

**Р.С. Кударов**

**Задание**  
**для контрольной работы**  
*по дисциплине*  
**«МАТЕМАТИКА» (Б1.О.7)**

для специальности

(23.05.04) «Эксплуатация железных дорог»

по специализациям  
«Магистральный транспорт»  
«Грузовая и коммерческая работа»  
«Пассажирский комплекс железнодорожного транспорта»  
«Транспортный бизнес и логистика»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3 – ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЛИНЕЙНОЕ  
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Санкт-Петербург 2020

1. Найти частные производные первого и второго порядка функции  $z = f(x, y)$  и показать, что она удовлетворяет данному тождеству.

$z = f(x, y)$	Тождество
$z = \sqrt{mx^n - ny^m}$	$y^{m-1} \frac{\partial z}{\partial x} + x^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

2. Даны функция  $z = f(x, y)$  и две точки  $M_1(m, n), M_2(m + 1, 3)$
- Найти первый дифференциал этой функции  $dz$  и его значения в точках  $M_1$  и  $M_2$ .
  - Найти градиент  $\overline{grad} z$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ .
  - Найти производную функции  $z = f(x, y)$  по направлению вектора  $\bar{a} = \overline{M_1 M_2}$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ .
  - Найти стационарные точки функции  $z = f(x, y)$ .
  - Найти второй дифференциал  $d^2z$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ .
  - Определить тип экстремума функции в стационарных точках, если он существует.
  - Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $z = f(x, y)$  в прямоугольнике, заданном ограничениями:  $0 \leq x \leq 2m; 0 \leq y \leq 2n$ .
  - Найти экстремум функции  $z = f(x, y)$  при условии  $nx + my = 4$  (по теореме Лагранжа).

$$z(x, y) = 2x^2 + mxy - 3y^2 - nx + 2y + mn$$

**(1-10)** Записать задачу в математической форме, указав экономический смысл вводимых переменных

- Строительная организация планирует сооружение домов типа  $D_1, D_2, D_3$  с однокомнатными, двухкомнатными и трёхкомнатными квартирами. Один дом  $D_1$  состоит из 10 одно-, 50 двух- и 35 трех- комнатных квартир. Для домов  $D_2$  и  $D_3$  эти данные равны соответственно 20, 60, 10 и 15, 30, 5. Годовой план ввода жилой площади составляет не менее 700 однокомнатных, 2000 двухкомнатных и 600 трёхкомнатных квартир. Требуется составить программу строительства так, чтобы выполнить годовой план с наименьшими затратами, естественно известно, что затраты на возведение одного дома  $D_1, D_2$  и  $D_3$  составляют соответственно 700, 400 и 300 тыс. руб.
- Для выращивания порции овощей по способу гидропоники необходимо не менее 20 кг питательной смеси, содержащей более 1% фосфора, 1.5% азота, 2% калия и 0.01% различных микроэлементов и не более 1.5% фосфора, 2% азота, 5% калия и 0.03% микроэлементов. Для составления питательной смеси используют 4 вида удобрений. Содержание указанных питательных веществ в 1 кг удобрения первого вида составляет 20, 0, 10, 0 г соответственно, второго – 20, 10, 60, 0.4 г, третьего – 10, 50, 10, 0.5 г, четвертого – 10, 20, 30, 0.2 г. Стоимость 1 кг удобрения каждого вида составляет 7,

- 6, 8 и 10 рублей соответственно. Сколько килограммов удобрений каждого вида надо взять, чтобы приготовить питательную смесь нужного состава при ее минимальной стоимости?
3. В мастерской при изготовлении столов, шкафов и тумбочек применяются два вида древесины. На один стол расходуется  $0.15 \text{ м}^3$  древесины первого вида и  $0.2 \text{ м}^3$  – второго, на один шкаф –  $0.2 \text{ м}^3$  и  $0.1 \text{ м}^3$  соответственно, а на одну тумбочку  $0.05 \text{ м}^3$  древесины первого вида. В наличии имеется  $60 \text{ м}^3$  древесины первого вида и  $40 \text{ м}^3$  второго. Количество выпущенных шкафов должно быть не менее 200. Выпуск столов и тумбочек не запланирован. Прибыль мастерской от производства одного стола составляет 12 рублей, шкафа – 15 рублей, тумбочки – 3 рубля. Сколько столов, шкафов и тумбочек должна изготовить мастерская, чтобы получить наибольшую прибыль?
  4. Завод выпускает три типа вагонов *A*, *B* и *C*. Строительство вагонов происходит в цехе 1, а производство дополнительных наборов деталей внутреннего оборудования в цехе 2. В первом цехе за плановый период можно построить 25 вагонов *A*, или 50 вагонов *B*, или 20 вагонов *C*. Для цеха 2 эти данные составляют 20, 60 и 30. Прибыль от выпуска одного вагона *A* составляет 50 рублей, *B* – 20 рублей, *C* – 40 рублей. Сколько нужно выпустить вагонов каждого типа за плановый период, чтобы получить наибольшую прибыль?
  5. На приобретение оборудования для нового производственного участка имеются капиталовложения 50 тыс. рублей, а для размещения выделена площадь в  $74 \text{ м}^2$ . Можно приобрести оборудование трёх видов. Единица оборудования первого вида занимает  $9 \text{ м}^2$  и стоит 6 тыс. рублей. Для оборудования 2-ого и 3-ого вида эти данные таковы:  $4 \text{ м}^2$  и 3 тыс. рублей,  $3 \text{ м}^2$  и 1 тыс. рублей. Прибыль от единицы нового оборудования составляет 12, 6 и 2 тыс. рублей соответственно. Сколько нужно приобрести нового оборудования каждого вида, чтобы получить наибольшую прибыль и при этом полностью израсходовать выделенные капиталовложения.
  6. Студенческая столовая ежедневно готовит три варианта комплексных обедов: мясной по цене 65 рублей, рыбный – по 45 рублей и диетический – по 60 рублей. Суммарное количество реализованных обедов не превосходит 660, из них суммарное количество мясных и рыбных, по крайней мере, в 10 раз больше диетических, а количество мясных, по крайней мере, вдвое больше рыбных. Сколько комплексных обедов каждого варианта должно быть приготовлено, чтобы суммарный кассовый сбор за них был максимальным?
  7. Для изготовления хромоникелевой стали можно использовать два вида руды. Одна тонна руды первого вида содержит в своём составе 2 единицы железа, 1 – хрома, 2 – никеля; для одной тонны руды второго вида содержание этих компонентов составляет 4, 4.5, и 3 соответственно. В сплаве должно содержаться не менее 20 единиц железа, не менее 15 единиц хрома и не менее 10 единиц никеля. Сколько руды каждого вида надо взять для изготовления наиболее дешёвого сплава, удовлетворяющего указанным условиям, если одна тонна руды первого вида стоит 4 денежных единицы, а второго – 10 денежных единиц?
  8. Цех выпускает мебель трёх видов. Нормы расходов материалов в  $\text{м}^3$  на единицу каждого из них составляют 0,032; 0,031; 0,038, нормы времени в н/ч на них равны соответственно 10,2; 7,5; 5,8. Запас материалов на плановый период составляет  $90 \text{ м}^3$ , а фонд рабочего времени – 17000 н/ч. Оптовые цены единицы мебели каждого вида 93 рубля, 67 рублей, 30 рублей, а себестоимость ее изготовления в цехе соответственно 88 рублей, 64 рубля и 29,5 рублей. Плановый ассортимент выпуска мебели составляет 350 единиц, 290 единиц и 800 единиц. Найти план производства, при котором суммарный доход максимален.

9. На выемки породы общим объёмом  $900\text{м}^3$  могут быть одновременно использованы три экскаватора  $A, B, C$ . Их производительности соответственно равны 10, 15, и 20  $\text{м}^3/\text{ч}$ , а расход горючего за 1ч работы составляет 12л, 20л, 25л. Какой объём работы должен быть выполнен каждым экскаватором при минимальном расходе топлива, чтобы весь объём работ был произведён не более чем за 30ч при условии, что экскаватор  $C$  может работать не более 12ч.
10. Архитектурная мастерская планирует застройку района жилыми домами типов  $D_1, D_2, D_3$ , состоящих из одно-, двух- и трёх- комнатных квартир. Дом  $D_1$  состоит из 10 одно-, 18 двух- и 20 трёхкомнатных квартир. Для домов  $D_2$  и  $D_3$  эти числа равны 40, 20, 20 и 50, 45, 15 соответственно. В строй необходимо ввести не менее 800 одно-, 1000 двух-, 2000 трёхкомнатных квартир. Составить план застройки района, обеспечивающий минимальную себестоимость строительства, если себестоимость дома  $D_1$  – 830 тыс. рублей,  $D_2$  - 800 тыс. рублей,  $D_3$  - 360 тыс. рублей.

**(11-20)** Для задачи линейного программирования выполнить следующие действия.

- a. Записать задачу в матричной форме.
- b. Записать каноническую задачу.
- c. Решить задачу геометрически.
- d. Найти начальный базисный план с помощью искусственных переменных.
- e. Решить задачу симплекс-методом.
- f. Написать двойственную задачу к данной задаче в матричной и развёрнутой форме.

g. Найти решение двойственной задачи и доказать его оптимальность с помощью теоремы двойственности.

<b>11.</b> $\max(5x_1 + 6x_2),$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 17, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	<b>16.</b> $\max(2x_1 + 5x_2),$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
<b>12.</b> $\max(x_1 + 3x_2),$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	<b>17.</b> $\max(x_1 - 2x_2),$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
<b>13.</b> $\max(x_1 - 2x_2),$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	<b>18.</b> $\max(2x_1 + x_2),$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
<b>14.</b> $\max(2x_1 + x_2),$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	<b>19.</b> $\min(x_1 - 2x_2),$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
<b>15.</b> $\max(3x_1 - x_2),$ $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	<b>20.</b> $\min(-2x_1 + 3x_2),$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

(21-30) Имеется  $m$  складских помещений (пунктов отправления)  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , в которых сосредоточены запасы груза в количествах  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц соответственно, и  $n$  пунктов назначения  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , подавших заявки соответственно на  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц указанного груза. Известна тарифная матрица  $C$ , в которой  $c_{i,j}$  – стоимость перевозки одной единицы груза из склада  $A_i$  в пункт назначения  $B_j$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ). Найти план

перевозок учитывающий запасы груза на складах и объемы заявок пунктов назначения, имеющий наименьшую общую стоимость. Исходные данные задачи занесены в следующую таблицу

	$B_1$	$B_2$	$\dots$	$B_n$	запасы
$A_1$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$\dots$	$c_{1,n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$\dots$	$c_{2,n}$	$a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_m$	$c_{m,1}$	$c_{m,2}$	$\dots$	$c_{m,n}$	$a_m$
заявки	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_n$	

- a. Построить математическую модель организации перевозок: записать оптимизационную задачу, дать экономическую интерпретацию вводимых переменных.
- b. Записать двойственную задачу, к построенной задаче линейного программирования.
- c. Составить начальный план перевозок по методам северо-западного угла и наименьшей стоимости. Укажите стоимости перевозок по этим планам.
- d. Найти оптимальный план задачи по методу потенциалов и доказать его оптимальность по теореме двойственности.

21.

\	ПН	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_7$	запасы
ПП								
$A_1$		2	1	3	2	7	6	200
$A_2$		3	5	7	2	8	2	200
$A_3$		1	1	3	4	8	1	400
$A_4$		3	5	1	5	9	9	200
заявки		90	30	130	450	180	60	

22.

ПН \ ПП	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	запасы
$A_1$	2	1	3	2	9	20
$A_2$	5	2	3	1	4	40
$A_3$	1	10	2	1	5	45
$A_4$	3	4	1	1	8	75
заявки	50	5	17	90	18	180

23.

ПН \ ПП	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	6	1	6	8	100
$A_2$	7	3	9	7	400
$A_3$	5	4	9	5	700
$A_4$	6	5	8	8	100
$A_5$	9	1	9	7	500
$A_6$	8	6	6	5	100
заявки	550	100	700	550	

24.

ПН \ ПП	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	запасы
$A_1$	4	5	6	4	3	8	500
$A_2$	3	3	8	4	2	9	400
$A_3$	2	6	3	2	7	10	600
$A_4$	4	7	6	2	7	9	700
заявки	200	100	300	300	400	900	

25.

ПН ПП	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	3	7	5	4	500
$A_2$	4	4	2	8	450
$A_3$	3	3	6	3	470
$A_4$	8	7	6	10	880
$A_5$	9	6	8	9	100
заявки	600	400	400	1000	

26.

ПН ПП	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	1	3	4	9	500
$A_2$	3	2	3	8	450
$A_3$	2	4	1	4	380
$A_4$	4	1	2	3	770
$A_5$	3	4	1	5	100
$A_6$	6	1	3	6	200
$A_7$	7	4	1	7	300
заявки	600	700	870	530	

27.

ПН ПП	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	6	1	6	8	200
$A_2$	7	3	9	7	500
$A_3$	5	4	9	5	700
$A_4$	6	5	8	8	100
$A_5$	9	1	9	7	500
$A_6$	8	6	6	5	100
заявки	650	200	100	550	

28.

$\begin{matrix} \text{ПН} \\ \text{ПП} \end{matrix}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	4	6	4	9	600
$A_2$	5	4	2	3	700
$A_3$	8	5	3	4	800
$A_4$	3	7	9	10	1000
заявки	500	900	800	900	

29.

$\begin{matrix} \text{ПН} \\ \text{ПП} \end{matrix}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	запасы
$A_1$	4	5	6	4	3	8	450
$A_2$	3	3	8	4	5	9	350
$A_3$	2	6	3	2	5	10	550
$A_4$	4	7	6	2	7	9	650
заявки	150	50	250	250	400	900	

30.

$\begin{matrix} \text{ПН} \\ \text{ПП} \end{matrix}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	запасы
$A_1$	1	3	4	9	550
$A_2$	3	2	3	8	400
$A_3$	2	4	1	4	480
$A_4$	4	1	2	3	670
$A_5$	5	4	1	5	200
$A_6$	6	1	3	6	100
$A_7$	7	4	1	7	400
заявки	100	700	1000	1000	