Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания к самостоятельной работе
и контрольные задания для студентов 2-го курса
специальностей 140401, 140504, 220301, 260601, 260602
факультета заочного обучения и экстерната

Второе издание, исправленное

Санкт-Петербург
2009

Задачи по темам контрольных заданий

Первообразная и интеграл

Контрольное задание №7

В задачах 1 – 10 найти первообразную; упростить полученное выражение; результат проверить дифференцированием.

1\. a) $\int \frac{2-3x}{x^2+2}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; d) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

2\. a) $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$;

c) $\int \ln(x+2)\,dx$; d) $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}\,dx$.

3\. a) $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$;

c) $\int x \operatorname{arctg} 2x\,dx$; d) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}\,dx$.

4\. a) $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$;

c) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; d) $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$.

5\. a) $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$;

c) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$; d) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}\,dx$.

6. a) $\displaystyle\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

c) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} 2x\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

7. a) $\displaystyle\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$;

c) $\displaystyle\int x^2\cos\frac{x}{3}\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{6-9x}{x^3+8}\,dx$.

8. a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$;

c) $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}\,dx$.

9. a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2x^2+1}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$;

c) $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}\,dx$.

10. a) $\displaystyle\int \frac{1-5x}{1+25x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$;

c) $\displaystyle\int (x^2+4)e^{2x}\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}\,dx$.

В задачах 11 – 20 вычислить определенные интегралы с помощью формулы Ньютона–Лейбница.

11. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$. 12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$.

13. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$. 14. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$.

15. $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. 16. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

17. $\displaystyle\int\limits_{\pi/18}^{\pi/2} 12\,\mathrm{ctg}\,3x\,dx\,.$ 18. $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx\,.$

19. $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x\,dx\,.$ 20. $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}\,dx\,.$

В задачах 21 – 30 вычислить площадь фигуры: a) в декартовой системе координат; b) в полярной системе координат.

Фигура ограничена линиями:

21. $a)\ \begin{cases} y = \sqrt{x}; \\ y = x^3; \end{cases}$ $b)\ \rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$

22. $a)\ \begin{cases} y^2 = x + 1; \\ y^2 = 9 - x; \end{cases}$ $b)\ \rho = 4\cos 3\varphi\,.$

23. $a)\ \begin{cases} y^2 = 9x; \\ y = 3x; \end{cases}$ $b)\ \rho = 3\cos 2\varphi\,.$

24. $a)\ \begin{cases} y^2 = 4x; \\ x^2 = 4y; \end{cases}$ $b)\ \rho = 2(1 - \cos\varphi)\,.$

25. $a)\ \begin{cases} y = x^2; \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ $b)\ \rho = 2(1 + \cos\varphi)\,.$

26. $a)\ \begin{cases} y = x^3; \\ y = 1; \\ x = 0; \end{cases}$ $b)\ \rho = 2\sin 3\varphi\,.$

27. $a)\ \begin{cases} xy = 6; \\ x + y - 7 = 0; \end{cases}$ $b)\ \rho = 2 + \cos\varphi\,.$

28. $a)\ \begin{cases} y = x + 1; \\ y = \cos x; \end{cases}$ $b)\ \rho = \sin 4\varphi\,.$

29. $a)\ \begin{cases} y^2 = x^3; \\ x = 0; \\ y = 4; \end{cases}$ $b)\ \rho = \sin 5\varphi\,.$

30. $a)\ \begin{cases} y = 2^x\,; & y = 2x - x^2\,; \\ x = 0\ ; & x = 2\,; \end{cases}$ $\qquad b)\ \rho = 2\cos 3\varphi\,.$

В задачах 31 – 40 вычислить длину дуги линии: a) заданной в декартовой системе координат; b) заданной в полярной системе координат или параметрически.

31. $a)\ y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$;
    $b)\ x = 2\cos^3 t;\quad y = 2\sin^3 t\,.$
32. $a)\ 9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy;
    $b)\ \rho = \sin^3(\varphi/3);\quad 0 \le \varphi \le \pi/2\,.$
33. $a)\ y^2 = (x-1)^3$ от точки $A(2,-1)$ до точки $B(5,-8)$;
    $b)\ \rho = 6\cos^3(\varphi/3);\quad 0 \le 2\varphi \le \pi/2\,.$
34. $a)\ y^2 = x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,8)$;
    $b)\ \rho = 3\cos\varphi\,.$
35. $a)\ y^2 = 5(x-1)^3$, отсеченной прямой $x = 2$;
    $b)\ \rho = 3(1-\cos\varphi)\,.$
36. $a)\ y^2 = 8/27\,(x-1)^2$, лежащей внутри параболы $y^2 = 2x$;
    $b)\ \rho = 3\sin\varphi\,.$
37. $a)\ y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;
    $b)\ x = 5\cos^2 t;\quad y = 5\sin^2 t;\quad 0 \le t \le \pi/2\,.$
38. $a)\ y = 1 - \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \pi/6$;
    $b)\ \rho = 2(1-\cos\varphi)\,.$
39. $a)\ y^2 = (x-1)^3$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(6,\sqrt{125})$;
    $b)\ x = \sqrt{3}t^2;\quad y = t - t^3\,.$
40. $a)\ y^2 = x^5$, отсеченной прямой $x = 5$;
    $b)\ \rho = 4\cos\varphi\,.$

В задачах 41 – 50 найти координаты центра масс однородной плоской кривой.

41. L: полуокружность $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная над осью Ox.
42. L: первая арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.
43. L: дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, расположенная в третьем квадранте.
44. L: дуга кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.
45. L: дуга логарифмической спирали $\rho = 2e^{\varphi}$, $\pi/2 \le \varphi \le \pi$.
46. L: кардиоида $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.
47. L: $\rho = 2\sin\varphi$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(\sqrt{2},\pi/4)$.