкала. Средний 6 и нижний 7 кронштейны снабжены фотоэлектрическими датчиками 8 и 9. Когда нижний край груза 2а пересекает оптическую ось верхнего фотодатчика 8, включается секундомер. Выключается он в тот момент, когда нижний край того же груза пересекает оптическую ось фотодатчика 9. Дополнительная полочка 10 на среднем кронштейне 6 снимает дополнительный грузик 3 с груза 2а в тот момент, когда последний пересекает оптическую ось датчика 8.

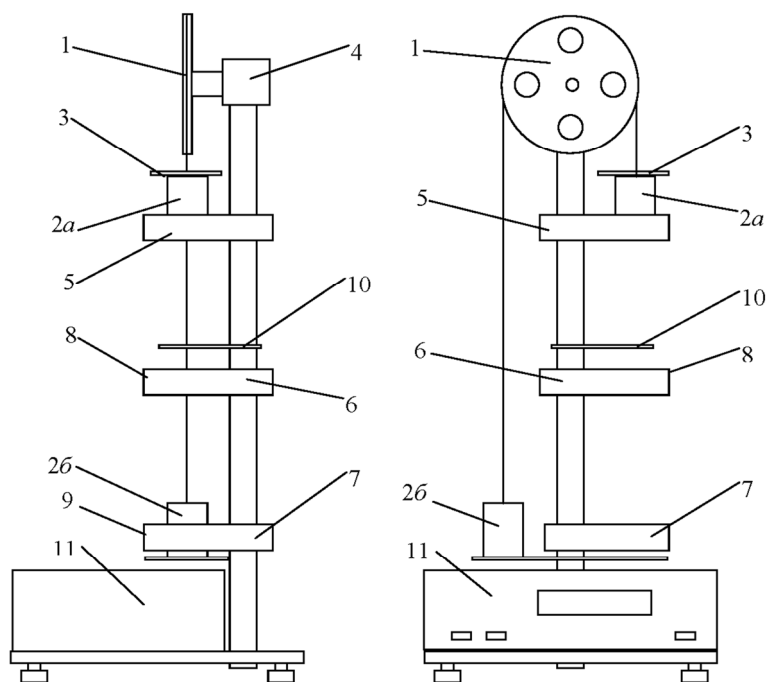


Рис. 2.2. Внешний вид лабораторной установки

На лицевой панели установки 11 имеются клавиши “Сеть”, “Пуск” и “Сброс”. Для проведения измерений нужно включить установку кнопкой “Сеть”, установить необходимые длины S_1

и S_2 , зафиксировать начальное положение грузов $2a$, $2b$ и установить груз 3 . С нажатием кнопки “Пуск” грузы приходят в движение, поочередно срабатывают фотодатчики 8 и 9 , на табло высвечивается время t_2 . Нажатие кнопки “Сброс” обнуляет показания секундомера и приводит установку в режим готовности к следующему измерению.

Задания и порядок их выполнения

Перед выполнением лабораторной работы нужно ознакомиться с назначением кнопок, получить от преподавателя набор грузов и установить заданные пути равномерного и равноускоренного движений.

До начала измерений нужно установить стойку строго вертикально, чтобы грузы при своем движении не задевали средний и нижний кронштейны. Нужно убедиться, что в крайнем верхнем положении левого груза правый груз пересекает оптическую ось нижнего датчика.

Нужно проверить, одинаковые ли массы у грузов, полученных от преподавателя. Для этого грузы нужно повесить на блок, нажать кнопку «Сброс» и проверить, будут ли они в равновесии.

Необходимо обратить особое внимание на то, чтобы нижний край правого груза в верхнем положении находился точно на уровне риски, нанесенной на верхнем кронштейне.

Систематические погрешности обоих путей считать $\theta_S = 2$ мм, систематическую погрешность измеренного времени принять $\theta_t = 0,001$ с.

Задание 1. Стандартный опыт.

Установить необходимые длины S_1 и S_2 . Правый груз зафиксировать на уровне риски, нанесенной на верхнем кронштейне. Нажать кнопку “Пуск” и после остановки груза перенести в протокол измерений время равномерного движения – t_2 .

Задание 2. Изучение равномерного движения.

Необходимо убедиться, что вторую часть своего пути правый груз проходит с постоянной скоростью. Для этого нужно изучить зависимость пути S_2 от времени t_2 . Если скорость груза постоянна, то эта зависимость на графике будет представлять собой прямую, проходящую через начало координат.

Нужно сделать не менее пяти измерений времени t_2 при неизменном расстоянии S_1 и различных S_2 . В этом опыте следует *перемещать лишь нижний кронштейн 7*, оставляя два других неподвижными. В отчете нужно привести график зависимости $S_2(t_2)$ (см. рис. 2.3) дать заключение о том, является движение груза равномерным или нет, и найти скорость груза.

Задание 3. Изучение равноускоренного движения.

Необходимо убедиться, что первую часть своего пути грузы проходят с постоянным ускорением. Для этого нужно построить зависимость $(t_2)^{-2}$ от S_1 при неизменном пути S_2 . Как следует из (2.8),

$$(t_2)^{-2} = 2a(S_2)^{-2} S_1. \quad (2.12)$$

Следовательно, изучаемая зависимость должна быть линейной и проходить через начало координат.

Нужно сделать не менее пяти измерений времени t_2 при неизменном расстоянии S_2 и различных S_1 . При этих измерениях должен перемещаться верхний кронштейн 5, а средний 6 и нижний 7 кронштейны должны оставаться неподвижными. В отчете нужно привести график зависимости $(t_2)^{-2}$ от S_1 (см. рис. 2.4) и дать заключение о том, является движение груза равноускоренным или нет.

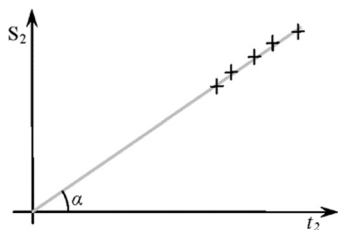


Рис. 2.3. Изучение равномерного движения

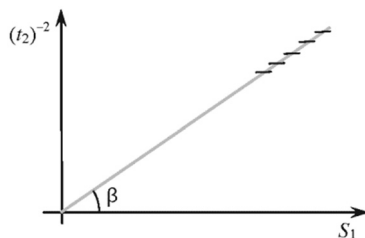


Рис. 2.4. Изучение равноускоренного движения

К следующим заданиям можно приступить лишь в случае, если установлено, что движение на участке S_1 является равноускоренным, а на участке S_2 – равномерным.

Задание 4. Определение ускорения грузов.

Ускорение можно найти двумя методами: статистической обработкой или графически. Следует воспользоваться тем методом, который укажет преподаватель.

При статистической обработке ускорения грузов рассчитать по формуле (2.8) для всех данных, полученных в заданиях 2 и 3.

При графической обработке зависимости $(t_2)^{-2}$ от S_1 сначала находится тангенс угла наклона прямой, а затем ускорение грузов:

$$a = 0,5S_2^2 \operatorname{tg}\beta. \quad (2.13)$$

При любом методе обработки нужно найти среднее значение ускорения, его случайную, систематическую и полную погрешности (см. пример 7 во вводной части настоящего пособия).

По формуле (2.10) нужно теоретически рассчитать ускорение, сравнить полученное значение с экспериментальным и дать аргументированное заключение о совпадении или несовпадении экспериментального и расчетного значений. В случае необходимости выдвинуть предположения о причинах наблюдающихся расхождений.

Задание 5. Определение скорости грузов.

Скорость грузов можно найти двумя методами: статистической обработкой или графически. Следует воспользоваться тем методом, который укажет преподаватель.

При статистической обработке для всех данных, полученных в задании 2, найти скорость равномерного движения грузов на участке пути S_2 по формуле

$$v = S_2/t_2. \quad (2.14)$$

Графически среднюю скорость можно найти по тангенсу угла α наклона прямой $S_2(t_2)$

$$v = \operatorname{tg}\alpha. \quad (2.15)$$

При любом способе обработки необходимо найти среднее значение скорости, ее случайную, систематическую и полную погрешности.

По формуле (2.11) нужно теоретически рассчитать скорость, сравнить полученное значение с экспериментальным и дать аргументированное заключение о совпадении или несовпадении экспериментального и расчетного значений. В случае необходимости выдвинуть предположения о причинах наблюдающихся расхождений.

Все определяемые в настоящей работе величины являются неслучайными по своей природе. Случайные ошибки, возникающие при их измерениях, связаны с влиянием измерительных приборов на процесс измерения.

Контрольные вопросы

1. Что называется материальной точкой и что – абсолютно твердым телом?
2. Какое движение абсолютно твердого тела называется поступательным?
3. Как описывается движение материальной точки?
4. Чем отличается перемещение от пути?
5. Что называется средней и мгновенной скоростью?
6. Какое движение материальной точки называется равномерным и какое – равноускоренным?
7. Как изменится формула (2.10), если при ее выводе не пренебрегать силами трения оси блока?
8. Как изменится формула (2.10), если при ее выводе не пренебрегать моментом инерции блока?
9. Каким образом можно экспериментально убедиться в том, что движение грузов на втором участке пути равномерное?
10. Каким образом можно экспериментально убедиться в том, что движение грузов на первом участке пути равноускоренное?

Лабораторная работа № 3

МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

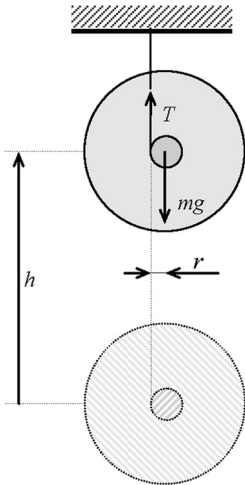
Цель работы: определение момента инерции маятника Максвелла.

Теоретические сведения

Маятник Максвелла (рис. 3.1) представляет собой диск, жестко насаженный на стержень и подвешенный на двух параллельных нерастяжимых нитях. Намотав нити на стержень, можно сообщить маятнику потенциальную энергию относительно его нижнего положения. Если маятник отпустить из верхнего положения, то, вращаясь, он начнет падать. Учитывая, что на маятник действуют только консервативные силы (сила тяжести и сила натяжения нитей), закон сохранения его механической энергии можно записать в виде:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh = mgh_0, \quad (3.1)$$

где h_0 – начальная высота маятника, определяющая его полную энергию; h – текущая высота; m – масса маятника; I – момент инерции маятника относительно его оси; ω – угловая скорость вращения относительно этой оси; v – скорость центра масс; g – ускорение свободного падения. Начало отсчета поместим в нижней точке.



Радиус-вектор \vec{h} , проведенный из этой точки в центр масс маятника, будет направлен вертикально вверх. Поскольку ускорение свободного падения направлено вертикально вниз, произведение скалярных величин можно заменить скалярным произведением векторов

Рис. 3.1. Маятник Максвелла

$$mgh = -m\vec{g} \cdot \vec{h}.$$

Известно также, что $\omega^2 = (\upsilon/r)^2$, где r – радиус стержня, и что $\upsilon^2 = \bar{\upsilon} \cdot \bar{\upsilon}$. С учетом сделанных замечаний (3.1) переписывается в виде

$$\frac{1}{2}m\bar{\upsilon} \cdot \bar{\upsilon} + \frac{I}{2r^2}\bar{\upsilon} \cdot \bar{\upsilon} - m\bar{g} \cdot \bar{h} = m\bar{g} \cdot \bar{h}_0. \quad (3.2)$$

Дифференцируем получившееся уравнение по времени и получаем

$$m\bar{\upsilon} \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} + \frac{I}{r^2}\bar{\upsilon} \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} - m\bar{g} \frac{d\bar{h}}{dt} = 0. \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\frac{d\bar{h}}{dt} = \bar{\upsilon}$, $\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \bar{a}$, где \bar{a} – ускорение центра масс, перепишем уравнение (3.3) в виде

$$mr^2\bar{\upsilon} \cdot \bar{a} + I\bar{\upsilon} \cdot \bar{a} = mr^2\bar{\upsilon} \cdot \bar{g}. \quad (3.4)$$

Все векторы в (3.4) направлены одинаково, поэтому перейдем от скалярных произведений к произведениям длин векторов. Делим все члены уравнения на модуль скорости и получаем $mr^2a + Ia = mr^2g$, или

$$I = mr^2(g/a - 1). \quad (3.5)$$

Поскольку величины I , m и r для маятника Максвелла постоянны, ускорение маятника будет тоже постоянным. Найти его можно, измерив время падения t с высоты h_0

$$a = \frac{2h_0}{t^2}. \quad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.5), получим выражение для вычисления момента инерции маятника Максвелла

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h_0} - 1 \right). \quad (3.7)$$

В этой формуле не учтена толщина нити, которая наматывается на ось маятника. В реальных условиях ее нужно обязательно учитывать. На рис. 3.2 показано, что сила натяжения T приложена

не краю шкива, а к середине нити. Поэтому, радиус шкива r следует заменить суммой $r + r_{\text{н}}$, где $r_{\text{н}}$ — радиус нити.

$$I = m(r + r_{\text{н}})^2 \left(\frac{gt^2}{2h_0} - 1 \right). \quad (3.8)$$

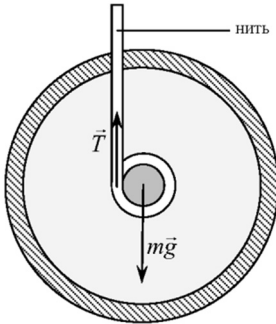


Рис. 3.2. Точки приложения сил

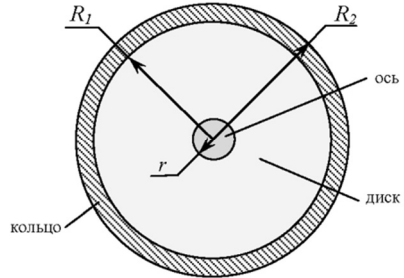


Рис. 3.3. Размеры элементов маятника

Маятник Максвелла (рис. 3.3) состоит из трех элементов: оси вращения, диска и кольца. Поэтому его момент инерции складывается из моментов инерции этих трех элементов:

$$I = I_0 + I_D + I_K. \quad (3.9)$$

Момент инерции оси ввиду его малости учитывать не будем. Моменты инерции диска и кольца можно найти по формулам:

$$I_D = \frac{m_D R_D^2}{2}; \quad I_K = \frac{m_K}{2} (R_{K1}^2 + R_{K2}^2). \quad (3.10)$$

Принимая во внимание, что $R_{K1} = R_D = R_1$, а $R_{K2} = R_2$, получаем теоретическое выражение для момента инерции маятника Максвелла

$$I = \frac{1}{2} \left(m_D R_1^2 + m_K (R_1^2 + R_2^2) \right). \quad (3.11)$$

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки показан на рис. 3.4. На вертикальной стойке крепятся два кронштейна. Верхний неподвижный кронштейн снабжен воротком 1 для крепления и регулировки бифилярного подвеса, электромагнитом 2 для фиксации маятника в верхнем положении и фотодатчиком 3, включающий секундомер. На подвижном кронштейне закреплен фотодатчик 4, выключающий секундомер. Шкала секундомера 5 вынесена на лицевую панель прибора.

Кнопка “Сеть” включает питание установки, кнопка “Сброс” обнуляет показания секундомера. При нажатии на кнопку “Пуск” отключается электромагнит, и маятник приходит в движение.

Массу и момент инерции маятника можно менять при помощи сменных колец, надеваемых на диск. Длина нити должна быть такой, чтобы нижняя кромка маятника была на 1–2 мм ниже оптической оси нижнего фотодатчика. Ось маятника должна быть горизонтальной. Длина нити (высота падения) определяется по шкале, нанесенной на вертикальной стойке.

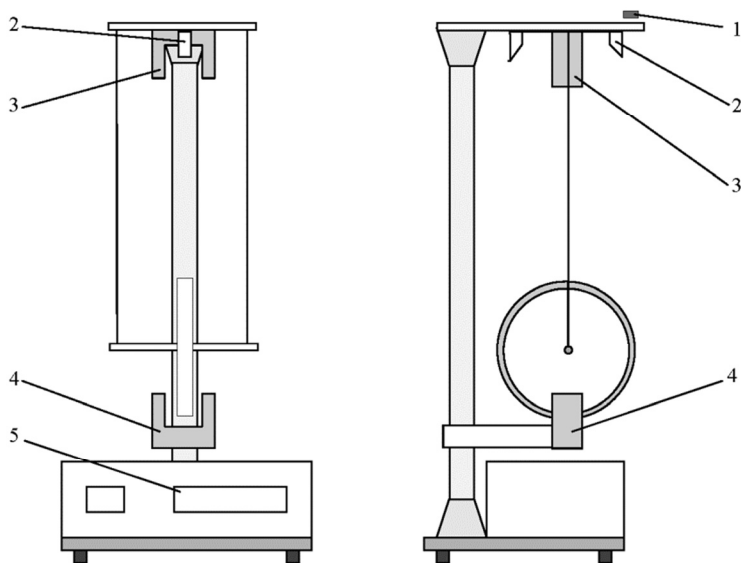


Рис. 3.4. Внешний вид лабораторной установки

Параметры установки:

радиус оси – 5 мм,

радиус нити – 0,6 мм,

радиус диска – $R_1 = 42,5$ мм,

внешний радиус кольца – $R_2 = 52,5$ мм.

Значения остальных параметров указаны на элементах маятника.

Задания и порядок их выполнения

Задание 1. Экспериментальное определение момента инерции маятника Максвелла (стандартный опыт).

Провести измерение времени падения маятника не менее 10 раз. Вычислить среднее время падения, а по нему при помощи формулы (3.8) момент инерции. Провести стандартную обработку результатов измерений. Погрешность измерения высоты принять равной $\theta_h = 2$ мм, погрешность измерения времени $\theta_t = 0,001$ с.

Внимание! При проведении опыта нужно следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось аккуратно в один слой. Опыты, в которых это условие не соблюдается, в дальнейшем не учитывать.

Описанная выше процедура является стандартным опытом в данной работе. Ее нужно провести для маятника с каждым из сменных колец.

Задание 2. Исследование зависимости момента инерции маятника Максвелла от высоты, с которой происходит его падение.

Для указанного преподавателем кольца провести стандартный опыт для трех разных высот h . Экспериментально убедиться в том, что момент инерции маятника не зависит от начальной высоты, и в отчете объяснить, почему. Получить среднее значение момента инерции маятника по результатам трех серий, проведенных при разных высотах.

При проведении математической обработки результатов измерений в первом и втором заданиях нужно исходить из того, что момент инерции является случайной величиной.

Задание 3. Теоретический расчет момента инерции маятника Максвелла.

По формулам (3.10), (3.11) вычислить моменты инерции диска, колец и маятника в целом во всех случаях. Сравнить расчетные значения с измеренными и объяснить расхождения, если они возникнут.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции абсолютно твердого тела?
2. Чему равны моменты инерции диска и кольца?
3. Чему равна кинетическая энергия абсолютно твердого тела?
4. Запишите закон сохранения энергии для маятника Максвелла.
5. Является ли падение маятника равноускоренным?
6. Почему, опустившись до нижней точки, маятник снова начинает подниматься вверх?
7. Какая энергия маятника больше – кинетическая поступательного движения или кинетическая вращения? (При ответе на этот вопрос воспользоваться полученным значением момента инерции маятника и известным значением радиуса оси маятника.)
8. Как зависит время падения маятника Максвелла от его массы?
9. Как изменится время падения, если маятник выполнить из менее плотного, чем сталь материала (например, алюминия)?

Лабораторная работа № 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Цель работы: определение ускорения свободного падения, исследование момента инерции тонкого стержня.

Теоретические сведения

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси. Плоскость, проходящая через эту ось и центр тяжести вертикальна в положении равновесия. При отклонении маятника от этого положения возникают моменты сил, стремящиеся вернуть маятник в положение равновесия.

По основному уравнению динамики вращательного движения абсолютно твердого тела сумма моментов всех сил, приложенных к телу

$$\sum_i \vec{M}_i = I\vec{\epsilon}. \quad (4.1)$$

В этой формуле I – момент инерции маятника относительно оси подвеса, $\vec{\epsilon}$ – его угловое ускорение, а $\sum \vec{M}_i$ – сумма моментов всех сил, к этому маятнику приложенных.

На рис. 4.1 изображен физический маятник. Ось вращения отмечена буквой O , центр тяжести буквой C . Обозначим $\vec{OC} = \vec{b}$. К точке C приложены две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} .

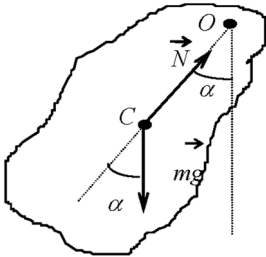


Рис. 4.1. Физический маятник

Поскольку сила \vec{N} направлена вдоль отрезка $[OC]$, ее момент относительно оси O равен нулю, а сумма моментов этих сил

$$\vec{OC} \times m\vec{g} + \vec{OC} \times \vec{N} = \vec{OC} \times m\vec{g} = \vec{b} \times m\vec{g}.$$

Подставим результат в (4.1) и получим

$$I\vec{\epsilon} = \vec{b} \times m\vec{g}.$$

Спроектируем полученное выражение на направление оси вращения.

$$I\varepsilon = -mgb \cdot \sin\alpha.$$

Знак минус показывает, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия. Ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний, для которых $\sin\alpha = \alpha$, и учтем, что угловое ускорение есть вторая производная от угла отклонения по времени $\varepsilon = \alpha''(t)$,

$$\alpha''(t) + \frac{mgb}{I} \cdot \alpha(t) = 0. \quad (4.2)$$

Получившееся уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонических колебаний пружинного маятника

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (4.3)$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{mgb}{I}}$. (4.4)

Следовательно, при малых углах отклонения от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.5)$$

период которых зависит от момента инерции маятника относительно оси O , его массы и от расстояния между центром тяжести и этой осью:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.5) содержит две константы: амплитуду A и начальную фазу φ_0 , значения которых определяются из начальных условий. Если секундомер включить в момент прохождения маятником положения равновесия, то $\varphi_0 = -90^\circ$ и уравнение (4.5) переписется в виде:

$$\alpha(t) = A \sin(\omega t). \quad (4.7)$$

В случае, когда физический маятник, совершающий малые колебания, представляет собой небольшое тело, подвешенное на легкой

длинной нерастяжимой нити, его можно считать математическим маятником. *Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, совершающая под действием силы тяжести малые колебания. Такие колебания являются гармоническими и описываются функциями (4.5) или (4.7).

Момент инерции математического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен $I = ml^2$, где l – длина нити. Подставляя это выражение в (4.4) и (4.6), найдем циклическую частоту и период колебаний математического маятника.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (4.8)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.9)$$

Таким образом, частота и период колебаний математического маятника зависят от его длины и ускорения свободного падения. От массы маятника они не зависят.

Сравнивая друг с другом формулы (4.6) и (4.9), замечаем, что математический маятник с длиной нити

$$L = \frac{I}{mb}. \quad (4.10)$$

будет иметь такой же период колебаний, что и физический маятник. Величина, определяемая выражением (4.10), называется *приведенной длиной физического маятника*.

Рассмотрим физический маятник – тонкий длинный стержень. Найдём его момент инерции. Момент инерции любого твёрдого тела определяется относительно оси, вокруг которой происходит вращение или такое вращение гипотетически допустимо. Момент инерции материальной точки относительно оси, находящейся на расстоянии r от неё :

$$I = mr^2. \quad (4.11)$$

Направим вдоль стержня ось ox , начало координат поместим в середине. Выделим короткий участок стержня длиной dx в точке с координатой x (рис. 4.2).

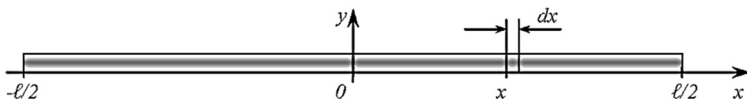


Рис. 4.2. К выводу момента инерции тонкого стержня

Масса стержня m , его длина l . Момент инерции выделенного фрагмента стержня с массой dm :

$$dI = dm x^2.$$

Массу выделенного фрагмента dm можно найти из пропорции:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l}; \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{m}{l} dx.$$

Таким образом, для момента инерции фрагмента стержня имеем

$$dI = \frac{m x^2 dx}{l}.$$

Момент инерции всего стержня I_0 можно найти, проинтегрировав это выражение по всей длине от $-\ell/2$ до $\ell/2$.

$$I_0 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m x^2 dx}{l} = \frac{m}{l} \cdot \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{m x^3}{3l} \Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m}{3l} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{m}{3l} \cdot \frac{\ell^3}{8} = \frac{m \ell^2}{12}.$$

Мы получили момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, который в дальнейшем будем называть I_0 .

$$I_0 = \frac{m \ell^2}{12} \tag{4.12}$$

Во всех формулах, использованных раньше, рассматривался момент инерции стержня относительно оси подвеса, не проходящей через центр тяжести. Эти величины связаны друг с другом теоремой Штейнера $I = I_0 + m b^2$.

$$I = \frac{m \ell^2}{12} + m b^2, \tag{4.13}$$

где b – расстояние между центром тяжести и осью. Если ось проходит через край стержня, т.е. $b = \ell/2$, то момент инерции относительно нее

$$I_{\ell} = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}, \text{ т. е.}$$

$$I_{\ell} = \frac{m\ell^2}{3}. \quad (4.14)$$

Отметим, что формулы (4.12) и (4.14) являются частными случаями формулы (4.13) при $b = 0$ и при $b = \ell/2$. Вернёмся к общему случаю: подставим (4.13) в (4.6), преобразуем и получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12} + mb^2}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\ell^2}{12} + b^2}{gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}. \quad (4.15)$$

На рис. 4.3 приведён график получившейся зависимости. Видно, что у неё есть минимум при $b = 15$ – 18 см. Проведём анализ функции $T(b)$, найдём минимальное значение периода T и соответствующую координату b .

$$T'(b) = \frac{\left(\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}\right)'_b}{4\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}} = \frac{24b12gb - 12g(\ell^2 + 12b^2)}{(12gb)^2} = \frac{12b^2 - \ell^2}{48gb^2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + 12b^2}{12gb}}}.$$

Приравняем производную нулю: $T'(b) = 0; \Rightarrow 12b^2 = \ell^2; \Rightarrow b = \ell/\sqrt{12}$. Подставим получившееся значение b в формулу (4.15) и после вычислений получим минимальный период колебаний тонкого стержня.

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{3}g}}. \quad (4.16)$$

В написанной формуле ℓ – длина всего стержня, которая может быть без труда измерена, причём очень точно. Период колебаний измеряется тоже весьма точно.

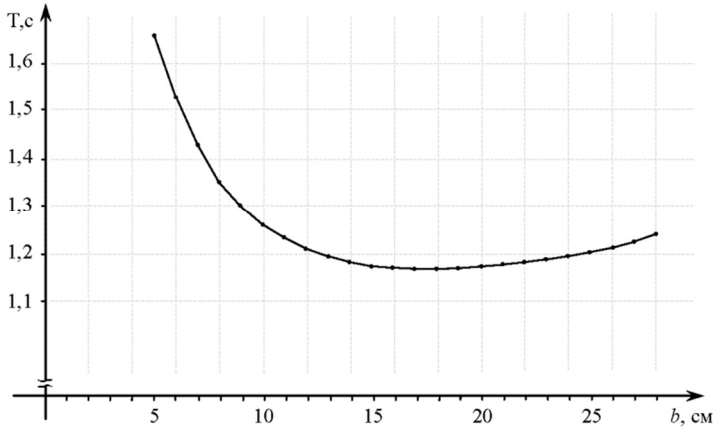


Рис. 4.3. График зависимости периода колебаний от параметра b

Для измерения ускорения свободного падения нужно измерить периоды колебаний физического маятника относительно нескольких осей, найти минимум, и по соответствующему периоду T_{\min} и по длине всего стержня ℓ найти g по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2 \sqrt{3}}. \quad (4.17)$$

Снова вернёмся к уравнению (4.15) и перепишем его в виде

$$\frac{T^2 b}{4\pi^2} = \frac{\ell^2}{12g} + \frac{b^2}{g}. \quad (4.18)$$

Введём обозначения:

$$Y = \frac{T^2 b}{4\pi^2}, \quad Y_0 = \frac{\ell^2}{12g}, \quad k = \frac{1}{g}, \quad z = b^2 \quad (4.19)$$

и получим функцию $Y(z)$ (рис. 4.4):

$$Y = Y_0 + k \cdot z. \quad (4.20)$$

Физический смысл величин: $Y = I/m$ – момент инерции тела, делённый на его массу; $Y_0 = I_0/m$ – момент инерции тела относительно центра тяжести стержня, делённый на его массу.

Угловым коэффициентом этой функции $k = 1/g$. Значения этой функции Y и её аргумента z могут быть вычислены по измеренным значениям T и b . Функция (4.20) – это другая форма записи функции (4.13).

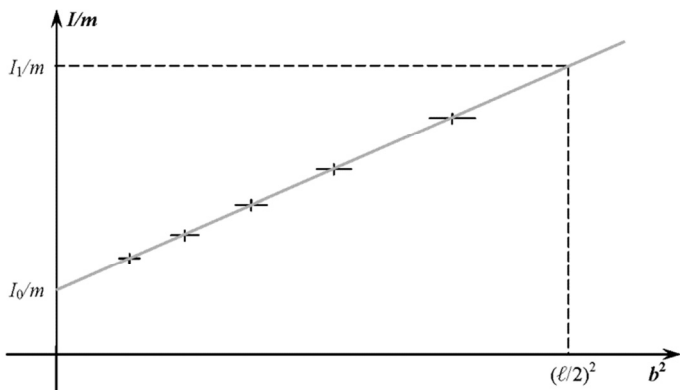


Рис. 4.4. Зависимость приведенного момента инерции от положения оси маятника

Лабораторная установка

Внешний вид установки приведен на рис. 4.5. Установка состоит из математического и физического маятников. Математический маятник выполнен в виде металлического шарика 1 на бифилярном подвесе 2. Длина подвеса измеряется линейкой на стойке 3.

Физический маятник есть металлический стержень 4, на котором крепится подвижная ось – опорная призма 5. Фотодатчик 6 на нижнем кронштейне сигнализирует о прохождении маятником положения равновесия. Время измеряется миллисекундометром, а число колебаний специальным счетчиком. Прибор включается нажатием кнопки “Сеть”. Кнопка “Сброс” служит для установки нуля. Нажатие кнопки “Стоп” выключает прибор после окончания текущего колебания. Для упрощения измерения расстояния на стержне через каждый сантиметр нанесены риски. Кроме того, на установке имеется специальная измерительная линейка.

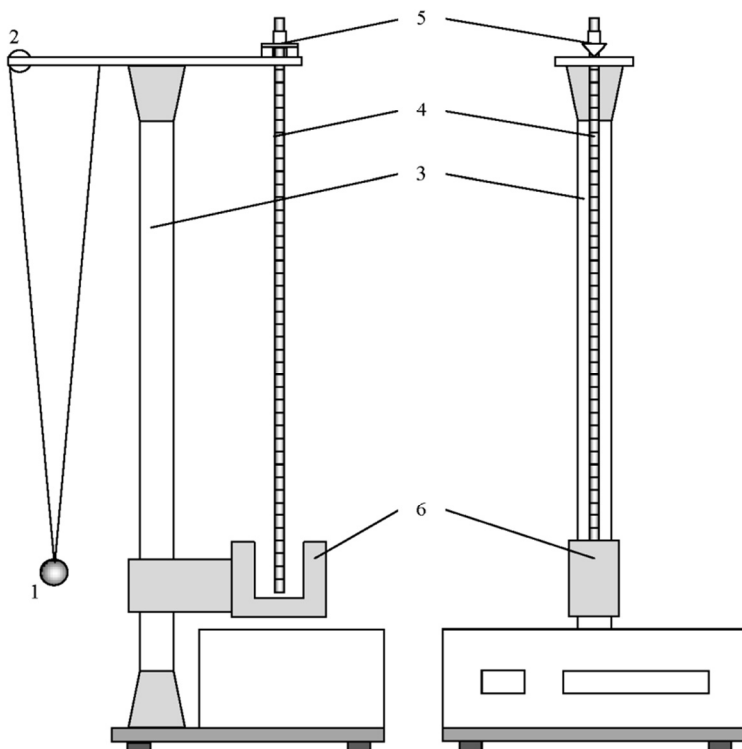


Рис. 4.5. Внешний вид лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

Задание 1. Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

Верхнюю планку следует развернуть так, чтобы математический маятник оказался над фотодатчиком, таким образом, чтобы в положении равновесия он пересекал оптическую ось.

Перед началом измерений нажимают кнопку “Сброс”. Шарик отклоняют на небольшой угол $\sim 4-5^\circ$ и осторожно без толчка отпускают. Когда на счетчике колебаний появляется цифра 9, нажимают кнопку “Стоп”. В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний, и найти их средний период будет очень просто.

Определение периода колебаний проводится таким методом не менее 5 раз при различных длинах маятника ℓ . Для каждого значения периода и соответствующей длины при помощи формулы (4.9), переписанной в явном виде:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2},$$

находится ускорение свободного падения. Необходимо провести стандартную математическую обработку результатов измерения g , считая все вычисленные значения случайными величинами. При определении систематической погрешности считать $\theta_\ell = 0,5$ см, $\theta_T = 0,001$ с.

Задание 2. Определение ускорения свободного падения при помощи физического маятника.

Верхнюю планку повернуть так, чтобы нижняя часть оси физического маятника проходила через прорезь фотодатчика. Отклонить маятник на небольшой угол $\sim 4-5^\circ$ и осторожно без толчка отпустить его. Нажать кнопку “Сброс”; включится секундомер и счетчик колебаний. Когда на счетчике колебаний появится цифра 9, нажать кнопку “Стоп”. В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний и найти их средний период T_0 будет очень просто.

Измерения провести для шести положений оси на расстояниях 10–15 см от края стержня по три раза в каждом положении. Во время измерений заполнять табл. 4.1.

Таблица 4.1

x , см	10	11	12	13	14	15
T_1 , с						
T_2 , с						
T_3 , с						
T_{cp} , с						

Анализируя данные таблицы нужно найти минимум среднего периода колебаний и по формуле (4.17) определить ускорение свободного падения.

Необходимо провести стандартную математическую обработку результатов измерения g , считая данные каждого столбца случайными величинами T_1, T_2, T_3 . При определении систематической погрешности считать $\theta_\ell = 0,5$ мм, $\theta_T = 0,001$ с.

Задание 3. Изучение свойств момента инерции тонкого стержня.

Необходимо получить серию из 6–8 измерений $T(b)$, где b – расстояние между центром масс тела и осью подвеса (рис. 4.6).

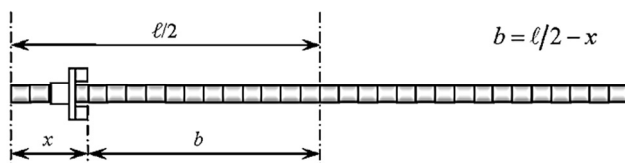


Рис. 4.6. Положение оси подвеса маятника

Значения b нужно менять во всём диапазоне значений – от $b_{\min} = 2$ см до $b_{\max} = 27$ см. Результаты измерений и вычислений следует оформить в виде табл. 4.2. Обрабатывать следует результаты, полученные во второй и в третьей частях работы.

Величину Y следует вычислять по формуле (4.19).

Формулу для вычисления систематической погрешности θ_Y нужно получить самостоятельно.

При вычислениях погрешности использовать $\theta_b = 0,5$ мм, $\theta_T = 0,001$ с.

Таблица 4.2

№	1	2	3	4	5	6 ...
$T, \text{с}$						
$x, \text{м}$						
$b, \text{м}$						
$Y, \text{м}^2$						
$\theta_Y, \text{м}^2$						

Измеренные и вычисленные результаты из табл. 4.2 нужно отложить на графике, как на рис. 4.2. Через получившиеся точки (крестики) на графике нужно провести прямую линию. Эта линия должна быть экстраполирована, т.е. продолжена до значений $z = 0$ и $z = (\ell/2)^2$.

Анализируя построенный график нужно убедиться в следующем:

получившаяся зависимость линейна;

$$I_1/I_0 = 4.$$

Контрольные вопросы

1. Какие тела называются математическим и физическим маятниками?

2. Напишите дифференциальные уравнения колебаний физического и пружинного маятников, а также их решения.

3. Каким образом по начальному отклонению и начальной скорости маятника найти амплитуду и начальную фазу колебаний?

4. Напишите формулы для периодов и частот колебаний пружинного, физического и математического маятников.

5. В чем состоит содержание теоремы Штейнера?

6. Что называется приведенной длиной физического маятника?

7. Почему значение g во втором задании находится без использования величины b ?

8. Почему I_1 должен быть в четыре раза больше, чем I_0 ?

Лабораторная работа № 5

КРУТИЛЬНЫЙ МАЯТНИК

Цель работы: определение моментов инерции тел сложной формы.

Теоретические сведения

Основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела записывается в виде

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (5.1)$$

В этом выражении M – равнодействующий момент внешних сил, приложенных к телу, I – момент инерции этого тела, ε – его угловое ускорение. Если к телу приложен момент только одной внешней силы, уравнение (5.1) можно переписать в скалярной форме, поскольку равенство двух векторов возможно лишь при равенстве их длин:

$$I\varepsilon = M. \quad (5.2)$$

В дальнейшем рассмотрим именно такой случай; исследуемое тело закрепим на упругой проволоке, натянутой вертикально. При повороте тела – маятника на некоторый угол β возникает момент упругих сил M , стремящийся вернуть его в положение равновесия:

$$M = -C\beta. \quad (5.3)$$

Знак минус показывает, что момент сил кручения проволоки стремится вернуть маятник в положение равновесия. Коэффициент пропорциональности C в этом выражении называется *модулем кручения проволоки*. Учитывая, что угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота по времени – $\varepsilon = d^2\beta/dt^2$, основное уравнение динамики вращательного движения переписывается в виде

$$\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} + \frac{C}{I}\beta(t) = 0. \quad (5.4)$$

Получилось дифференциальное уравнение, связывающее угол отклонения маятника, как функцию времени, со второй произ-

водной этой функции по времени. Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонических колебаний пружинного маятника

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (5.5)$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{C/I}$. (5.6)

Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания

$$\beta(t) = \beta_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) \quad (5.7)$$

с периодом $T = 2\pi\sqrt{I/C}$. (5.8)

Уравнение (5.7) содержит две константы – амплитуду β_m и начальную фазу φ_0 , которые определяются из начальных условий.

Если период крутильных колебаний известен, то с его помощью можно найти момент инерции тела:

$$I = \frac{C}{4\pi^2} T^2. \quad (5.9)$$

Именно таким образом определяются моменты инерции твердых тел в настоящей работе. Поскольку исследуемое тело закреплено на подвеске, в левой части этого уравнения величину I нужно заменить суммой моментов инерции тела I и подвески I_0 . В итоге получаем:

$$I = \frac{C}{4\pi^2} \cdot T^2 - I_0. \quad (5.10)$$

Для того, чтобы воспользоваться этой формулой, нужно знать значения двух констант: момента инерции подвески I_0 и модуля кручения проволоки C . Эти значения можно определить, измерив периоды крутильных колебаний нескольких тел с известными моментами инерции, отложив эти данные на графике I от T^2 , и проведя через них прямую линию, как это показано на рис. 5.1.

График, построенный по набору экспериментальных точек, называется градуировочным. В нашем случае он представляет собой прямую линию с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha = C/(4\pi^2)$ отсекающую на вертикальной оси отрезок $-I_0$. Именно так графически находится эта величина. Найдя экспериментально угловой коэффициент градуировочной прямой $k = \operatorname{tg}\alpha$, можно найти модуль кручения проволоки

$$C = 4\pi^2 \operatorname{tg}\alpha. \quad (5.11)$$

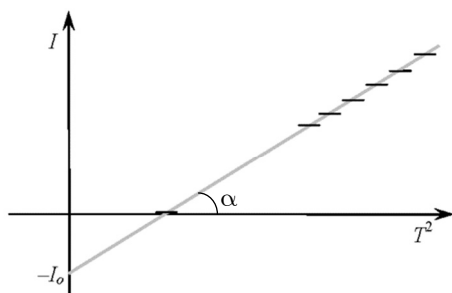


Рис. 5.1. Градуировочный график

Теперь, когда оба параметра уравнения (5.10) найдены, и градуировочный график построен, момент инерции любого твердого тела, закрепленного в подвеске, может быть легко вычислен или найден графически по измеренному периоду крутильных колебаний.

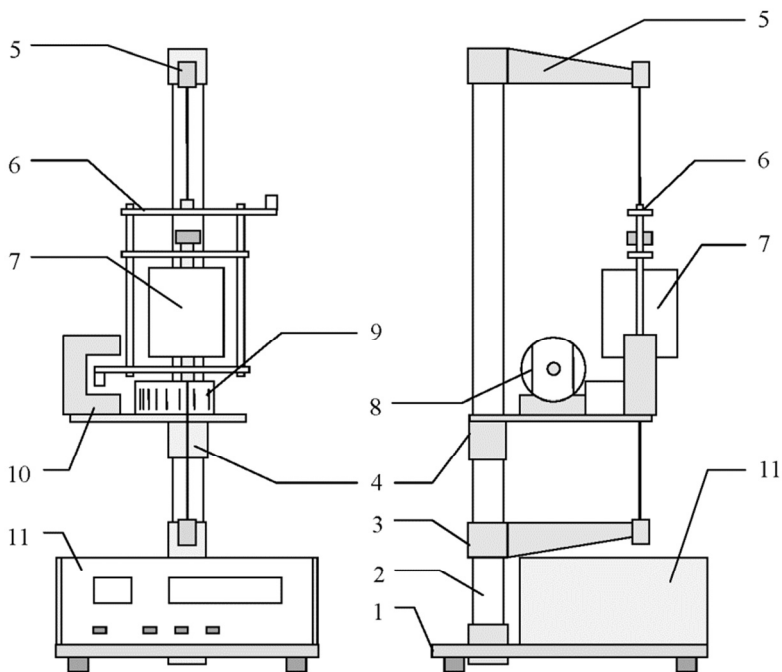


Рис. 5.2. Внешний вид лабораторной установки

Лабораторная установка

Внешний вид установки приведен на рис. 5.2. На основании 1 закреплена стойка 2 с тремя кронштейнами 3, 4 и 5. Между кронштейнами 3 и 5 натягивается стальная проволока к которой крепится рамка 6, в которой могут быть закреплены грузы разной формы 7. На кронштейне 4 крепятся электромагнит 8, удерживающий рамку в начальном положении, угловая шкала 9 и фотодатчик 10, фиксирующий прохождение маятником положения равновесия. Электрический сигнал с фотодатчика поступает на миллисекундомер и счетчик колебаний, расположенные в измерительном блоке 11 на основании прибора 1.

Установка включается нажатием кнопки “Сеть”. Кнопка “Сброс” обнуляет показания секундомера и счетчика колебаний. Кнопка “Пуск” отключает электромагнит. Секундомер и счетчик колебаний запускаются при первом после нажатии кнопки “Пуск” пересечении оси фотодатчика. Выключаются эти приборы нажатием кнопки “Стоп” после окончания очередного колебания.

Задания и порядок их выполнения

До начала измерений следует ознакомиться с установкой, научиться надежно закреплять грузы, чтобы они не проскальзывали в рамке во время колебаний, и правильно измерять период крутильных колебаний. Для измерения периода нужно во время колебаний маятника нажать кнопку “Пуск”, после чего включатся миллисекундомер и счетчик колебаний. Когда на счетчике появится цифра 9, нужно нажать кнопку “Стоп”. В таком случае прибор измерит время 10 полных колебаний и найти их средний период будет очень просто. Описанная процедура позволяет определять период крутильных колебаний с систематической погрешностью $\theta_T = 0,0005$ с.

Задание 1. Построение градуировочного графика. Определение модуля кручения проволоки и момента инерции пустой рамки.

Для выполнения этого задания нужно измерить периоды крутильных колебаний рамки с закрепленными в ней телами, моменты инерции которых известны. В качестве таких тел в настоящей работе могут быть использованы параллелепипеды. Моменты инерции этих тел относительно разных осей указаны на рис. 5.3.

Кроме этих тел следует измерить период колебаний пустой рамки, считая, что в ней закреплено тело с моментом инерции, равным нулю.

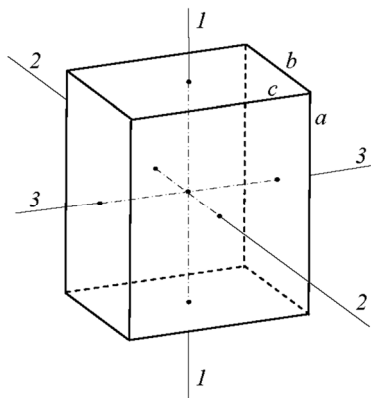


Рис. 5.3. Моменты инерции параллелепипеда

Нужно провести измерения периодов колебаний для разных тел и рассчитать их моменты инерции. Результаты измерений и вычислений нужно отложить на графике I от T^2 , как это показано на рис. 5.1. График нужно строить на листе миллиметровой бумаги, форматом А4 или больше.

$$I_1 = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2). \quad (5.12)$$

Около каждой точки нужно отложить систематическую погрешность измерения квадрата периода

$$\theta_{T^2} = 2T\theta_T, \quad (5.13)$$

систематическую погрешность моментов инерции, вычисленных по формулам (5.12), учитывать и откладывать на графике не нужно.

Через получившийся набор точек следует провести прямую линию и по ее параметрам найти момент инерции пустой подвески и модуль кручения проволоки. Провести стандартную обработку графика и найти погрешности найденных из этого графика величин. Нужно иметь в виду, что случайные ошибки в этом опыте

связаны, в первую очередь, со слабой зависимостью периода крутильных колебаний от амплитуды. Определять их не имеет смысла.

Задание 2. Определение моментов инерции сложных тел.

По указанию преподавателя это задание может выполняться в одном из перечисленных вариантов:

определение момента инерции тела по градуировочному графику.

вычисление момента инерции тела по теоретической формуле.

В обоих случаях полученные от преподавателя тела следует надежно закрепить в подвеске, измерить периоды их крутильных колебаний и вычислить величины T^2 и θ_{T2} . По графику или по формуле (5.10) найти момент инерции тела сложной формы и его систематическую погрешность. Случайную погрешность в данной работе определять не имеет смысла, поэтому, полная погрешность равна систематической.

Телами с неизвестными моментами инерции в этом задании могут быть тела как неправильной, так и правильной геометрической формы. Последние закрепляются в подвеске косо, так чтобы ось вращения проходила через центр тяжести не параллельно ребрам.

Задание 3. Теоретическое вычисление моментов инерции косо подвешенных тел.

Для выполнения этого задания нужно взять параллелепипед, который использовался для построения градуировочной прямой. Его моменты инерции относительно осей, проходящих через центр параллельно ребрам I_1, I_2, I_3 известны. Если же ось вращения проходит через центр тяжести тела и образует с первой осью угол δ_1 , со второй δ_2 , а с третьей δ_3 , то момент инерции этого тела относительно такой оси можно вычислить по формуле

$$I = I_1 \cos^2 \delta_1 + I_2 \cos^2 \delta_2 + I_3 \cos^2 \delta_3. \quad (5.14)$$

По известным длинам ребер нужно вычислить косинусы трех углов, рассчитать момент инерции по этой формуле и сравнить результат с полученным во втором задании.

Контрольные вопросы

1. Как записывается основное уравнение динамики для поступательного и для вращательного движений?
2. Что называется моментом инерции абсолютно твердого тела?
3. Что называется модулем кручения проволоки?
4. Когда возникают незатухающие крутильные колебания?
5. Что называется градуировочным графиком? Как он строится?
6. Почему в настоящей работе градуировочная линия прямая?
7. Как найти неизвестный момент инерции тела по градуировочному графику?
8. По известным длинам ребер вычислите величины $\cos \delta_1$, $\cos \delta_2$ и $\cos \delta_3$, для всех возможных “косых” осей.

Лабораторная работа № 6

МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

Цель работы: определение момента инерции маятника Обербека; изучение свойств момента инерции.

Теоретические сведения

Маятник Обербека представляет собой маховик крестообразной формы, по четырем одинаковым взаимно перпендикулярным стержням которого можно перемещать и закреплять одинаковые грузы. Схема маятника показана на рис. 6.1. На шкив 1, закрепленный на оси маятника, намотана нить, перекинутая через шкив 2. К концу нити прикреплен груз m , под действием которого нить разматывается и приводит маятник во вращательное движение. Таким образом, одновременно происходят три движения: поступательное движение груза m и два вращательных движения – маятника и шкива 2. Ввиду малости момента инерции второго шкива его вращение в учитывать не будем.

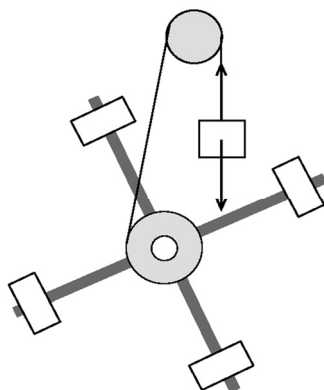


Рис. 6.1. Маятник Обербека

Маятник Обербека, имеющий момент инерции I относительно своей оси, вращается относительно нее с угловым ускорением ε под действием момента силы натяжения T нити. Такое движение

подчиняется основному уравнению динамики вращательного движения абсолютно твердого тела.

$$I\bar{\epsilon} = \bar{M}. \quad (6.1)$$

Поскольку равенство двух векторов возможно лишь при равенстве их длин, уравнение (6.1) можно переписать в скалярной форме:

$$I\epsilon = M. \quad (6.2)$$

Поступательное движение груза m под действием силы тяжести mg и силы натяжения нити T подчиняется основному уравнению динамики – второму закону Ньютона.

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{T}. \quad (6.3)$$

Проектируем это уравнение на направление нити и получаем

$$ma = mg - T,$$

откуда находим силу натяжения нити T и создаваемый ею момент:

$$T = m(g - a), \quad M = Tr = mr(g - a). \quad (6.4)$$

Здесь и в дальнейшем r – радиус шкива 1.

Ускорение падающего груза равно тангенциальному (или касательному) ускорению точек обода шкива маятника, поэтому оно связано с угловым ускорением ϵ маятника формулой

$$a = \epsilon r. \quad (6.5)$$

Подставляем (6.4) и (6.5) в (6.2) и получаем уравнение

$$Ia = mr^2(g - a),$$

из которого выразим момент инерции маятника Обербека

$$I = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right). \quad (6.6)$$

Если груз m начинает движение с постоянным ускорением из состояния покоя, то пройденный им за время t путь будет равен $h = at^2/2$. Отсюда находим ускорение груза

$$a = 2h/t^2, \quad (6.7)$$

подставляем его в (6.6) и получаем конечную формулу

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (6.8)$$

Таким образом, задав массу груза m , радиус шкива r , высоту h и измерив время падения груза t , можно по формуле (6.8) экспериментально определить момент инерции I маятника Обербека.

Момент инерции маятника можно рассчитать теоретически, он равен сумме моментов инерции отдельных частей маятника: четырех стержней – I_C , четырех грузов – I_Γ и шкива – I_0 .

$$I = 4I_c + 4I_\Gamma + I_0.$$

Момент инерции стержня I_C относительно оси, проходящей через его конец, вычисляется по формуле:

$$I_c = \frac{1}{3}m_1l^2,$$

где m_1 – масса стержня, l – его длина. Грузы m_2 , закрепленные на расстоянии R от оси маятника, считаем материальными точками, поэтому

$$I_\Gamma = m_2R^2.$$

Момент инерции I_0 шкива маятника мал по сравнению с I_C и I_Γ , его величиной пренебрегаем. Таким образом, окончательно имеем:

$$I = \frac{4}{3}m_1l^2 + 4m_2R^2. \quad (6.9)$$

Лабораторная установка

Внешний вид установки приведен на рис. 6.2. На среднем кронштейне крепится электромагнит 1, фиксирующий маятник в неподвижном состоянии. На нем же расположен двухступенчатый шкив 2 и крестовина 3, состоящая из четырех металлических стержней с нанесенными через 1 см рисками. На стержнях могут перемещаться и фиксироваться грузы 4, что позволяет изменять момент инерции маятника.

На верхнем и нижнем кронштейнах укреплены фотодатчики 5, сигналы с которых включают и выключают миллисекундомер. Пройденный путь измеряется линейкой 6 на вертикальной стойке. При нажатой кнопке “Сеть” горят лампочки фотодатчика и цифровые индикаторы миллисекундомера. Электромагнит фиксирует

положение крестовины. Нажатие кнопки “Сброс” обнуляет данные. Нажатие кнопки “Пуск” отключает электромагнит и запускает миллисекундомер.

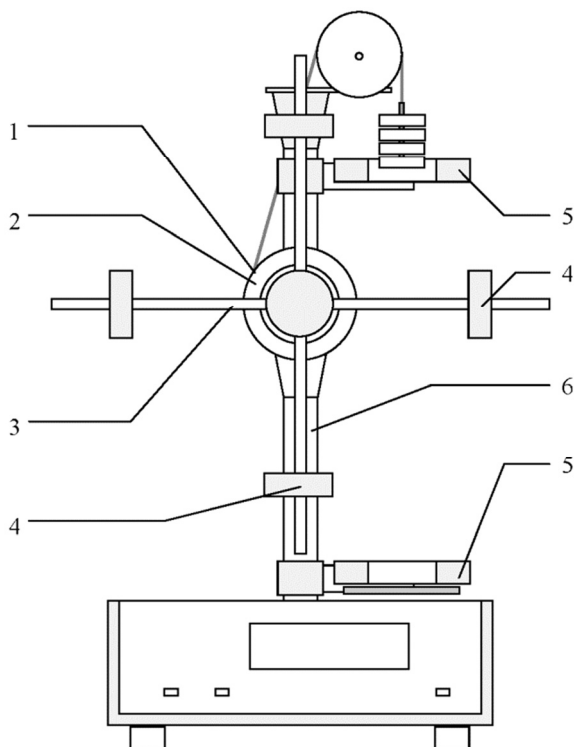


Рис. 6.2. Внешний вид лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

Прежде чем приступить к выполнению работы нужно обязательно ознакомиться с лабораторной установкой:

составить таблицу технических характеристик, систематических погрешностей приборов и параметров установки;

убедиться, что центр масс маятника находится на оси вращения;

сделать два-три пробных опыта, на которых можно освоить методику проведения измерений.

Задание 1. Экспериментальное определение момента инерции.

Установить грузы на стержнях на заданных расстояниях R от центра.

Задать радиус шкива r , массу груза m и установить высоту h .

Провести опыт 5 раз, измерив время падения груза t . Нижний край груза нужно обязательно установить на оси верхнего фотоэлемента, чтобы секундомер включался одновременно с началом движения.

Для среднего значения времени падения t по формуле (6.8) найти момент инерции. Провести математическую обработку серии измерений *неслучайной величины* I . Считать погрешность высоты $\theta_h = 2$ мм, а погрешность расстояния между осью маятника и грузом $\theta_R = 1$ мм.

Задание 1 является стандартным опытом в этой работе. Оно обязательно выполняется каждым студентом и является основой для следующих заданий.

Задание 2. Теоретическое вычисление момента инерции маятника.

Вычисление нужно провести по формуле (6.9) с использованием указанных параметров установки. Теоретический результат следует сравнить с полученным на опыте и либо сделать заключение о допустимости имеющихся расхождений, либо объяснить эти расхождения.

Различия теоретического и экспериментального значений могут быть связаны с неточной установкой начального положения верхнего груза. Неточность в установке даже на 3–5 мм недопустима.

Задание 3. Исследование зависимости момента инерции от внешних параметров опыта (радиус шкива, масса подвешенного груза, начальная высота).

Убедиться, что момент инерции маятника Обербека не зависит от радиуса шкива r , на который наматывается нить. Для этого нужно провести стандартный опыт при двух радиусах шкива и сравнить получившиеся результаты.

Убедиться, что момент инерции маятника Обербека не зависит от массы груза m , раскручивающего маятник. Для этого нужно провести стандартный опыт при трех-пяти различных массах груза m и сравнить получившиеся результаты.

Убедиться, что момент инерции маятника Обербека не зависит от высоты h , с которой начинает падать груз. Для этого нужно провести стандартный опыт при трех-пяти различных высотах h и сравнить получившиеся результаты.

Можно считать, что момент инерции не зависит внешних параметров опыта r , t и h , если при различных значениях этих параметров значения момента инерции постоянны в пределах систематической погрешности измерений θ_1 .

Задание 4. Исследование зависимости момента инерции от расстояния между осью маятника и грузом.

Выполнить стандартный опыт при 3–5 различных положениях грузов R . Результаты измерений нанести на график $I(R^2)$ (рис. 6.3). Убедиться, что наблюдаемая зависимость линейная, и объяснить, почему.

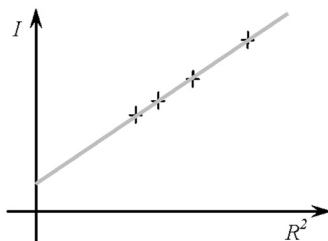


Рис. 6.3. Зависимость момента инерции от расстояния

Пояснить смысл величины, отсекаемой при $R \rightarrow 0$ на оси I и тангенса угла наклона прямой.

Контрольные вопросы

1. Как связаны линейные и угловые величины при вращательном движении?
2. Что называется моментом импульса и моментом силы?
3. Как записывается основное уравнение динамики для поступательного и для вращательного движений?
4. В чем состоит аналогия между формулами для поступательного и вращательного движений?
5. Что называется моментом инерции абсолютно твердого тела? Каков его физический смысл?
6. Сформулировать правило, по которому следует выбирать расстояния R до грузов.

Лабораторная работа № 7

НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК

Цель работы: изучение колебаний наклонного маятника, определение коэффициента трения качения.

Теоретические сведения

Рассмотрим шар, который под действием силы F , приложенной к его центру, катится без проскальзывания по поверхности (рис. 7.1). Кроме этой силы нужно учесть еще F_c – силу сцепления с поверхностью, без которой шар не катился, а скользил бы по опоре. Эта сила приложена в точке контакта O . Силу трения качения учитывать не будем. Запишем уравнения динамики абсолютного твердого тела:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i, \quad (7.1)$$

$$I\vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_i. \quad (7.2)$$

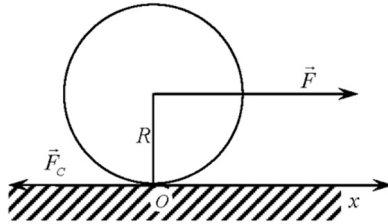


Рис. 7.1. Силы, приложенные к шару

В этих формулах m – масса шара, I – его момент инерции; \vec{a} и $\vec{\varepsilon}$ – линейное и угловое ускорения этого шара; а $\sum \vec{F}_i$ и $\sum \vec{M}_i$ – соответственно, суммы всех сил и моментов всех сил, к нему приложенных. Вращение шара происходит вокруг его центра, поэтому моменты всех сил будем рассматривать относительно этой точки. Плечо силы F_c равно радиусу R шара. Плечо силы F равно нулю, ее момент – тоже.

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{R} \times \vec{F}_c; \quad \vec{R} \perp \vec{F}_c; \quad \Rightarrow \quad I\varepsilon = RF_c.$$

Для тела, катящегося без проскальзывания, угловое ускорение связано с линейным соотношением $\varepsilon = a/R$. Момент инерции шара – $I = 0,4mR^2$. Подставим все это в получившееся уравнение:

$$0,4mR^2 a/R = RF_c; \Rightarrow 0,4ma = F_c.$$

Объединим это выражение с проекцией на ось (ox) уравнения (7.1):

$$\begin{cases} 0,4ma = F \\ ma = F - F_c \end{cases}; \Rightarrow ma = F - 0,4ma; \Rightarrow 1,4ma = F.$$

Мы получили выражение, связывающее ускорение шара, катящегося без проскальзывания, с приложенной к нему силой.

$$ma = \frac{5}{7}F. \quad (7.3)$$

Ускорение шара получилось меньше, чем для тела такой же массы, скользящего без трения под действием той же силы. Причина в том, что действующая на шар сила не только разгоняет, но и раскручивает его.

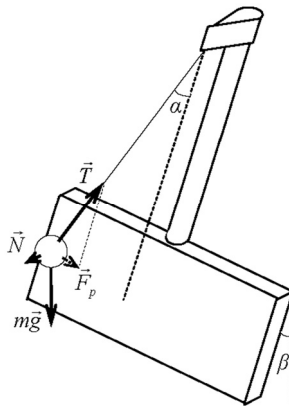


Рис. 7.2. Силы, возникающие при отклонении маятника

Наклонный маятник представляет собой шар, подвешенный на нити и касающийся исследуемой плоской опоры. Шар производит некоторое давление на эту опору и, следовательно, имеет сцепление с ней (рис. 7.2). После отклонения шара на угол α маятник придет в колебательное движение, при котором шар покатится по наклон-

ной поверхности. Силу трения качения учитывать пока не будем. Равнодействующая сил тяжести mg , натяжения нити T и нормальной реакции опоры N направлена к положению равновесия:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}. \quad (7.4)$$

Проекция на направление траектории будет равна: $F = -mg \cos \beta \sin \alpha$. Минус показывает, что равнодействующая сила направлена в сторону положения равновесия. При малых углах отклонения, когда $\sin \alpha = \alpha = x/\ell$,

$$F = -\frac{mg \cos \beta}{\ell} x. \quad (7.5)$$

Сила F не учитывает сцепление шара с опорой, которое нужно учитывать, поскольку именно оно заставляет шар катиться, а не скользить. Таким образом, задача свелась к рассмотренной выше, следовательно,

$$ma = -\frac{5mg \cos \beta}{7\ell} x.$$

Учтем, что ускорение – вторая производная смещения по времени:

$$x''(t) + \frac{5g}{7\ell} \cos \beta x(t) = 0. \quad (7.6)$$

Получившееся уравнение аналогично дифференциальному уравнению гармонических колебаний пружинного маятника

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (7.7)$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{5g}{7\ell} \cos \beta}. \quad (7.8)$

Коэффициент жесткости пружины

$$k = \frac{5mg}{7\ell} \cos \beta. \quad (7.9)$$

Значит, наклонный маятник совершает гармонические колебания

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.10)$$

с периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{7\ell}{5g \cos \beta}}. \quad (7.11)$

Уравнение (7.10) содержит две константы – амплитуду A и начальную фазу φ_0 , значения которых определяются из начальных условий. Ещё раз отметим, что все выражения получены без учета силы трения качения.

Силы трения возникают при относительном перемещении двух соприкасающихся тел или при попытке вызвать такое перемещение. Различают три вида трения, возникающего при контакте твердых тел: трение *скольжения*, *покоя* и *качения*. Трение скольжения и трение качения всегда связаны с необратимым процессом – превращением механической энергии в тепловую.

Сила трения скольжения приложена в области контакта тел и направлена в сторону, противоположную скорости относительного движения. Сила нормальной реакции поверхности N и сила трения $F_{\text{тр}}$ являются нормальной и тангенциальной составляющими одной и той же силы – Q , с которой эта поверхность действует на тело (рис. 7.3). Модули сил $F_{\text{тр}}$ и N связаны приближенным эмпирическим законом Амонтона – Кулона

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (7.12)$$

поэтому угол между нормалью к поверхности и направлением силы Q постоянен. В этой формуле μ – коэффициент трения, зависящий от материала и качества обработки соприкасающихся поверхностей, слабо зависящий от скорости скольжения и практически не зависящий от площади контакта.

Сила трения покоя принимает значение, обеспечивающее равновесие, т.е. состояние покоя тела. Угол между направлением силы Q и нормалью к поверхности может принимать значения в промежутке от нуля до максимального, обусловленного законом Амонтона – Кулона.

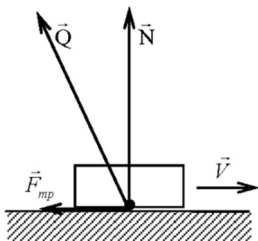


Рис. 7.3. Силы взаимодействия тела с поверхностью

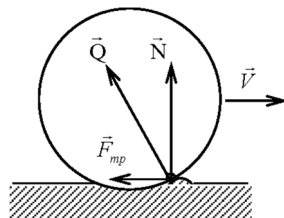


Рис. 7.4. Возникновение силы трения качения

Сила трения качения возникает из-за деформации материалов поверхностей катящегося тела и опоры, а также из-за разрыва временно образующихся молекулярных связей в месте контакта. Рассмотрим первую из названных причин, поскольку вторая существенна лишь при очень хорошей полировке тел. При качении цилиндра или шара по плоской поверхности в месте контакта и перед ним возникает деформация катящегося тела и опоры. Тело оказывается в ямке (рис. 7.4) и вынуждено все время из нее выкатываться. Из-за этого точка приложения силы реакции опоры Q смещается немного вперед по ходу движения, а линия действия этой силы отклоняется немного назад. Нормальная составляющая силы Q есть сила упругости ($Q_n = N$), а тангенциальная – сила трения качения ($Q_t = F_{\text{тр}}$). Для силы трения качения справедлив приближенный закон Кулона:

$$F_{\text{тр}} = \frac{fN}{R}. \quad (7.13)$$

В этом выражении R – радиус катящегося тела, а f – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. Понятно, что для мягких веществ коэффициент трения качения больше, чем для твердых.

Для шара, катящегося по опоре (рис.7.2), проекция этой силы на траекторию

$$F_{\text{тр}} = \pm f \frac{mg}{R} \sin \beta. \quad (7.14)$$

При движении от положения равновесия следует брать знак “–”, при движении к положению равновесия – знак “+”. Таким образом, сила трения *постоянна* по величине и *переменна* по направлению. Учитывая сказанное и вводя обозначение

$$A^* = \frac{|F_{\text{тр}}|}{k} = \frac{7}{5} \cdot \frac{f\ell}{R} \text{tg} \beta, \quad (7.15)$$

которое имеет смысл максимального отклонения маятника, при котором силы трения еще могут удерживать шар в состоянии покоя, получаем окончательное выражение для колебаний наклонного маятника:

$$x(t) - A^* = A \cos(\omega t). \quad (7.16)$$

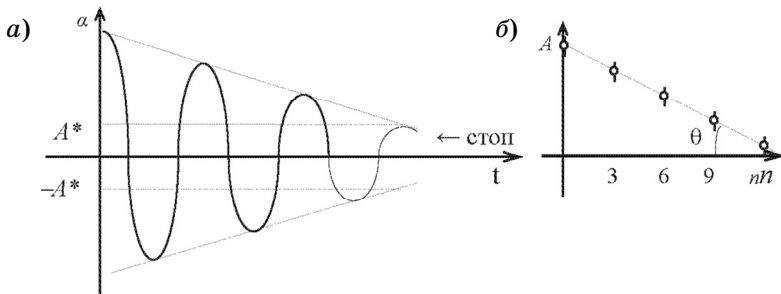


Рис. 7.5. Затухание колебаний наклонного маятника

На рис. 7.5, а изображена зависимость отклонения маятника от времени. Две горизонтальные линии $x(t) = A^*$ и $x(t) = -A^*$ образуют так называемую “мертвую зону”. Если по какой-то причине шар остановится в ней, то колебания маятника прекратятся, поскольку сила трения в этот момент уравнивает равнодействующую остальных сил. Если же шар минует эту зону и остановится вне ее, то колебания маятника продолжатся.

Рассмотрим движение маятника в промежутке между двумя ближайшими максимальными отклонениями шара. Движение маятника описывается уравнением гармонических колебаний (7.16) относительно одной из границ “мертвой зоны”. В момент остановки шара сила трения меняет свое направление, что ведет к смене знака в выражении (7.14). Следовательно, колебания продолжатся относительно другой границы “мертвой зоны”. Тем самым, в момент остановки амплитуда колебаний скачком уменьшается на величину $2A^*$. Поскольку остановки шара происходят два раза в каждый период, уменьшение амплитуды за каждый из них должно составлять $\Delta A = 4A^*$. Это абсолютное уменьшение амплитуды за период в процессе колебаний должно оставаться постоянным, т.е. не должно зависеть от амплитуды или от порядкового номера колебаний. Таким образом, зависимость амплитуды колебания A от его порядкового номера n должна быть линейной (рис.7.5, б).

Рассматриваемые колебания являются как бы “сшитыми” в точках максимумов из отрезков синусоид, поэтому в целом *они не являются гармоническими*. Тем не менее, их период остается постоянным, если его измерять между точками максимальных отклонений. Линейность экспериментально полученной зависи-

мости $A(n)$ должна быть доказательством того, что абсолютное уменьшение амплитуды за каждый период одинаково. Определив графически $\operatorname{tg} \theta$ этой зависимости можно найти величину A^* ;

$$\operatorname{tg} \theta = (\Delta A / \Delta n) = 4A^*, \quad \Rightarrow \quad A^* = \frac{\operatorname{tg} \theta}{4}. \quad (7.17)$$

Заметим, что во всех рассуждениях до сих пор предполагалось, что амплитуда колебаний измеряется в метрах. На установке шкала дана в градусах. Если считать, что по оси ординат на графике (см. рис. 7.5, б) отложены амплитуды в градусах, а величину A^* нужно получить в метрах, то

$$A^* = \frac{\operatorname{tg} \theta}{4} \cdot \frac{\pi \ell}{180^\circ}. \quad (7.18)$$

Сравнивая с формулой (7.15), получаем выражение для коэффициента трения качения:

$$f = \frac{5R}{28} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}. \quad (7.19)$$

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки приведен на рис. 7.6. К основанию 2 на четырех ножках, регулирующих высоту, прикреплен секундомер и счетчик колебаний 1. В основании 2 закреплена стойка 3, на которой смонтирован корпус 4 с червячной передачей, соединенной с кронштейном 5. На нем закреплены две угловые шкалы, одна 6 – для измерения угла α отклонения шара, и вторая 7 – для измерения угла наклона β маятника. На кронштейне 5 закреплена стойка 8, на которой подвешен шар 9 с указательной стрелкой. В сам кронштейн 5 по направляющим вкладываются различные образцы. Для наклона маятника используется вороток 11. На кронштейне 5 также имеется фотоэлектрический датчик 12, сигнализирующий о прохождении шара 9 через положение равновесия. Различные шары 9 навинчиваются на указательную стрелку.

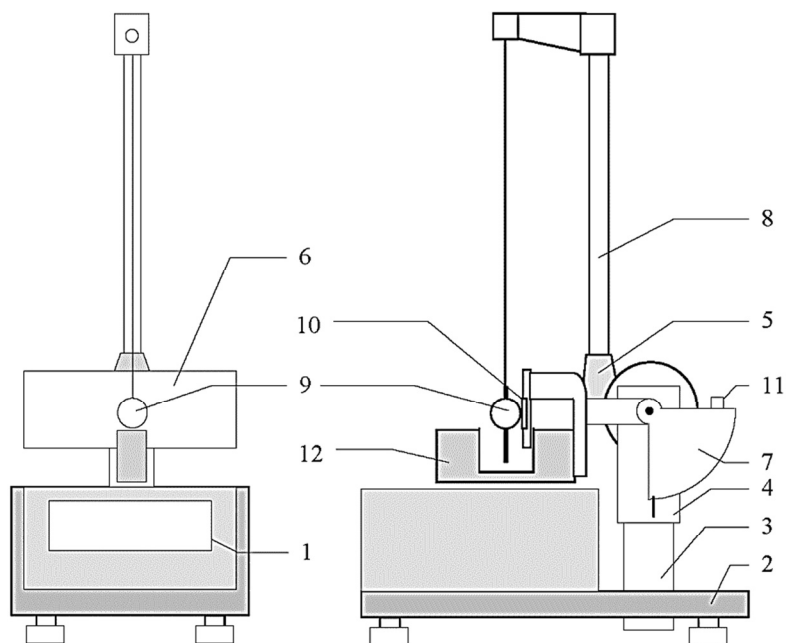


Рис. 7.6. Внешний вид наклонного маятника

Задания и порядок их выполнения

До начала измерений необходимо отрегулировать маятник, чтобы в положении равновесия стрелка указывала на ноль.

Задание 1. Измерить период колебаний наклонного маятника и сравнить его с рассчитанным значением.

Для выполнения этого задания нужно установить указанный преподавателем угол наклона маятника β ; отклонить шар на некоторый угол α и отпустить его без толчка. Измерить время десяти колебаний и вычислить период T . Измерение повторить не менее пяти раз. Для того чтобы исключить имеющуюся слабую зависимость периода колебаний от амплитуды, начальное отклонение шара во всех опытах должно быть одинаковым.

Среднее значение периода сравнить с теоретическим значением, рассчитанным по (7.11). Сравнение провести с учетом погрешностей измеренного и рассчитанного значений.

Задание 2. Исследовать зависимость периода колебаний от угла наклона β маятника.

Выполнить задание 1 для нескольких углов β , названных преподавателем. Если никаких указаний преподавателя не было, то выбрать углы $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. Результаты измерений отложить на графике $T(\beta)$. На этом же графике построить зависимость (7.11). Сделать заключение о справедливости этой теоретической формулы при различных углах β . Если измеренное и рассчитанное значения периода не совпадают, то объяснить причину этих расхождений.

Задание 3. Определение коэффициента трения качения шара о заданную опору.

Сначала нужно убедиться, что за каждый период амплитуда колебаний уменьшается на одинаковую величину. Для этого нужно построить на графике зависимость амплитуды колебаний A (максимального угла отклонения α) от его порядкового номера n , как это показано на рис. 7.5, б. Измерение амплитуды следует проводить через равное число колебаний. Оптимально выбрать $\Delta n = 3$. Результаты измерений заносятся в таблицу.

Зависимость амплитуды от номера колебания

n	0	3	6	9	12	...
$A(n)$						

Линейность экспериментальной зависимости $A(n)$ – критерий справедливости проверяемого предположения. По измеренному тангенсу угла θ с помощью формулы (7.18) можно найти коэффициент трения качения f .

На рис. 7.7 показана реальная нелинейная зависимость $A(n)$. Это связано с тем, что при больших амплитудах шарик не катится, а скользит по поверхности. Кроме того действует сила сопротивления воздуха, которая зависит от скорости шара и не остается постоянной. Следует обрабатывать лишь тот интервал на графике, в котором зависимость $A(n)$ близка к линейной (на рис. 7.7 – только после седьмого-восьмого колебания).

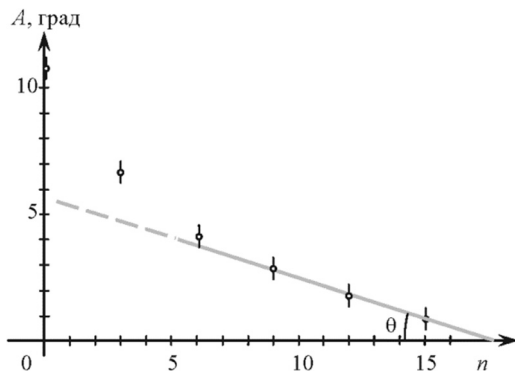


Рис. 7.7. Зависимость амплитуды от номера колебаний

Контрольные вопросы

1. Почему ускорение шара, катящегося по поверхности под действием силы \vec{F} , нельзя найти из второго закона Ньютона $\vec{a} = \vec{F}/m$?
2. Как запишется формула (7.3) для катящегося цилиндра?
3. Почему из формулы (7.11) не получается формула периода математического маятника при угле наклона $\beta = 0$?
4. Как можно объяснить происхождение силы трения качения?
5. Сколько колебаний совершает наклонный маятник до полной остановки?

Лабораторная работа № 8

СТОЛКНОВЕНИЕ ШАРОВ

Цель работы: проверка законов сохранения импульса и энергии; определение деформации шаров и силы удара.

Теоретические сведения

Столкновением называется кратковременное взаимодействие тел, локализованное в малой области пространства. Во время столкновения тела деформируются, при этом часть кинетической энергии превращается в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Выделяют два предельных случая: абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Кинетическая энергия полностью или частично превращается в потенциальную энергию упруго деформированных тел, которая после столкновения снова переходит в кинетическую энергию системы.

При абсолютно неупругом ударе потенциальной энергии упругой деформации не возникает, кинетическая энергия сталкивающихся тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию системы. Выполняются законы сохранения импульса и полной энергии. Механическая энергия при неупругом ударе не сохраняется.

Большинство реальных столкновений в механических системах можно отнести к промежуточному типу между абсолютно упругими и абсолютно неупругими. В них, как правило, сохраняется импульс и не сохраняется механическая энергия. *Импульс системы сталкивающихся тел не сохраняется в тех столкновениях, в которых на движение тел после взаимодействия накладываются какие-то ограничения.*

Рассмотрим взаимодействие двух металлических шаров с массами m_1 и m_2 , повешенных на нитях длиной ℓ . Будем считать, что удар является центральным, т. е. центры шаров лежат на линии, вдоль которой происходит взаимодействие. В исходном положении шары касаются друг друга. Если правый шар отклонить на угол α_1 и отпустить, то к моменту его столкновения с неподвижным левым шаром он разовьет скорость $v_1 = \sqrt{2gh}$, где h – начальная высота правого шара.

Поскольку $h = \ell - \ell \cos \alpha_1 = 2\ell \sin^2(\alpha_1/2)$ окончательно получаем

$$v_1 = 2\sqrt{g\ell} \sin(\alpha_1/2). \quad (8.1)$$

Таким образом, можно найти импульс и энергию системы до удара:

$$P = m_1 v_1 = 2m_1 \sqrt{g\ell} \sin(\alpha_1/2), \quad (8.2)$$

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 2m_1 g\ell \sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (8.3)$$

Скорости обоих шаров v'_1 и v'_2 после столкновения можно найти по формулам, аналогичным (8.1):

$$v'_1 = 2\sqrt{g\ell} \sin(\alpha'_1/2); \quad v'_2 = 2\sqrt{g\ell} \sin(\alpha'_2/2); \quad (8.4)$$

где α'_1 и α'_2 – углы максимальных отклонений шаров после удара.

Импульс системы после удара складывается из импульса каждого шара:

$$\vec{P}' = m\vec{v}'_2 + m\vec{v}'_1.$$

Учитывая противоположные направления скоростей \vec{v}'_1 и \vec{v}'_2 , имеем

$$P' = m_2 v'_2 - m_1 v'_1. \quad (8.5)$$

Энергия системы после удара складывается из энергии каждого шара:

$$E' = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}. \quad (8.6)$$

Подставим (8.4) в эти формулы и запишем окончательные выражения:

$$P' = 2\sqrt{g\ell} \{m_2 \sin(\alpha'_2/2) - m_1 \sin(\alpha'_1/2)\}; \quad (8.5a)$$

$$E' = 2g\ell \{m_2 \sin^2(\alpha'_2/2) + m_1 \sin^2(\alpha'_1/2)\}. \quad (8.6a)$$

Найдем относительную потерю импульса и энергии при столкновении:

$$\delta_P = \frac{P - P'}{P} = 1 - \frac{P'}{P}; \quad (8.7)$$

$$\delta_E = \frac{E - E'}{E} = 1 - \frac{E'}{E}. \quad (8.8)$$

При малых углах отклонения шаров, когда $\sin \alpha = \alpha$, $\sin \alpha_1 = \alpha_1$, $\sin \alpha_2 = \alpha_2$, эти формулы преобразуются к виду:

$$\delta_P = 1 - \frac{m_2 \alpha_2' - m_1 \alpha_1'}{m_1 \alpha_1}; \quad (8.7a)$$

$$\delta_E = 1 - \frac{m_2 \alpha_2'^2 + m_1 \alpha_1'^2}{m_1 \alpha_1^2}. \quad (8.8a)$$

При равных массах шаров формулы становятся еще проще

$$\delta_P = 1 - \frac{\alpha_2' - \alpha_1'}{\alpha_1}; \quad (8.7b)$$

$$\delta_E = 1 - \frac{\alpha_2'^2 + \alpha_1'^2}{\alpha_1^2}. \quad (8.8b)$$

Если считать рассматриваемое столкновение упругим, т.е. подчиняющимся закону Гука, то время такого столкновения должно быть равно половине периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}, \quad (8.9)$$

где μ – приведенная масса, а k – приведенная жесткость шаров

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}; \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (8.10)$$

Приведенная жесткость численно равна силе, под действием которой расстояние между шарами уменьшается на единицу длины. Ее можно найти, зная массы шаров и время их контакта при ударе:

$$k = \mu \pi^2 / \tau^2. \quad (8.11)$$

Хотя мы договорились считать удар упругим, это не значит, что вся кинетическая энергия первого шара переходит при взаимодействии в потенциальную. Для нахождения доли кинетической энергии, которая в потенциальную не превращается, рассмотрим

столкновение в системе центра масс шаров. Если первый шар движется до удара со скоростью v , а второй покоится, то их центр масс движется со скоростью

$$v_C = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}, \quad (8.12)$$

которая по закону сохранения импульса остается постоянной и до, и во время, и после столкновения. Кинетическую энергию системы перед ударом можно представить суммой трех слагаемых: кинетических энергий каждого из шаров относительно выбранной системы отсчета и произведения полу-суммы их масс на квадрат скорости их центра масс:

$$E = E_1 + E_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2 \quad (8.13)$$

В потенциальную энергию упругой деформации превратятся лишь два первых слагаемых, поскольку скорость v_C при взаимодействии остается неизменной, и третье слагаемое является кинетической энергии системы двух шаров в момент их максимальной деформации;

$$E_1 + E_2 = E_{\Pi} \quad (8.14)$$

Модули скоростей каждого из шаров относительно их центра масс найдем по следующим формулам:

$$v_1 = v - v_C = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}; \quad v_2 = v_C = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}. \quad (8.15)$$

Здесь v скорость сближения шаров или скорость первого шара до удара в лабораторной системе отсчета. Подставим эти скорости в (8.14):

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2} &= E_{\Pi}; \Rightarrow \\ \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} &= \frac{1}{2} k x^2; \Rightarrow \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} k x^2; \Rightarrow x = v \sqrt{\mu/k}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Под величиной x здесь следует понимать уменьшение расстояния между центрами шаров. Смысл этой величины ясен из рис. 8.1. Сравнивая формулу (8.16) с (8.8) и принимая во внима-

ние (8.1), получаем окончательно для деформации шаров во время удара:

$$x = \frac{v\tau}{\pi} = \frac{2\tau}{\pi} \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (8.17)$$

Максимальную силу удара можно найти из закона Гука и выражения для приведенной жесткости (8.11):

$$F = kx = \frac{2\pi\mu}{\tau} \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (8.18)$$

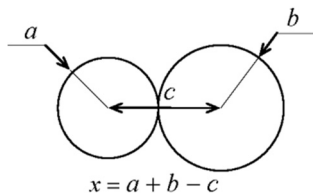


Рис. 8.1. Деформация шаров

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки приведен на рис. 8.2. На верхнем кронштейне прикреплен вороток 1 и приспособление 2, при помощи которых устанавливают расстояние между шарами в положении равновесия и длину подвески. На нижнем кронштейне закреплены угловые шкалы 3 и электромагнит 4, который можно закреплять в различных положениях меняя тем самым начальное положение шара. Силу электромагнита можно регулировать воротком 5. Угловые шкалы могут передвигаться вдоль нижнего кронштейна. Время столкновения измеряется микросекундометром, показания которого выводятся на лицевой панели 6.

Нажатие кнопки “Сеть” подает питающее напряжение на установку. Кнопка “Сброс” служит для обнуления показаний измерителя времени. При нажатии на нее одновременно подается напряжение на электромагнит, и он удерживает шар в начальном положении. Отпускается шар нажатием кнопки “Пуск”.

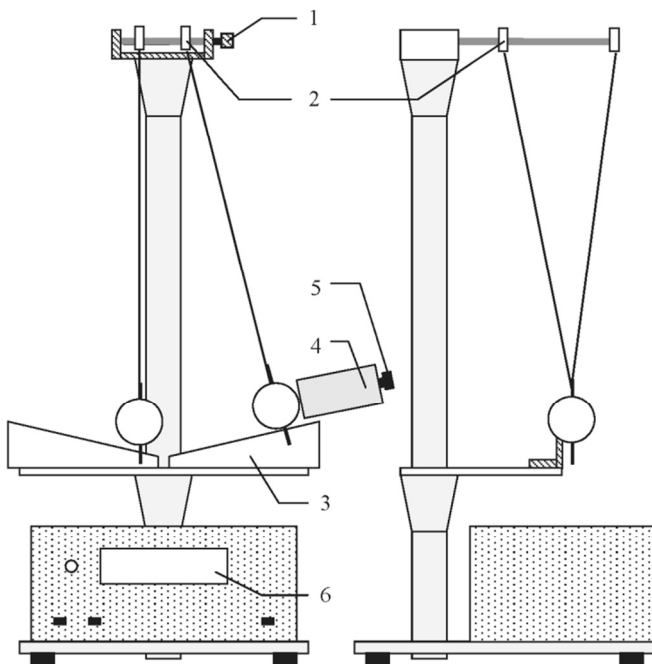


Рис. 8.2. Внешний вид лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

До начала измерений необходимо ознакомиться с установкой и настроить ее:

шары в нижнем положении должны слегка касаться друг друга. При этом указатели должны показывать нули на шкалах;

электромагнит устанавливается на такой высоте, чтобы его ось была продолжением черты на шаре. Силу электромагнита следует отрегулировать так, чтобы он удерживал шар;

особое внимание нужно уделить тому, чтобы удар получился центральным. Для этого положение шаров нужно регулировать как по вертикали, так и по горизонтали.

Описанные действия нужно выполнить на данной установке очень тщательно. Невыполнение их приводит к неконтролируемым потерям энергии и импульса.

Задание 1. Проверить выполнение законов сохранения импульса и энергии.

Задание 2. Найти деформацию шаров.

Задание 3. Найти максимальную силу удара.

До столкновения нужно установить угол α_1 . После столкновения нужно измерить α'_1 и α'_2 – углы максимального отклонения шаров. Учтеть, что угол α'_1 положителен, если шар отклоняется направо, и отрицателен – если налево. Оба эти угла нужно измерять после первого касания шаров. Сделать это сложно. Проще и точнее измерения углов α'_1 и α'_2 проводить следующим способом:

измерить угол α_1 и отпустить правый шар;

после удара измерить отклонение левого шара α'_2 ;

установить правый шар на тот же угол α_1 и вновь отпустить его;

после удара поймать рукой левый шар и заметить, в какую сторону двинется правый;

правый будет совершать колебания, измерить их амплитуду и, учитывая знак, записать угол отклонения α'_1 .

Длительность контакта измеряется микросекундомером. Величины m_1 и m_2 , фигурирующие в формулах, включают в себя массы шаров и массы подвесок, которые указаны на установке. Длину подвески нужно измерять линейкой от оси до середины шара.

Относительные потери импульса и энергии при ударе рассчитать по формулам (8.7а), (8.8а) или (8.7б), (8.8б). Сделать заключение, каким является взаимодействие: упругим или нет. Если при ударе не сохранился импульс, то высказать предположение, с чем это связано. В любую из этих четырех формул углы отклонения можно подставлять в градусах.

Для получения надежных данных каждое прямое измерение повторить не менее 10 раз. Из числа измерений нужно исключить явные ошибки – промахи. При расчетах пользоваться средними значениями.

Деформацию шаров найти по формуле (8.17), а максимальную силу удара по формуле (8.18).

При вычислениях принять следующие значения систематических погрешностей прямых измерений:

погрешность измерения длины – $\theta_l = 5$ мм,

погрешность измерения времени – $\theta_t = 5$ мкс,

погрешность измерения угла α_1 – цена деления,

погрешность измерения углов α'_1 и α'_2 – две цены деления.

Для значений всех найденных величин – коэффициентов потери импульса и энергии, для максимальной деформации шаров и для максимальной силы удара нужно найти систематические погрешности.

Кроме систематических погрешностей нужно вычислить также случайные и полные погрешности.

Контрольные вопросы

1. Какой удар называют абсолютно упругим и какой – абсолютно неупругим?
2. Как найти центр масс системы материальных точек?
3. Как найти скорость центра масс системы материальных точек?
4. Почему при абсолютно упругом ударе не вся кинетическая энергия превращается в потенциальную?
5. Чему равна кинетическая энергия системы во время и после неупругого удара?
6. Какие значения величин δ_P и δ_E должны получиться для абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов?
7. В каких взаимодействиях не сохраняется импульс?
8. Какие случайные неконтролируемые факторы присутствуют в эксперименте?

Лабораторная работа № 9

ГИРОСКОП

Цель работы: изучение прецессии гироскопа; измерение угловой скорости, момента импульса и момента инерции гироскопа.

Теоретические сведения

Гироскопом называется массивное твердое тело (обычно диск), быстро вращающееся вокруг оси симметрии. Для того чтобы ось гироскопа могла принимать любое направление в пространстве, используется карданов подвес (рис. 9.1). Гироскоп – диск, вращающийся вокруг оси AA' . Внутреннее кольцо может вращаться вокруг горизонтальной оси BB' , перпендикулярной оси AA' . Внешнее кольцо может вращаться вокруг вертикальной оси DD' . Таким образом, у гироскопа есть три степени свободы. Точка пересечения всех трех осей AA' , BB' и DD' совпадает с центром масс гироскопа, неподвижным относительно подвески. Такой гироскоп называется свободным.

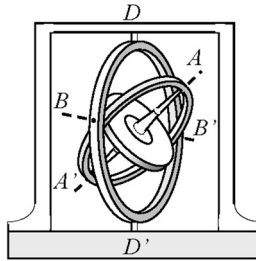


Рис. 9.1. Гироскоп на кардановом подвесе

При своем вращении гироскоп обладает моментом импульса

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (9.1)$$

В этом выражении I – момент инерции гироскопа относительно оси симметрии AA' , ω – угловая скорость его вращения относительно той же оси. Отметим, что векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ расположены вдоль оси вращения. Их направление определяется правилом

буравчика. Движение гироскопа с неподвижным центром масс описывается *уравнением моментов* или *основным уравнением динамики вращательного движения*

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}, \quad (9.2)$$

в котором M – равнодействующая моментов внешних сил, приложенных к телу. Момент силы равен векторному произведению радиуса-вектора точки, к которой приложена сила, на эту силу

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (9.3)$$

При $M = 0$ момент импульса сохраняется по величине и направлению.

Если к оси гироскопа на некотором расстоянии от его центра масс под углом к этой оси приложить внешнюю силу F , то возникнет момент внешних сил M (рис. 9.2), направленный перпендикулярно вектору \vec{L} . Из уравнения (9.2) следует, что векторы $d\vec{L}$ и \vec{M} параллельны друг другу, поэтому $d\vec{L} \perp \vec{L}$. Из сказанного следует, что внешняя сила изменяет только направление момента импульса, не меняя его величины, т.е. заставляет его вращаться вокруг своего направления. Таким образом, момент импульса, а с ним и ось AA' гироскопа, описывает в пространстве коническую поверхность (рис. 9.2, а).

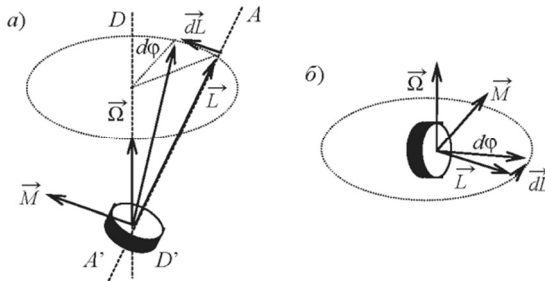


Рис. 9.2. К вычислению угловой скорости прецессии

За время dt проекция момента импульса на горизонтальную плоскость повернется на угол $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{M dt}{L \sin \alpha}, \quad (9.4)$$

где α – угол между направлениями момента импульса и оси вращения. Угловая скорость Ω вращения вектора L вокруг направления внешней силы

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin \alpha}. \quad (9.5)$$

Выразим значение момента силы M из написанной формулы:

$$M = \Omega L \sin \alpha. \quad (9.6)$$

Учтем, что величины M , Ω и L являются векторами (их направления показаны на рис.9.2), и перепишем формулу (9.6) в векторной форме:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (9.7)$$

В дальнейшем внешней силой, приложенной к гироскопу, будет сила тяжести дополнительного груза, направленная вертикально вниз. Под действием момента этой силы ось гироскопа будет вращаться вокруг вертикальной оси DD' с угловой скоростью Ω (см. рис.9.2). Поскольку при этом вращении взаимная ориентация векторов \vec{L} и \vec{M} не изменяется, вращение гироскопа вокруг вертикальной оси DD' будет равномерным. Такое вращение называется *регулярной прецессией*, а величина Ω – *угловой скоростью прецессии*.

Если ось гироскопа AA' направлена горизонтально (рис. 9.2, б), т.е. $\alpha = 90^\circ$ и коническая поверхность становится плоской, то из уравнения (9.6) следует, что

$$L = M/\Omega. \quad (9.8)$$

Отметим, что все приведенные выше рассуждения относятся к быстро вращающемуся гироскопу, когда $\omega \gg \Omega$. В настоящей работе это условие выполняется.

Лабораторная установка

Внешний вид установки приведен на рис. 9.3. На основании 1 с ножками для выравнивания прибора закреплена стойка 2. На ней установлен кронштейн 3 с закрепленными на нем первым фотоэлектрическим датчиком 4 и внешней втулкой вращательного соединения 5. Вращательный узел позволяет гироскопу вращаться

вокруг вертикальной оси и обеспечивает питание второго фотоэлектрического датчика 6 и электродвигателя 7, который смонтирован на кронштейне 8. На оси двигателя закреплен диск 9, защищенный экраном 10. Диск имеет отметки, по которым фотоэлектрический датчик 6 определяет частоту вращения. На рычаге 11 с линейкой может закрепляться груз 12. Угол поворота гироскопа вокруг вертикальной оси указывает на диске 13 стрелка 14. Изменение этого угла отсчитывает первый фотодатчик 4.

Установка включается нажатием кнопки “Сеть”. Ручкой на лицевой панели устанавливается частота вращения. Кнопка “Сброс” запускает секундомер и измеритель угла прецессии. Кнопка “Стоп” останавливает измерение угла прецессии и времени поворота.

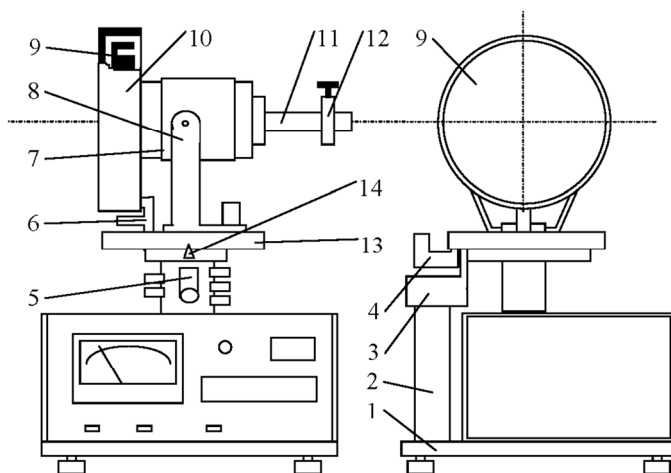


Рис. 9.3. Внешний вид лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

До начала измерений следует ознакомиться с установкой, установить ее горизонтально по имеющемуся уровню.

Задание 1. Определение угловой скорости прецессии гироскопа.

Найти положение равновесия x_0 груза 12 по линейке 11.

Установить нужную частоту вращения гироскопа и перевести ее в единицы – рад/с.

Установить груз массой m в заданное преподавателем положение x и вычислить момент внешней силы:

$$M = mg(x - x_0). \quad (9.9)$$

Отпустить рычаг 11 и наблюдать прецессию гироскопа, зафиксировать направление вращения.

Нажать кнопку “Сброс”, включив тем самым секундомер и измеритель угла. Подождать, пока на табло появится угол 80° , и нажать кнопку “Стоп”. В этом случае прибор измерит время t поворота гироскопа на угол 90° т.е. $\varphi = \pi/2$. Угловую скорость прецессии найти по формуле

$$\Omega = \varphi/t. \quad (9.10)$$

Учесть, что в этой формуле угол φ измеряется в радианах. Угловую скорость прецессии определить три раза при одном и том же положении груза 12 и одинаковых частотах вращения гироскопа.

Вычисленные значения M и Ω подставить в формулу (9.8) и найти момент импульса гироскопа L .

Используя полученное значение момента импульса L и угловой скорости вращения ω , найти момент инерции гироскопа:

$$I = L/\omega. \quad (9.11)$$

Во время проведения измерений нужно следить за тем, чтобы частота вращения гироскопа ω оставалась неизменной.

Задание 2. Измерение момента импульса гироскопа при неизменной частоте вращения и различных значениях момента внешней силы.

Убедиться, что независимо от положения груза x , в пределах систематической погрешности получатся одинаковые значения момента импульса гироскопа L . Для этого следует повторить задание 1 при нескольких различных положениях груза, заданных преподавателем. Найти среднее значение момента импульса и его полную погрешность.

Задание 3. Измерение момента инерции гироскопа.

Убедиться, что независимо от частоты вращения гироскопа ω , в пределах систематической погрешности получатся одинаковые значения его момента инерции I . Для этого следует повторить задание 1 при нескольких различных частотах вращения гироскопа,

заданных преподавателем. Найти среднее значение момента инерции и его полную погрешность.

Поскольку частота вращения гироскопа во время проведения опыта немного меняется и это изменение (уплывание) частоты происходит случайным неконтролируемым образом, результаты всех измерений в этой работе следует считать случайными, и проводить объединение случайной и систематической погрешностей найденных величин по формуле (14) из вводной части настоящего пособия.

Контрольные вопросы

1. Что называется гироскопом, свободным гироскопом?
2. Запишите уравнение моментов для гироскопа, на который действует момент силы тяжести.
3. Объясните, почему вектор момента внешней силы направлен перпендикулярно оси гироскопа.
4. Как зависит угловая скорость прецессии гироскопа от положения груза? Почему не прецессирует уравновешенный гироскоп?
5. От чего зависит направление прецессии гироскопа? Почему при разных положениях груза направления прецессии разные?
6. Почему попытка повернуть уравновешенный гироскоп вокруг оси DD' за диск 13 вызывает его поворот относительно другой оси BB' ?

Лабораторная работа № 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ

Цель работы: определение скорости распространения звуковых волн в воздухе.

Теоретические сведения

Звуковые волны представляют собой процесс распространения механических колебаний с частотами в диапазоне от 20 Гц до 20 кГц. Скорость звука v связана с длиной волны λ и частотой колебаний ν соотношением:

$$v = \lambda \nu. \quad (10.1)$$

Скорость звука в воздухе можно теоретически рассчитать по формуле

$$v = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{RT}{M}}, \quad (10.2)$$

в которой T – абсолютная температура; $M = 0,0291$ кг/моль – молярная масса воздуха; $R = 8,314$ Дж/К·моль – универсальная газовая постоянная.

Уравнение волны, распространяющейся вдоль оси (ox), имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (10.3)$$

В этой формуле ξ – смещение точки среды из положения равновесия, находящегося на расстоянии x от источника; ω – циклическая частота колебаний; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Фаза колебаний

$$\varphi = \omega t - kx = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (10.4)$$

зависит от времени и от положения точки. Разность фаз колебаний двух соседних точек зависит только от расстояния Δx между ними

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}. \quad (10.5)$$

Таким образом, длину звуковой волны можно найти, измерив на опыте величины Δx и $\Delta\varphi$. Разность фаз колебаний можно определить методом сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний.

Точка, совершающая одновременно два колебания во взаимно перпендикулярных направлениях, движется по замкнутым траекториям, называемым *фигурами Лиссажу*. В случае равенства частот эти фигуры представляют собой эллипсы, форма и ориентация которых зависит от амплитуд и от разности фаз складываемых колебаний.

Рассмотрим два гармонических колебания одинаковой частоты, одно из которых происходит вдоль оси (ox), а другое – вдоль (oy). Для простоты начальную фазу первого колебания положим равной нулю:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t), \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Уравнение траектории точки, одновременно участвующей в этих двух колебаниях, найдем, исключив время t из уравнений (10.6):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x/A_1 = \cos \omega t, \\ y/A_2 = \cos \omega t \cos \Delta\varphi - \sin \omega t \sin \Delta\varphi; \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow &y/A_2 = (x/A_1) \cos \Delta\varphi - \sin \Delta\varphi \sqrt{1 - (x/A_1)^2}; \Rightarrow \\ &(x/A_1)^2 + (y/A_2)^2 - \frac{2xy \cos \Delta\varphi}{A_1 A_2} = \sin^2 \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Получилось уравнение наклонного эллипса, ориентация и полуоси которого зависят от амплитуд A_1, A_2 и от разности фаз $\Delta\varphi$ (рис. 10.1, *a*). Если $\Delta\varphi = 2\pi k$, где k – целое число, получим уравнение отрезка прямой, проходящего через 1-й и 3-й квадранты (рис. 10.1, *б*):

$$y = (A_2/A_1)x. \quad (10.8)$$

Если $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, где k – целое число, получим уравнение отрезка прямой, проходящего через 2-й и 4-й квадранты (рис. 10.1, *в*):

$$y = -(A_2/A_1)x. \quad (10.9)$$

Если $\Delta\varphi = (k+0,5)\pi$, где k – целое число, получим уравнение эллипса, ориентированного вдоль координатных осей (рис. 10.1, *г*):

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1. \quad (10.10)$$

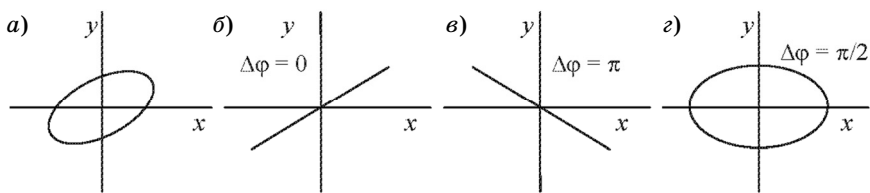


Рис. 10.1. Различные траектории движения точки

Таким образом, по форме наблюдаемого эллипса можно определить разность фаз колебаний $\Delta\varphi$. В дальнейшем особый интерес будут представлять случаи б и в, когда эллипс вырождается в отрезок. Эти случаи удобно наблюдать экспериментально. Существенно, что изменение фазы от одного из них к другому составляет $\Delta\varphi = \pi$.

В настоящей работе звуковой сигнал с телефона попадает на микрофон, находящийся на расстоянии ℓ от него. Сигналы с телефона и с микрофона подаются на отклоняющие пластины x и y электронного осциллографа соответственно. Расстояние ℓ можно изменять и измерять во время эксперимента; вместе с ним, согласно формуле (10.5), меняется и разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний телефона и микрофона. Поскольку по картинке на экране осциллографа можно зафиксировать лишь разности фаз $\Delta\varphi$ кратные π , при которых эллипс вырождается в отрезок, величина $n = \Delta\varphi/\pi$ на опыте должна принимать только целые значения. Она увеличивается на единицу всякий раз, когда при увеличении расстояния ℓ на экране эллипс превращается в отрезок.

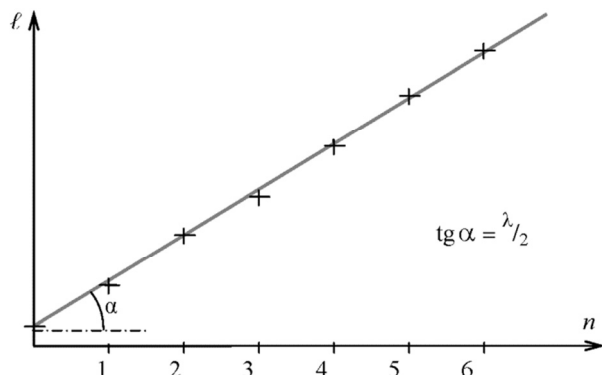


Рис. 10.2. Экспериментальная зависимость ℓ от n

С учетом сказанного формулу (10.5) можно переписать в виде

$$\Delta l = \frac{n\lambda}{2}. \quad (10.11)$$

Зависимость $l(n)$ наблюдаемая в опыте (рис.10.2), должна представлять собой прямую линию, по угловому коэффициенту ($k = \text{tg}\alpha$) которой можно найти длину волны λ :

$$\lambda = 2\text{tg}\alpha. \quad (10.12)$$

Подставив полученное таким способом значение длины волны λ и установленную на звуковом генераторе частоту колебаний в формулу (10.1), можно найти скорость звуковых волн.

Лабораторная установка

Блок-схема лабораторной установки приведена на рис. 10.3.

Электрические колебания звуковой частоты, полученные при помощи генератора 1, подаются одновременно на пластины х осциллографа 2 и на телефон 5. Звук от телефона распространяется вдоль полой трубы 3 и достигает микрофона 4. В электрической цепи микрофона возникает электрический сигнал на той же частоте, что и на выходе генератора, но с некоторой задержкой по фазе. Этот сигнал подается на пластины у осциллографа. На экране появляется эллипс, форма которого зависит кроме всего прочего от разности фаз колебаний, подаваемых на разные пластины осциллографа. При изменении расстояния, которое можно измерить линейкой 6, между телефоном и микрофоном изменяется разность фаз колебаний, а следовательно, и форма эллипса.

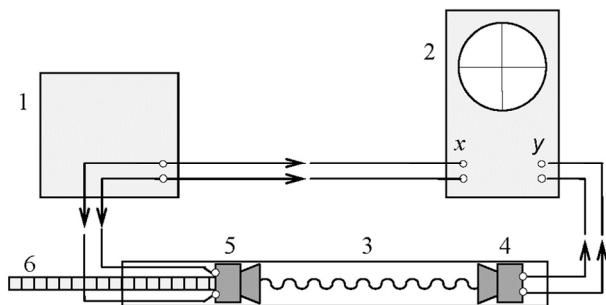


Рис. 10.3. Блок-схема лабораторной установки

Задания и порядок их выполнения

Задание 1. Экспериментальное определение скорости звуковых волн в воздухе.

До начала измерений нужно на 2–5 мин включить для прогрева осциллограф и звуковой генератор.

Задание выполняется в следующем порядке.

Установить заданную частоту колебаний.

Пользуясь ручками настройки осциллографа и изменяя величину выходного напряжения, добиться на экране осциллографа четкого, устойчивого эллипса.

Перемещая телефон по трубе, добиться появления на экране прямой линии. Отметить это положение на шкале как ℓ_1 .

Медленно перемещая телефон в ту же сторону, снова получить на экране прямую линию, но уже наклоненную в другую сторону, т. е. проходящую через другие квадранты. Отметить соответствующее положение телефона как ℓ_2 .

Повторить предыдущий пункт столько раз, сколько это возможно и получить набор положений телефона $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$, в которых эллипс вырождается в отрезок прямой. Получить еще один такой же набор данных, перемещая телефон в обратном направлении, и усреднить результаты.

Построить график зависимости положения телефона ℓ_n , от порядкового номера n , как это показано на рис.10.2.

Систематическую погрешность расстояния принять равной $\theta_\ell = 2$ мм. Систематическую погрешность θ_n , связанную с неточностью определения точки вырождения эллипса, не учитывать; $\theta_n = 0$.¹

Графически найти длину звуковой волны λ и ее систематическую погрешность.

По формуле (10.1) найти скорость звуковых волн.

Повторить измерения для звукового сигнала другой частоты.

Задание 2. Теоретический расчет скорости звуковых волн в воздухе.

Вычисления нужно проводить по формуле (10.2), значения констант, необходимые для расчета, указаны в комментариях к формуле. Для определения температуры воздуха t °С нужно вос-

¹ В случае, когда эллипс не полностью вырождается в отрезок, следует считать $\theta_n = 0,1$.

пользоваться термометром. Абсолютную температуру T можно найти по формуле:

$$T(\text{K}) = t \text{ } ^\circ\text{C} + 273,15\text{K}. \quad (10.13)$$

Контрольные вопросы

1. Что называется звуковой волной?
2. Чем отличаются волновые процессы от колебательных?
3. Что такое длина волны и чему она равна?
4. Запишите уравнение бегущей волны и поясните смысл всех величин, в нее входящих.
5. От чего зависит фаза волны? Чему равна разность фаз колебаний двух точек?
6. Получите уравнения траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты?
7. В каких случаях траектория вырождается в отрезок?
8. Как определяется длина звуковой волны в данной работе?
9. Как зависит скорость звука от температуры воздуха?

Лабораторная работа № 11

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ВОЗДУХА

Цель работы: определение коэффициента вязкости воздуха капиллярным методом.

Теоретические сведения

Воздуху, как и всем реальным газам, присуща *вязкость*, или *внутреннее трение*, которое проявляется в том, что возникшее движение среды после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно останавливается. Течение газа или жидкости может быть *ламинарным* (слоистым) или *турбулентным* (вихревым). При ламинарном течении слои газа или жидкости скользят друг относительно друга, не перемешиваясь, а при турбулентном – в среде образуются вихри. Обычно ламинарное движение наблюдается при малых скоростях, а турбулентное – при больших. Сила вязкого трения в случае турбулентного движения существенно больше, чем в случае ламинарного.

Рассмотрим ламинарное движение газа в круглой трубе. Скорость газа максимальна на оси трубы и равна нулю у ее стенок. При стационарном течении в трубе постоянного сечения скорости газа во всех точках остаются неизменными. Следовательно, сумма внешних сил, приложенных к любому объему газа, равна нулю.

Выделим воображаемый цилиндрический объем газа радиусом r и длиной l . На основания этого объема действуют силы давления, сумма которых равна

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2. \quad (11.1)$$

Эта сила действует в направлении движения жидкости. Здесь P_1 и P_2 давления на левом и правом торцах цилиндра. На боковую поверхность цилиндра, площадь которой равна $2\pi r l$, действует сила трения

$$F_{\text{тр}} = -2\pi\eta r l \frac{dv}{dr}, \quad (11.2)$$

где η – коэффициент вязкости (внутреннего трения), зависящий от природы и состояния газа; v – скорость газа; производная $\frac{dv}{dr}$ берется на расстоянии r от оси выделенного цилиндра.

Скорость течения газа будет неизменной, если сумма всех сил, приложенных к этому цилиндру, будет равна нулю, т.е. две названные силы равны друг другу:

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -2\pi\eta r\ell \frac{dv}{dr}; \Rightarrow$$

$$dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta\ell} r dr. \quad (11.3)$$

Проинтегрируем это выражение с учетом граничного условия: $v = 0$ при $r = R$ (скорость газа на поверхности трубы равна нулю).

$$\int_0^{v(r)} dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta\ell} \int_R^r r dr; \Rightarrow v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta\ell} (R^2 - r^2); \Rightarrow$$

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta\ell} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (11.4)$$

Скорость течения газа на оси трубы оказалась

$$v_0 = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta\ell} R^2. \quad (11.5)$$

С учетом этого перепишем уравнение (11.4):

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (11.6)$$

Таким образом, скорость газа уменьшается при удалении от оси трубы по квадратичному закону.

Вычислим поток газа Q , т.е. объем газа, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени. Для этого разобьем поперечное сечение трубы на кольца шириной dr . Площадь этого кольца dS равна длине окружности, умноженной на ширину: $dS = 2\pi r dr$. Поток dQ через эту площадь равен произведению скорости газа на dS :

$$dQ = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr. \quad (11.7)$$

Поток Q через полное сечение трубы найдем интегрированием этого выражения в пределах от 0 до R .

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = 2\pi v_0 \int_0^R r dr - 2\pi v_0 \int_0^R \frac{r^3}{R^2} dr = \frac{\pi R^2}{2} v_0.$$

С учетом (11.5) перепишем получившееся выражение и получим:

$$Q = \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta\ell} \pi R^4. \quad (11.8)$$

Получилась формула Пуазейля. Она справедливо как для газа, так и для жидкости. С ее помощью можно рассчитать объем жидкости, поступающий через эту трубу в единицу времени, по размерам трубы и перепаду давления на ее концах. Для газа ее можно использовать для определения коэффициента вязкости. Пропуская газ через капилляр радиуса R и длиной ℓ , измеряют перепад давления ΔP и расход газа Q . По измеренным данным можно найти коэффициент вязкости газа:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8Q\ell}. \quad (11.9)$$

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки приведен на рис. 11.1.

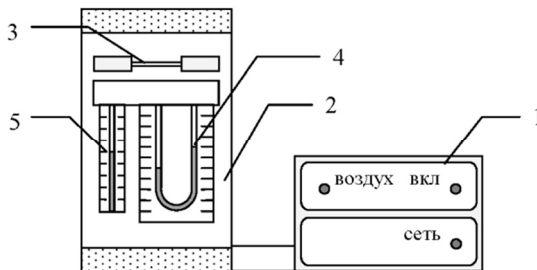


Рис. 11.1. Внешний вид лабораторной установки

Приборный блок 1 состоит из двух модулей: модуль питания “Сеть” с тумблером включения и лампой индикации и модуль “Воздух” с тумблером включения микрокомпрессора, лампой ин-

дикации и регулятором расхода воздуха. Блок рабочего элемента 2 включает в себя металлический капилляр 3, закрепленный между отборными камерами. Через капилляр прокачивается воздух от микрокомпрессора. Перепад давления в капилляре измеряется манометром 4, который подсоединен к отборным камерам. Расход воздуха измеряется реометром 5. Расход воздуха лучше регулировать так, чтобы показания реометра были в центральной части шкалы.

Размеры капилляра: длина $l = 10$ см, диаметр $2R = 0,928$ мм.

Задание и порядок его выполнения

Определение перепада давления ΔP проводится водяным манометром. Его показания отградуированы непосредственно в Паскалях. Расход воздуха Q измеряется реометром. Единица измерения, отложенная на его шкале, составляет 10^{-5} м³/с.

Измерение перепада давления ΔP , так же как и расхода воздуха Q , нужно проводить одним глазом, обязательно поместив его на одном уровне с верхней кромкой водяного столба. Если глаз окажется выше или ниже этого уровня, то возникнет ошибка, связанная с так называемым *параллаксом*.

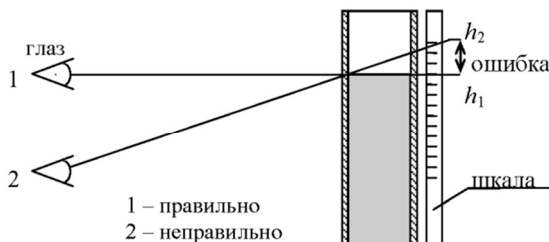


Рис. 11.2. Измерение высоты столба воды

Происхождение этой ошибки показано на рис.11.2. В связи с невозможностью полностью исключить параллакс при измерениях, систематическую погрешность перепада давления ΔP нужно взять равной двойной цене деления прибора, а систематическую погрешность расхода воздуха Q на данной конкретной установке – 0,4 цены деления.

$$\theta_{(\Delta P)} = 30 \text{ Па}, \quad \theta_Q = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}, \quad \theta_R = 2 \text{ мкм}, \quad \theta_1 = 1 \text{ мм}.$$

Задание. Определение коэффициента вязкости воздуха.

Нужно провести измерения перепада давления ΔP для различных значений расхода воздуха: от $Q = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ до максимально возможного.¹ При измерениях расхода воздуха нужно учесть возможное смещение нуля реометра и манометра.

В каждом случае вычислить значение коэффициента вязкости. Найти среднее значение η , оценить его случайную погрешность.

Для одного из значений коэффициента вязкости вычислить систематическую погрешность θ_η .

Записать окончательный результат и его полную погрешность, приняв ее равной систематической. Сравнить полученное значение коэффициента вязкости с табличным $\eta = 17,2 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$.

Контрольные вопросы

1. Какое движение газа называется ламинарным?
2. Что называется коэффициентом вязкости?
3. Какие силы действуют на элемент газа, текущего в круглой трубе?
4. От чего зависит скорость течения газа?
5. Что называется потоком газа? Как его найти?
6. Как записывается формула Пуазейля?
7. Как можно исключить параллакс при измерениях манометром и реометром?

¹ Следует выбирать значения Q , соответствующие целому числу делений на шкале реометра.

Лабораторная работа № 12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ДЛЯ ВОЗДУХА

Цель работы: определение показателя адиабаты $\frac{C_p}{C_v}$ для воздуха.

Теоретические сведения

Элементарная механическая работа, совершаемая газом в термодинамическом процессе, может быть вычислена по формуле

$$\delta A = PdV, \quad (12.1)$$

в которой P – давление газа, а dV – изменение его объема. Полученная газом элементарная теплота δQ зависит от приращения температуры dT , и от теплоемкости C газа в этом процессе:

$$\delta Q = CdT. \quad (12.2)$$

Существенно, что величины δA и δQ являются функциями не состояния, а термодинамического процесса.

Внутренняя энергия U является функцией состояния, поэтому имеет полный дифференциал. Таким образом, величина dU зависит лишь от начального и конечного состояний газа, т.е. от приращения температуры dT :

$$dU = C_V dT. \quad (12.3)$$

В этой формуле C_V – теплоемкость идеального газа при постоянном объеме. Она зависит от количества вещества ν и от числа степеней свободы i молекул газа:

$$C_V = \frac{i}{2} \nu R. \quad (12.4)$$

Здесь $R = 8,314$ Дж/Моль · К – универсальная газовая постоянная.

Первый закон термодинамики, который фактически является законом сохранения энергии для термодинамических систем, записывается в виде

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (12.5)$$

Процесс изменения состояния идеального газа, при котором его давление остается постоянным, называется изобарическим, элементарная работа газа в этом процессе

$$\delta A = PdV = \nu R dT.$$

Теплоту, полученную газом в этом процессе, найдем, принимая во внимание формулы (12.5), (12.3) и (12.4):

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2} \nu R dT + \nu R dT = \frac{i+2}{2} \nu R dT.$$

Сравнивая получившееся выражение с (12.2), найдем теплоемкость идеального газа при постоянном давлении C_p :

$$C_p = \left(\frac{i+2}{2} \right) \nu R. \quad (12.6)$$

Отношение теплоемкости идеального газа при постоянном объеме к теплоемкости при постоянном давлении будет

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (12.7)$$

Процесс изменения состояния термодинамической системы без ее теплообмена с окружающей средой называется адиабатическим. На практике адиабатическими могут считаться процессы, протекающие настолько быстро, что теплообмен с окружающей средой не успевает произойти. Как это следует из определения, в адиабатическом процессе $\delta Q = 0$, следовательно, $dU + \delta A = 0$. Сказанное означает, что работа совершается лишь за счет изменения внутренней энергии газа:

$$\delta A = -dU. \quad (12.8)$$

Подставим выражения (12.1), (12.3) и (12.4) в только что полученную формулу (12.6) и получим

$$-PdV = \frac{i}{2} \nu R dT. \quad (12.9)$$

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева, которое является уравнением состояния идеального газа:

$$PV = \nu RT. \quad (12.10)$$

Продифференцируем его, домножим на $i/2$ и получим

$$\frac{i}{2}VdP + \frac{i}{2}PdV = \frac{i}{2}\nu RdT. \quad (12.11)$$

Поскольку у выражений (12.9) и (12.11) равны правые части, должны быть равны и левые. Приравниваем их и получаем

$$\frac{i}{2}VdP = -\left(\frac{i+2}{2}\right)PdV; \Rightarrow \frac{dP}{P} + \left(\frac{i+2}{2}\right)\frac{dV}{V} = 0.$$

Учтем формулу (12.7) и продолжим выкладки:

$$d(\ln P) + \gamma d(\ln V) = 0; \Rightarrow d(\ln P + \ln V^\gamma) = 0; \Rightarrow$$

$$d \ln(PV^\gamma) = 0; \Rightarrow \ln(PV^\gamma) = \text{const}; \Rightarrow$$

$$PV^\gamma = \text{const}. \quad (12.12)$$

Получилось уравнение Пуассона, связывающее давление и объем газа в адиабатическом процессе. Теперь выведем уравнение адиабаты, связывающее давление и температуру газа, для чего возведем уравнение Клапейрона – Менделеева в степень γ и поделим на (12.12)

$$\frac{PV}{T} = \text{const}; \Rightarrow \left(\frac{PV}{T}\right)^\gamma = \text{const}; \Rightarrow \frac{P^\gamma V^\gamma}{T^\gamma PV^\gamma} = \text{const}; \Rightarrow$$

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}. \quad (12.13)$$

Постановка эксперимента

Величину γ можно определить экспериментально на установке, блок – схема которой показана на рис. 12.1. Если в стеклянный сосуд 1 быстро, в течение времени Δt_1 , накачать воздух насосом 2, то в этом процессе над ним будет совершена работа A' , вследствие чего температура газа T увеличится по сравнению с комнатной T_0 . Давление воздуха в сосуде P_1 тоже станет больше атмосферного P_0 . На рис. 15.2 приведена зависимость избыточного давления $\Delta P = P - P_0$ воздуха в сосуде от времени в описываемых процессах.

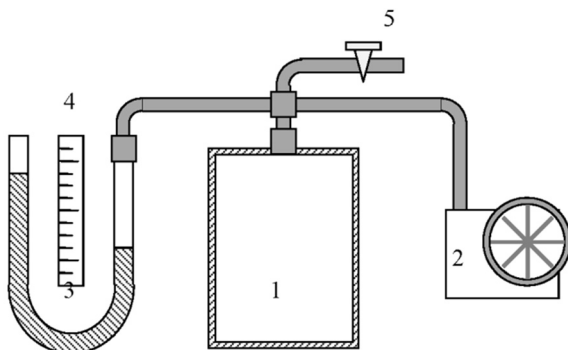


Рис. 12.1. Блок схема экспериментальной установки

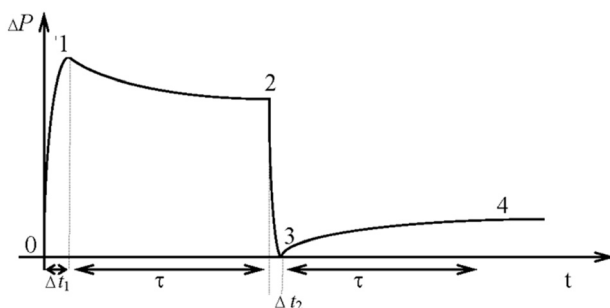


Рис. 12.2. Зависимость избыточного давления от времени

После прекращения накачки вследствие теплообмена с окружающей средой температура и давление воздуха в сосуде начнут уменьшаться. Через некоторое время τ , которое называется временем релаксации, температура станет равной температуре окружающей среды T_0 , избыточное давление при этом уменьшится не до нуля, а до некоторого нового значения ΔP_2 .

Если теперь быстро открыть кран 5 и таким образом за очень короткое время Δt_2 уменьшить избыточное давление до нуля, то одновременно уменьшится и температура газа до значения T_3 . Этот процесс является адиабатическим, поэтому температура и давление в его начале и конце связаны уравнением (12.13):

$$P_2^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_0^{1-\gamma} T_3^\gamma. \quad (12.14)$$

После закрытия крана 5 происходит медленное изохорическое нагревание воздуха в сосуде 1. За время τ его температура сравняется с температурой окружающей среды T_0 . Вследствие этого нагрева давление газа возрастает и принимает значение P_4 . Это значение будет меньше, чем P_2 , поскольку в сосуде уменьшилось количество воздуха. Для процесса изохорического нагревания воздуха (3 \rightarrow 4) запишем

$$\frac{P_0}{T_3} = \frac{P_4}{T_0}. \quad (12.15)$$

Подставим (12.15) в (12.14) и получим

$$\left(\frac{P_4}{P_0}\right)^\gamma = \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1-\gamma}. \quad (12.16)$$

Логарифмируем получившееся выражение и, сделав алгебраические преобразования, получаем

$$\gamma = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_2 - \ln P_4}. \quad (12.17)$$

В формуле (12.17) перейдем от давлений к избыточным давлениям:

$$\gamma = \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{(\ln P_2 - \ln P_0) - (\ln P_4 - \ln P_0)} = \frac{\ln \frac{P_2}{P_0}}{\ln \frac{P_2}{P_0} - \ln \frac{P_4}{P_0}} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta P_2}{P_0}\right)}{\ln \left(1 + \frac{\Delta P_2}{P_0}\right) - \ln \left(1 + \frac{\Delta P_4}{P_0}\right)}.$$

Поскольку $\Delta P \ll P$, используя соотношение $\ln(1 + x) = x$ при $x \ll 1$, имеем

$$\gamma = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_2 - \Delta P_4}. \quad (12.18)$$

Лабораторная установка

Внешний вид лабораторной установки приведен на рис. 12.3. Она состоит из сосуда 1 с воздухом, приборного блока 2 с насосом и водяного манометра 3. На лицевой панели блока управления

имеются три кнопки: “Сеть”, подключающая установку к электрической сети, “Вкл.”, включающая насос, и “Атмосфера”, соединяющая сосуд 1 с атмосферой.

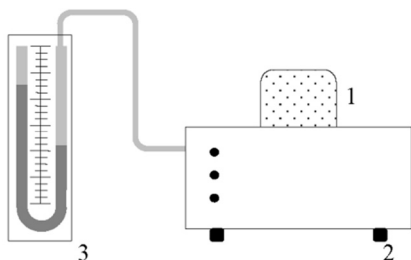


Рис. 12.3. Внешний вид лабораторной установки

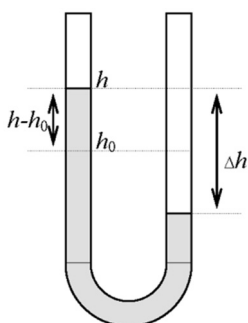


Рис. 12.4. Показания манометра

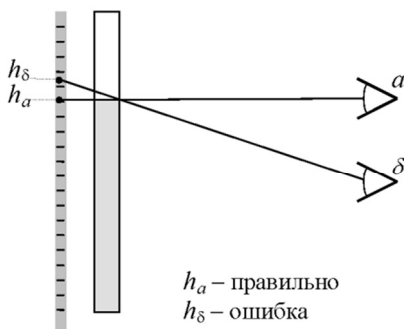


Рис. 12.5. Ошибки при измерении высоты водяного столба
 h_a – правильно
 $h_δ$ – ошибка

Задания и порядок их выполнения

До начала измерений необходимо сделать следующее.

1. Если манометр показывает какое-то избыточное давление, то его необходимо установить на ноль. Для этого нужно включить прибор, нажать кнопку “Атмосфера” и держать ее нажатой не меньше минуты. Эту процедуру следует повторять после каждого опыта.

2. Определить уровень жидкости h_0 в левом и правом коленах манометра, когда давление в сосуде равно атмосферному, т.е. при нажатой кнопке “Атмосфера”.

3. Избыточное давление ΔP в дальнейшем следует определять в одном из колен, например в левом, как показано на рис. 12.4:

$$\Delta P = 2|P - P_0|. \quad (12.19)$$

Измерение этой величины нужно проводить одним глазом, обязательно поместив его на одном уровне с верхней кромкой водяного столба. Если глаз окажется выше или ниже этого уровня, то возникнет ошибка, связанная с так называемым *параллаксом*. Происхождение этой ошибки показано на рис. 12.5.

Задание. Определение показателя адиабаты для воздуха.

Для выполнения этого задания нужно сделать следующее.

Включить насос на 10–20 с и, выключив его, через ~1 мин измерить избыточное давление ΔP .

Нажать кнопку “Атмосфера” и отпустить ее через $\Delta t \cong 3-5$ с, сразу же, как уровни жидкости в обоих коленах выровняются.

Через ~1 мин измерить новое избыточное давление $\Delta P'$.

Нажать на кнопку “Атмосфера” и не отпускать ее ~1 мин.

По формуле (12.18) вычислить показатель адиабаты для воздуха:

$$\gamma = \frac{\Delta P}{\Delta P - \Delta P'}.$$

Описанную выше процедуру следует повторить не менее 5 раз при различных начальных избыточных давлениях. Найти среднее значение показателя адиабаты, систематическую, случайную и полную погрешности измерений.

При вычислении систематической погрешности θ_γ считать, что систематическая погрешность разности уровней составляет 20 Па. При вычислении полной погрешности считать, что производится измерение неслучайной по своей природе величины.

Полученное значение γ сравнить с теоретическим, найденным по формуле (12.7) для газа, состоящего из жестких двухатомных молекул.

Контрольные вопросы

1. Что называется теплоемкостью газа при постоянном давлении и при постоянном объеме?
2. Чему равны эти теплоемкости для идеального газа, состоящего из жестких одно-, двух- и трехатомных молекул?

3. Какой процесс называется адиабатическим? В каком случае реальный процесс является адиабатическим?
4. Рассчитайте показатель адиабаты для идеального газа, состоящего из жестких одно-, двух- и трехатомных молекул.
5. Получите уравнение адиабаты, связывающее объем и температуру идеального газа.
6. Какие процессы происходят с воздухом в сосуде во время опыта?
7. В чем отличие процессов 1–2 и 3–4?
8. С чем связано избыточное давление воздуха в состояниях 1, 2, 4?
9. Почему в состояниях 1 и 3 температура газа в сосуде отличается от температуры окружающего воздуха?
10. Почему перед началом опыта нужно обязательно выпустить воздух и в течение минуты подержать клапан “Атмосфера” открытым?
11. Можно ли начинать новый опыт не из состояния 0, а из состояния 4?
12. Как можно исключить параллакс при измерении уровня жидкости в манометре?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица П1

Значения коэффициентов Стьюдента k

n	P							
	0,6	0,68	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1,38	2,0	3,06	6,31	12,7	31,8	63,7	636,6
3	1,06	1,32	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	31,7
4	0,98	1,20	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
5	0,94	1,15	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,6
6	0,92	1,12	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	6,9
7	0,90	1,10	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	6,0
8	0,90	1,09	1,42	1,89	2,36	3,00	3,50	5,4
9	0,89	1,08	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	5,0
10	0,88	1,07	1,38	1,80	2,26	2,82	3,25	4,8
12	0,87	1,06	1,36	1,80	2,19	2,72	3,11	4,4
14	0,87	1,05	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	4,2
18	0,86	1,04	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	4,0
20	0,86	1,03	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,9
30	0,85	1,02	1,31	1,70	2,0	2,46	2,76	3,7
50	0,85	1,01	1,30	1,68	2,0	2,40	2,68	3,5
100	0,85	1,00	1,29	1,66	2,0	2,36	2,63	3,4

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Образец оформления протокола измерений

Лабораторная работа №1

Определение электрического сопротивления

Протокол измерений

Студент группы № 5419

Цветков П.И.

Преподаватель

Коваленко И.И.

Параметры приборов

Прибор	Тип	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	Систематическая погрешность
Вольтметр	M93	1,5 В	0,05 В	1,5	0,02 В
Миллиамперметр	M93	250 мА	5 мА	1,5	4 мА
Линейка		50 см	1 мм	-	2 мм

Электрические сопротивления приборов: $R_V = 2500 \text{ Ом}$, $R_A = 0,2 \text{ Ом}$

Результаты измерений

Схема А	$U, \text{ В}$	0,63	0,73	0,83	0,91	1,02	1,11	1,25	1,31	1,40	1,50
	$I, \text{ мА}$	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
Схема В	$U, \text{ В}$	0,61	0,72	0,81	0,89	0,99	1,12	1,22	1,29	1,38	1,48
	$I, \text{ мА}$	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15

$\ell = 0,93 \text{ м}$, $d = 0,36 \text{ мм}$.

Дата

Подпись студента

Подпись преподавателя

Образец оформления титульного листа

ГУАП

КАФЕДРА № 3

**ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ**

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

должность,
уч. степень, звание

подпись, дата

инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

по курсу: ОБЩАЯ ФИЗИКА

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ(А)

СТУДЕНТ(КА) ГР. _____

подпись, дата

инициалы, фамилия

Санкт-Петербург
2015

Образец оформления отчета

1. Цель работы:

- ознакомление с методикой обработки результатов измерений;
- определение электрического сопротивления провода;
- экспериментальная проверка закона Ома;
- определение удельного сопротивления нихрома;
- сравнение двух электрических схем.

2. Описание лабораторной установки.

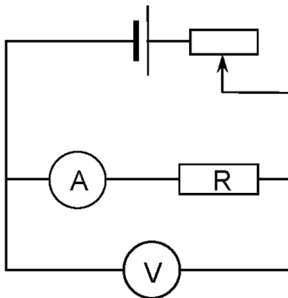


Рис. П4.А

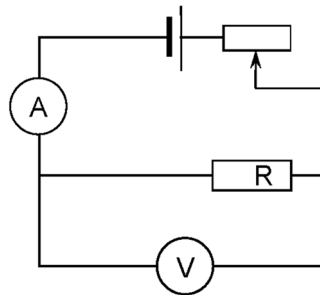


Рис. П4.В

Таблица 2.1

Параметры установки

Прибор	Тип	Цена деления	Класс точности	Предел измерений	Систематическая погрешность	Внутреннее сопротивление
Вольтметр	М93	0,05 В	1,5	1,5 В	0,02 В	2500 Ом
Миллиамперметр	М93	5 мА	1,5	250 мА	0,004 А	0,2 Ом
Линейка	-	1 мм	-	50 см	0,002 м	-

3. Рабочие формулы.

Вычисление электрического сопротивления:

$$\text{Закон Ома} \quad R = \frac{U}{I}, \quad (1)$$

$$\text{для схемы A} \quad R = \frac{U}{I} - R_A, \quad (2)$$

$$\text{для схемы B} \quad R = \left(\frac{I}{U} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1}. \quad (3)$$

В этих формулах R – электрическое сопротивление проводника, U – падение напряжения на проводнике, I – сила тока в проводнике, R_A – сопротивление амперметра, R_V – сопротивление вольтметра.

$$R_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}, \quad (4)$$

где R_{cp} – среднее значение сопротивления, n – число измерений.

$$\rho = \frac{R_{cp} \pi D^2}{4\ell}, \quad (5)$$

где ρ – удельное сопротивление металла, ℓ – длина провода, D – диаметр провода.

4. Результаты измерений и вычислений.

Таблица 4.1.A

$U, \text{ В}$	0,68	0,73	0,83	0,91	1,02	1,11	1,25	1,31	1,43	1,50
$I, \text{ А}$	0,066	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
$U/I, \text{ Ом}$	10,30	10,42	10,38	10,11	10,20	10,09	10,42	10,08	10,21	10,00
$R, \text{ Ом}$	10,1	10,2	10,2	9,9	10,0	9,9	10,2	9,9	10,0	9,8
$\theta_R, \text{ Ом}$	0,9	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4

Таблица 4.1.В

$U, В$	0,67	0,72	0,81	0,89	0,99	1,12	1,22	1,29	1,38	1,48
$I, А$	0,066	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
$U/I, Ом$	10,15	10,29	10,12	9,89	9,90	10,18	10,17	9,92	9,86	9,87
$R, Ом$	10,2	10,3	10,1	9,9	9,9	10,2	10,2	9,9	9,9	9,9
$\theta_R, Ом$	0,9	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4

$$R_{cp} = 10,0 \text{ Ом}; \rho = 1,10 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

5. Примеры вычислений.

По формуле (1) $R = \frac{U}{I} = \frac{0,67}{0,066} = 10,15 \cong 10,2(\text{Ом})$.

По формуле (2) $R = \frac{U}{I} - R_A = \frac{0,68}{0,066} - 0,2 = 10,1(\text{Ом})$.

По формуле (3) $R = \left(\frac{I}{U} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} = \left(\frac{0,066}{0,67} - \frac{1}{2500} \right)^{-1} =$
 $= (0,0985 - 0,0004)^{-1} = \frac{1}{0,0985 - 0,0004} = 10,2(\text{Ом})$.

По формуле (4)

$$R_{cp} = \frac{10,1 + 10,2 + 10,2 + 9,9 + 10,0 + 9,9 + 10,2 + 9,9 + 10,0 + 9,8}{20} +$$

$$+ \frac{10,2 + 10,3 + 10,1 + 9,9 + 9,9 + 10,2 + 10,2 + 9,9 + 9,9 + 9,9}{20} =$$

$$= 10,035 \approx 10,0(\text{Ом})$$

По формуле (5)

$$\rho = \frac{R_{cp} \pi D^2}{4 \ell} = \frac{10,0 \cdot 3,14 \cdot (0,36 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 0,93} = 1,10 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

6. Вычисление погрешностей.

6.1. Систематические погрешности

$$6.1.1. \theta_I = \frac{I_m K_I}{100} = \frac{0,25 \cdot 1,5}{100} = 3,75 \cdot 10^{-3} \approx 0,004(\text{А}).$$

$$6.1.2. \theta_U = \frac{U_m K_U}{100} = \frac{1,5 \cdot 1,5}{100} = 0,0225 \approx 0,02(\text{В}).$$

$$6.1.3. \theta_I = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$6.1.4. \theta_D = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

6.1.5. Вывод формулы для систематической погрешности косвенного измерения электрического сопротивления.

$$R = R(U, I) = \frac{U}{I}; \quad \Rightarrow \quad \theta_R = R \left(\frac{\theta_U}{U} + \frac{\theta_I}{I} \right).$$

Вычисления по выведенной формуле:

$$\theta_{R_1} = R_1 \cdot \left(\frac{\theta_U}{U_1} + \frac{\theta_I}{I_1} \right) = 10,1 \cdot \left(\frac{0,02}{0,68} + \frac{0,004}{0,066} \right) = 10,1 \cdot (0,029 + 0,061) = 0,9(\text{Ом}),$$

$$\theta_{R_{10}} = R_{10} \cdot \left(\frac{\theta_U}{U_{10}} + \frac{\theta_I}{I_{10}} \right) = 9,8 \cdot \left(\frac{0,02}{1,48} + \frac{0,004}{0,15} \right) = 9,8 \cdot (0,014 + 0,027) = 0,4(\text{Ом}).$$

В качестве систематической погрешности итогового результата берем значение, полученное при самом большом токе $\theta_{R_{cp}} = 0,4 \text{ Ом}$.

6.1.6. Вывод формулы для систематической погрешности удельного сопротивления металла.

$$\rho = \frac{R_{cp} \pi D^2}{4\ell}; \quad \rho = \rho(R_{cp}, \ell, D); \quad \theta_\rho = \rho \left(\frac{\theta_R}{R} + \frac{\theta_\ell}{\ell} + 2 \frac{\theta_D}{D} \right).$$

Вычисления по выведенной формуле:

$$\begin{aligned} \theta_\rho &= \rho \cdot \left(\frac{\theta_R}{R} + \frac{\theta_\ell}{\ell} + 2 \frac{\theta_D}{D} \right) = 1,10 \cdot 10^{-6} \left(\frac{0,4}{10,0} + \frac{0,002}{0,93} + \frac{0,01 \cdot 10^{-3}}{0,36 \cdot 10^{-3}} \right) = \\ &= 1,10 \cdot 10^{-6} \cdot (0,04 + 0,002 + 0,027) = 1,10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,067 = 0,08 \cdot 10^{-6} \text{ (Ом} \cdot \text{м)}. \end{aligned}$$

6.2. Случайные погрешности.

6.2.1. Средняя квадратичная погрешность отдельного измерения

$$S_R = \sqrt{\frac{(R_1 - R_{cp})^2 + (R_2 - R_{cp})^2 + \dots + (R_N - R_{cp})^2}{N - 1}};$$
$$S_R = \sqrt{\frac{(R_1 - R_{cp})^2 + (R_2 - R_{cp})^2 + \dots + (R_{11} - R_{cp})^2 + \dots + (R_{20} - R_{cp})^2}{19}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(10,1 - 10,0)^2 + (10,2 - 10,0)^2 + \dots + (10,2 - 10,0)^2 + \dots + (9,9 - 10,0)^2}{19}} =$$
$$= \sqrt{\frac{0,01 + 0,04 + 0,04 + 0,01 + 0 + 0,01 + 0,04 + 0,01 + 0 + 0,04 + 0,04 + 0,09 + \dots}{19}}$$
$$\dots \frac{+ 0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,04 + 0,04 + 0,01 + 0,01 + 0,01}{19} =$$
$$= \sqrt{\frac{0,2 + 0,01 \cdot 10 + 0,04 \cdot 7 + 0,09 \cdot 1}{19}} = \sqrt{\frac{0,10 + 0,28 + 0,09}{19}} = \sqrt{\frac{0,47}{19}} = 0,16 \text{ (Ом)}$$

6.2.2. Среднее квадратичное отклонение

$$S_{R_{cp}} = \sqrt{\frac{(R_1 - R_{cp})^2 + (R_2 - R_{cp})^2 + \dots + (R_N - R_{cp})^2}{(N - 1)N}} = \frac{S_R}{\sqrt{N}}.$$

$$S_{R_{cp}} = \frac{0,16}{\sqrt{20}} = 0,035 \approx 0,04 \text{ (Ом)}.$$

В данной работе проводится измерение неслучайных по своей природе физических величин: электрического сопротивления провода – R и удельного сопротивления нихрома – ρ , поэтому, проверяем неравенства

$$S_R \leq \theta_R; S_{R_{cp}} < \theta_R.$$

$$0,16 \text{ Ом} < 0,4 \text{ Ом}, \quad \text{т. е. } S_R < \theta_R;$$

$$0,04 \text{ Ом} \ll 0,4 \text{ Ом}, \quad \text{т. е. } S_{R_{cp}} \ll \theta_R.$$

Получившиеся неравенства говорят о том, что в измерениях, скорее всего, нет грубых ошибок и промахов.

6.2.3. Случайные погрешности удельного сопротивления:

$$\rho = \frac{R_{\text{ср}} \pi D^2}{4\ell}, \Rightarrow S_{\bar{\rho}} = S_{R_{\text{ср}}} \frac{\pi D^2}{4\ell} = \frac{R_{\text{ср}} \pi D^2}{4\ell} \cdot \frac{S_{R_{\text{ср}}}}{R_{\text{ср}}}, \Rightarrow S_{\bar{\rho}} = \frac{\rho S_{R_{\text{ср}}}}{R_{\text{ср}}}.$$

$$S_{\bar{\rho}} = \frac{\rho S_{R_{\text{ср}}}}{R_{\text{ср}}} = \frac{1,10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,04}{10,0} = 0,0044 \cdot 10^{-6} \approx 0,005 \cdot 10^{-6} \text{ (Ом} \cdot \text{м)}.$$

6.3. Полная погрешность.

В случае, когда измеряются неслучайные по своей природе физические величины, случайные погрешности уже учтены в систематических. Объединять их в полную погрешность не надо. Полная погрешность равна систематической погрешности.

$$\Delta_R = \theta_R = 0,4 \text{ Ом}.$$

$$\Delta_{\rho} = \theta_{\rho} = 0,08 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

7. Выводы.

- Ознакомился с методикой обработки результатов косвенных измерений.

- Электрическое сопротивление провода $R = 10,0 \pm 0,4 \text{ Ом}$ с вероятностью $P = 95\%$.

- Удельное сопротивление нихрома $\rho = (1,10 \pm 0,08) \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ с вероятностью $P = 95\%$.

- Экспериментально определенное значение ρ в пределах погрешности совпадает с табличным значением нихрома $\rho_{\text{таб}} = 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

- Из проведенных опытов видно, что каждое сопротивление в табл. 4.А, В отличаются от $R_{\text{ср}}$ меньше, чем на систематическую погрешность θ_R . Это обозначает, что электрическое сопротивление не зависит от протекающего тока и от падения напряжения на нем, т.е. *справедлив закон Ома*.

- Учет сопротивления амперметра приводит к поправке 0,2 Ом, учет сопротивления вольтметра приводит к поправке 0,02 Ом. Поскольку результат приходится округлять до десятых долей ома, поправку на сопротивление вольтметра по формуле (3) можно не делать. Значит, для схемы В электрическое сопротивление можно вычислять по закону Ома без поправок.

Библиографический список

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики: В 3 т. М., 2002. Т.1, 2.
2. *Иродов И. Е.* Физика. Основные законы: В 5 т. М., 2005. Т.1.
3. *Савельев И. В.* Курс физики: В 3 т. СПб., 2011. Т.1, 2.
4. *Фриш С. Э., Тиморева А. В.* Курс общей физики: В 3 т. М., 1956. Т.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Порядок проведения лабораторных работ.....	3
Лабораторная работа № 1. Определение электрического сопротивления	32
Лабораторная работа № 2. Машина Атвуда	40
Лабораторная работа № 3. Маятник Максвелла.....	48
Лабораторная работа № 4. Математический и оборотный маятники	54
Лабораторная работа № 5. Крутильный маятник	65
Лабораторная работа № 6. Маятник Обербека	72
Лабораторная работа № 7. Наклонный маятник	78
Лабораторная работа № 8. Столкновение шаров	88
Лабораторная работа № 9. Гироскоп	96
Лабораторная работа № 10. Определение скорости звука в воздухе	102
Лабораторная работа № 11. Определение коэффициента вязкости воздуха.....	108
Лабораторная работа № 12. Определение показателя адиабаты для воздуха	113
Приложение 1	121
Приложение 2. Образец оформления протокола измерений.....	122
Приложение 3. Образец оформления титульного листа	123
Приложение 4. Образец оформления отчета.....	124
Библиографический список	130

Учебное издание

**Коваленко Иван Иванович,
Лавровская Наталья Павловна,
Литвинова Надежда Николаевна и др.**

**МЕХАНИКА.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

Лабораторный практикум

Редактор *А. Н. Подчепалева*
Компьютерная верстка *Н. Н. Каравановой*

Сдано в набор 17.11.14. Подписано к печати 30.12.14. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 8,25. Усл. печ. л. 7,67. Тираж 500 экз. Заказ № 642.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67