

2. ИЗГИБ.

2.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Изгиб – деформация стержня, при которой изменяется кривизна его оси. Такая деформация возникает под действием сил и моментов (пар сил), приложенных в плоскости, проходящей через ось стержня и перпендикулярной поперечному сечению. Если при этом изогнутая ось лежит в той же плоскости, что и нагрузки, изгиб называется **плоским**.

Главный вектор внутренних усилий, действующих в плоскости поперечного сечения (касательных напряжений), называют **поперечной (перерезывающей) силой** Q , а главный момент внутренних усилий, перпендикулярных сечению (нормальных напряжений), – **изгибающим моментом** M . Отметим, что внутренние усилия, возникающие при изгибе в плоскости xy , обозначаются Q_y и M_z (см. рис.9, а), а при изгибе в плоскости xz – Q_z и M_y (см. рис.9, б).

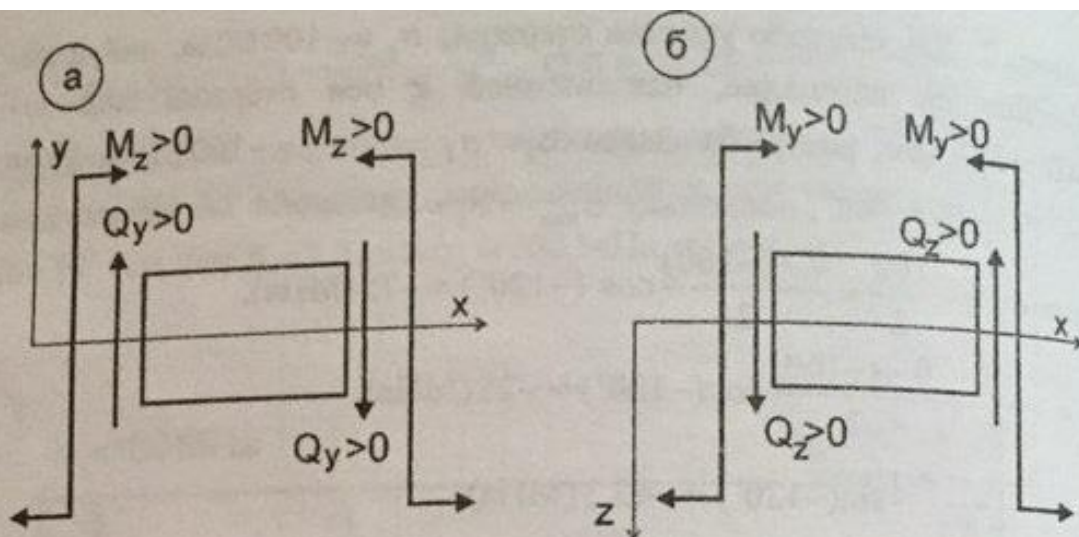


Рис.9. Внутренние усилия при изгибе.

Далее будем рассматривать плоский изгиб в плоскости xy .

Построение эпюр производится методом сечений.

Как обычно, стержень, который в данном случае называется балкой, разбивается на участки, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы, моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка.

На каждом участке выбирается произвольное сечение, и рассматриваются внешние силы с одной стороны от сечения.

Поперечная сила Q_y численно равна сумме проекций внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, на нормаль к оси стержня (здесь это ось y), взятых со знаками по правилу знаков (см. рис.9, а).

Изгибающий момент M_z численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести этого сечения, взятых со знаками по правилу знаков (см. рис.9, а).

Пример. Для балки, изображенной на рис.10,а сначала определим реакции закрепления из уравнений равновесия:

$$\sum X = H_A = 0; \quad \sum Y = R_A - P - ql_2 = 0 \Rightarrow R_A = 20 + 10 \cdot 2 = 40 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_{zA} = M_A - P(l_1 + l_2) - ql_2(l_1 + \frac{l_2}{2}) - M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_A = 20 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 2 + 30 = 130 (\text{кНм}).$$

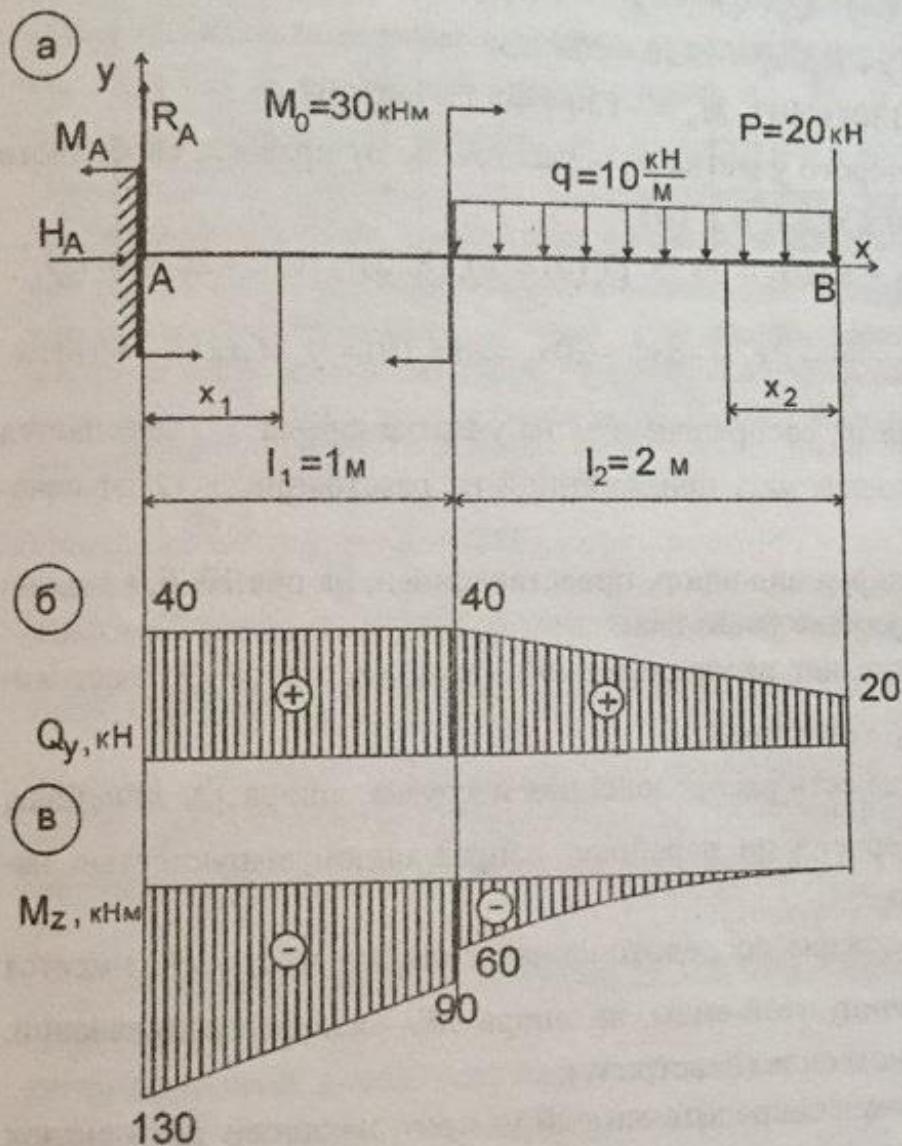


Рис.10. Пример построения эпюр при изгибе.

Напомним, что при записи уравнений равновесия распределенная нагрузка q условно заменяется равнодействующей ql_2 , приложенной в середине участка l_2 .

Балка разбивается на два участка (см. рис.10, а).

На первом участке рассмотрим все внешние силы слева от произвольного сечения, находящегося на расстоянии x_1 от заделки

$$0 \leq x_1 \leq l_1 = 1 \text{ (м)}: Q_y(x_1) = R_A = 40 \text{ (кН)},$$

$$M_z(x_1) = -M_A + R_A \cdot x_1 = -130 + 40x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_z(0) = -130 \text{ (кНм)}, M_z = -130 + 40 \cdot 1 = -90 \text{ (кНм)}.$$

Для второго участка x_2 - расстояние от правого, свободного конца балки $0 \leq x_2 \leq l_2 = 2 \text{ (м)}$:

$$Q_y(x_2) = qx_2 + P = 10x_2 + 20 \Rightarrow Q_y(0) = 20, Q_y(2) = 10 \cdot 2 + 20 = 40 \text{ кН},$$

$$M_z(x_2) = -qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} - Px_2 = -5x_2^2 - 20x_2 \Rightarrow M_z(0) = 0, M_z(2) = -60 \text{ кНм}.$$

Здесь нагрузка q , распределенная на участке длины x_2 , заменяется равнодействующей qx_2 , приложенной на расстоянии $x_2/2$ от сечения.

Анализируя вид эпюр, представленных на рис.10, б, в можно отметить следующие свойства:

- на участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра Q_y постоянная, эпюра M_z - линейная;
- на участке, где есть распределенная нагрузка, эпюра Q_y линейная, эпюра M_z очерчена по параболе, направленной выпуклостью навстречу нагрузке;
- там, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q_y имеется скачок на величину этой силы, на эпюре M_z - излом в направлении, противоположном силе (навстречу);
- там, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре M_z - скачок на величину этого момента, на эпюре Q_y ничего не меняется.

2.2. НАПРЯЖЕНИЯ. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

Нормальные усилия, распределенные по сечению с интенсивностью σ_x , главным моментом которых является изгибающий

момент M_z , изменяются по высоте сечения по линейному закону:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y.$$

Здесь I_z - некоторая геометрическая характеристика сечения, называемая **осевым моментом инерции**, которая будет рассмотрена ниже. Знак «-» позволяет согласовать знаки σ_x , M_z и координаты y так, чтобы при положительном M_z напряжения в верхних волокнах оказывались положительными (растягивающими), как это и есть на самом деле. Имеется также слой волокон, в которых $\sigma_x = 0$ - **нейтральный слой**, его пересечение с плоскостью поперечного сечения называется **нейтральной линией**. Как видно, максимальные нормальные напряжения действуют в наиболее удаленных от нейтрального слоя волокнах, и их величина не должна превышать допустимое значение $[\sigma]$:

$$|\sigma_{x \max}| = \frac{|M_z|}{I_z} \cdot |y_{\max}| = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

Таким образом, записано условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе. Здесь введено обозначение $W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|}$ для

осевого момента сопротивления, являющегося геометрической характеристикой сечения. Как правило, это условие записывается в **опасном сечении**, т.е. в сечении, где $|M_z| = |M_z|_{\max}$.

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ

В разделе 2.2 упоминались две величины, связанные с геометрией сечения: осевой момент инерции I_z и осевой момент сопротивления W_z . Те же величины можно определить и относительно оси y . Моменты инерции находятся интегрированием по площади поперечного сечения

$$I_z = \int_F y^2 dF, \quad I_y = \int_F z^2 dF,$$

а моменты сопротивления выражаются через них по формулам

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}}.$$

Если одна из осей - y или z - является осью симметрии сечения, то оси y и z являются **главными осями инерции** сечения. Далее будут рассматриваться только сечения, имеющие ось симметрии.

Момент инерции составного сечения может быть найден суммированием моментов инерции отдельных его частей. Важно отметить, что перед суммированием все моменты инерции должны быть преобразованы к главным центральным осям составного сечения.

Пример. Найдем момент инерции и момент сопротивления сложного сечения, изображенного на рис.11 (все размеры в см), относительно его центральной горизонтальной оси. Сечение состоит из двух частей:

двутавра №12: $F_1 = 14.7 \text{ см}^2$, $I_{z1} = 27.9 \text{ см}^4$ ($I_{z1} = I_x$ по сортаменту), прямоугольника:

$$F_2 = d \cdot c = 12 \cdot 3 = 36 \text{ см}^2, \quad I_{z2} = \frac{d \cdot c^3}{12} = \frac{12 \cdot 3^3}{12} = 27 \text{ см}^4.$$

Здесь оси z_1 и z_2 - собственные главные центральные оси инерции двутавра и прямоугольника.

Сначала определим положение центра тяжести составного сечения. Он находится на оси симметрии - оси y . Координату y_c найдем относительно некоторой начальной оси z_0 . Как известно из теоретической механики,

$$y_c = \frac{y_{c1} \cdot F_1 + y_{c2} \cdot F_2}{F_1 + F_2} = \frac{6.2 \cdot 14.7 + 1.5 \cdot 36}{14.7 + 36} = 2.9 \text{ (см)}.$$

Момент инерции сложного сечения определяем с применением формул преобразования моментов инерции его отдельных частей от собственных главных центральных осей z_1 и z_2 к параллельной им главной центральной оси инерции всего сечения z :

$I_z = I_{z_1} + b_1^2 F_1 + I_{z_2} + b_2^2 F_2 = 27.9 + 3.3^2 \cdot 14.7 + 27 + 1.4^2 \cdot 36 =$
 $= 285.5 (\text{см}^4)$. Здесь $b_1 = 6.2 - 2.9 = 3.3 (\text{см})$ и $b_2 = 2.9 - 1.5 = 1.4 (\text{см})$ -
 расстояния между осями z_1, z_2 и z (см. рис.11).

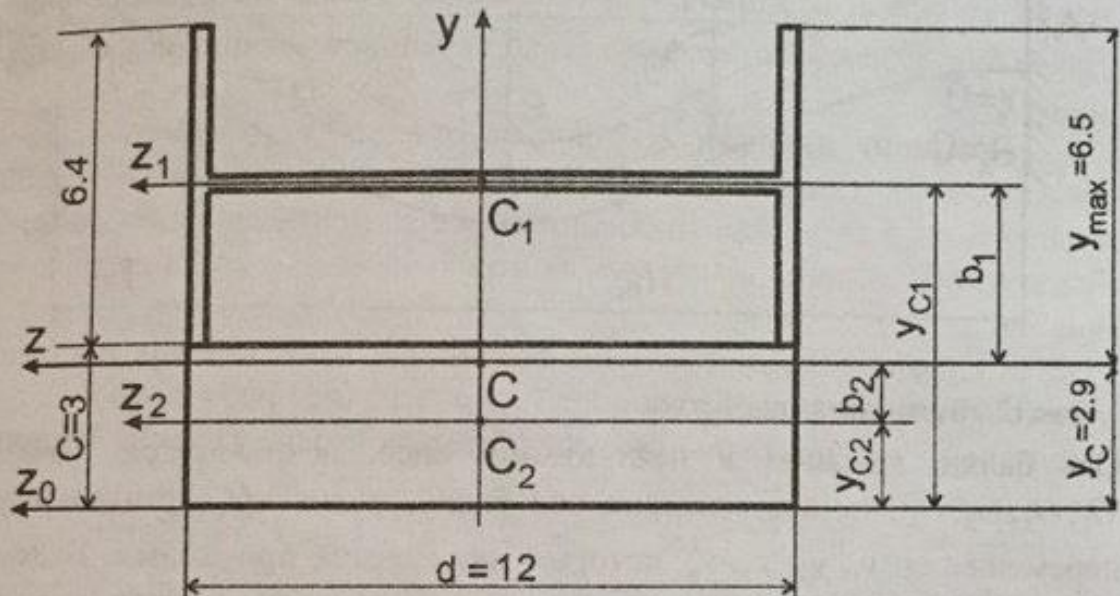


Рис.11. Сложное сечение.

Ось z при приложении нагрузки в плоскости xu станет нейтральной осью. Наибольшие по модулю растягивающие и сжимающие напряжения будут действовать в крайних волокнах, удаленных от нейтральной оси на расстояния $y_{min} = y_c = 2.9 \text{ см}$ и $y_{max} = 3 + 6.4 - 2.9 = 6.5 \text{ см}$ (см. рис.11).

Момент сопротивления сечения равен $W_z = \frac{285.5}{6.5} = 43.9 \text{ см}^3$.

2.4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассматривается плоский изгиб некоторой балки в плоскости xu (см. рис.12, внешние силы не показаны).

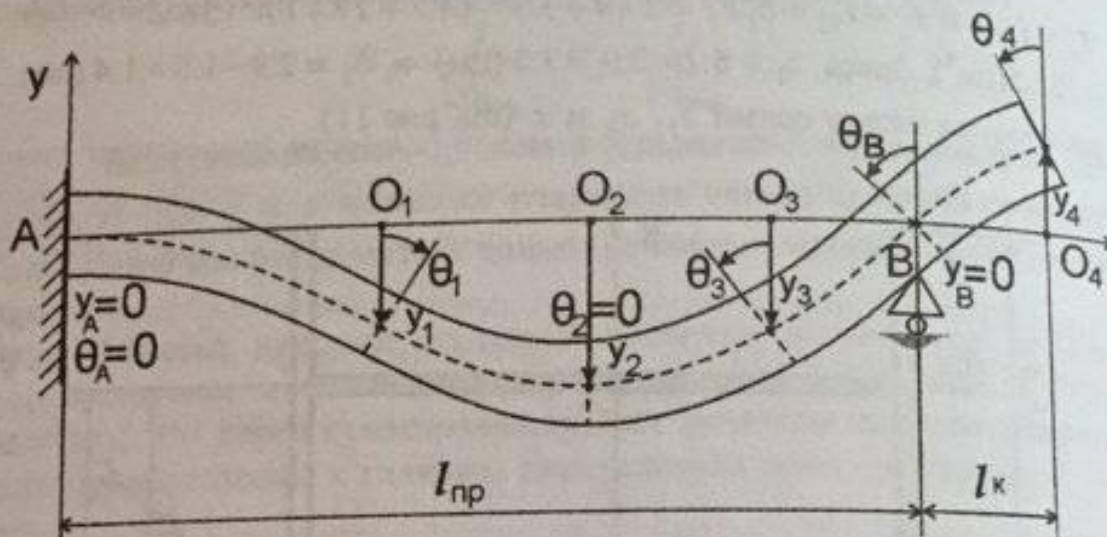


Рис.12. Перемещения при изгибе.

Ось балки, лежащая в нейтральном слое, искривляется. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 , принадлежащие оси балки, получают вертикальные перемещения y_1, y_2, y_3, y_4 которые называются прогибами. Будем считать $y_1, y_2, y_3 < 0$, $y_4 > 0$. В сечениях A и B , где находятся опоры, прогибы равны нулю: $y_A = y_B = 0$ (условия закрепления). Горизонтальными перемещениями точек оси балки пренебрегают.

Сечения, бывшие до деформации плоскими и перпендикулярными оси балки, остаются такими же и после деформации (гипотеза плоских сечений), поэтому при искривлении оси они поворачиваются относительно своего первоначального положения. Углы поворота сечений будем считать положительными, если они направлены против часовой стрелки: $\theta_1 < 0, \theta_2 = 0; \theta_3, \theta_B, \theta_4 > 0$. Условием закрепления для сечения A , где находится заделка, наряду с равенством нулю прогиба $y_A = 0$ является равенство нулю угла поворота $\theta_A = 0$.

Прогибы и углы поворота и называются перемещениями при изгибе. График функции $y(x)$ является изображением изогну-

той оси балки. Используя геометрический смысл производной, устанавливаем зависимость $\theta \approx \operatorname{tg} \theta = y' = \frac{dy}{dx}$.

При изгибе, наряду с условием прочности, существует **условие жесткости**, ограничивающее перемещения - величину прогибов. При этом различают наибольший прогиб в пролете $|y_{np}|_{\max}$ (так называют участок между опорами - здесь это участок AB) и наибольший прогиб на консоли $|y_k|_{\max}$ (участок, имеющий свободный конец - здесь это участок BO_4). Условия жесткости записываются в виде

$$|y_{np}|_{\max} \leq [y_{np}] = \frac{l_{np}}{750}, \quad |y_k|_{\max} \leq [y_k] = \frac{l_k}{350}.$$

Найти функцию $y(x)$ можно из приближенного **дифференциального уравнения изогнутой оси** (упругой линии):

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = EI_z y'' = M_z(x).$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными особенно легко интегрируется, если $EI_z = \text{const}$. Константы интегрирования C и D определяются из условий закрепления.

Однако, как правило, не существует единого выражения $M_z(x)$ для всей балки. Балка разбивается на несколько участков, на которых выражения $M_z(x)$ разные, и при интегрировании на каждом участке получится две константы интегрирования, т.е. их будет в два раза больше, чем участков. Чтобы избежать этого, при записи выражения $M_z(x)$ следуют определенным правилам, входящим в так называемый **метод уравнивания постоянных интегрирования**. Рассмотрим их на примере.

Пример. Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси для балки, изображенной на рис.10, а. Теперь при составлении выражения $M_z(x)$ будем отсчитывать расстояние x на обоих участках от заделки на левом конце балки (см. рис.13, а).

На первом участке $0 \leq x \leq 1$: $M_z^1(x) = -M_A + R_A \cdot x = -130 + 40x$;

$$EI_z y'^1 = C_1 - 130x + 40 \frac{x^2}{2}; \quad EI y^1 = C_1 x + D_1 - 130 \frac{x^2}{2} + 40 \frac{x^3}{6}.$$

На втором участке $1 \leq x \leq 3$:

$$M_z^2(x) = -M_A + R_A \cdot x + 30 \cdot (x-1)^0 - 10 \frac{(x-1)^2}{2} =$$
$$= -130 + 40x + 30 \cdot (x-1)^0 - \frac{10}{2}(x-1)^2;$$

$$EI_z y'^2 = C_2 - 130x + 40 \frac{x^2}{2} + 30(x-1) - \frac{10}{6}(x-1)^3;$$

$$EI_z y^2 = C_2 x + D_2 - 130 \frac{x^2}{2} + 40 \frac{x^3}{6} + \frac{30}{2}(x-1)^2 - \frac{10}{24}(x-1)^4.$$

Из условий гладкости и непрерывности функции $y(x)$ на границе участков при $x=1$ устанавливаем равенство констант интегрирования: $y'^1(1) = y'^2(1) \Rightarrow C_1 = C_2 = C$; $y^1(1) = y^2(1) \Rightarrow D_1 = D_2 = D$.

Заметим, что выражения $M_z^1(x)$, $y'^1(x)$ и $y^1(x)$ полностью включаются в выражения для $M_z^2(x)$, $y'^2(x)$ и $y^2(x)$, а добавочные слагаемые в $y'(x)$ и $y(x)$ обращаются в ноль при $x=1$. Для этого интегрирование проводится без раскрытия скобок, а слагаемое, соответствующее сосредоточенному моменту записывается в виде $30 \cdot (x-1)^0 \equiv 30$. Условия закрепления: $y'(0) = y'^1(0) = 0 \Rightarrow C = 0$;

$$y(0) = y^1(0) = 0 \Rightarrow D = 0.$$

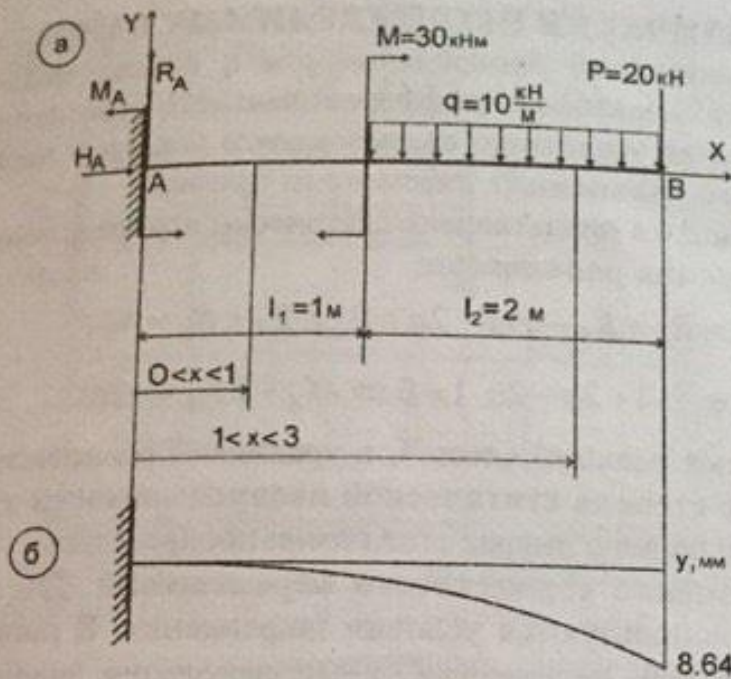


Рис. 13. Пример определения перемещений в балке.

Как видно, постоянные интегрирования пропорциональны: C - углу поворота сечения, находящегося в начале координат ($x = 0$), а D - прогибу в этом сечении. Определим прогиб в сечении $x = 3$ для балки круглого сечения ($E = 10^{10}$ Па, $R = 0.255$ м):

$$EI_z = 10^{10} \cdot \frac{\pi \cdot 0.255^4}{4} = 3.32 \cdot 10^7 \text{ (Нм}^2\text{)} = 3.32 \cdot 10^4 \text{ (кНм}^2\text{)};$$

$$y(3) = \frac{1}{EI_z} \left(-130 \cdot \frac{3^2}{2} + 40 \cdot \frac{3^3}{6} + \frac{30}{2} \cdot 2^2 - \frac{10}{24} \cdot 2^4 \right) =$$

$$= -\frac{286.7}{EI_z} = -\frac{286.7}{3.32 \cdot 10^4} = -8.6 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 8.6 \text{ (мм)}.$$

Условие жесткости для консоли выполняется

$$|y_{\kappa}|_{\max} = |y(3)| \approx [y_{np}] = \frac{3}{350} \approx 8.6 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Изогнутая ось представлена на рис. 13,б.

2.5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Раскрытие статической неопределенности в балках может производиться с использованием дифференциального уравнения изогнутой оси в качестве уравнения, связывающего усилия и перемещения (**физического уравнения**). Рассмотрим пример.

Пример. На рис. 14,а представлена статически неопределимая балка. Запишем уравнения равновесия:

$$\sum X = H_A = 0, \quad \sum Y = R_A + R_B - q \cdot 2 - 2q = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 4q,$$

$$\sum M_{zB} = M_A - 2R_A + q \cdot 2 \cdot 1 + 3q - 2q \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_A - 2R_A = -3q.$$

Как видно, неизвестных реакций здесь 4, а уравнений равновесия - только 3. Говорят, что **степень статической неопределенности** этой балки равна 1, или что балка один раз статически неопределима.

Запишем уравнения совместности перемещений. Для балок в этом качестве используются условия закрепления. В данном случае $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (в сечении $x = 0$ находится заделка); $y(2) = 0$ (в сечении $x = 2$ находится шарнирная опора).

Запишем дифференциального уравнения изогнутой оси по двум участкам балки по методу уравнивания постоянных.

На первом участке $0 \leq x \leq 2$:

$$EI_z y'' = -M_A + R_A x - q \frac{x^2}{2}, \quad EI_z y' = C - M_A x + R_A \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6},$$

$$EI_z y = Cx + D - M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24}.$$

На втором участке $2 \leq x \leq 3$:

$$EI_z y'' = -M_A + R_A x - q \frac{x^2}{2} + q \frac{(x-2)^2}{2} - 3q \cdot (x-2)^0 + R_B \cdot (x-2).$$

Отметим, что в точке $x = 2$, где кончается равномерно распределенная нагрузка, вводится слагаемое, соответствующее началу нагрузки, равной ей по величине, но направленной в противоположную сторону. Рассмотрим выражение для прогиба:

$$EI_z y = Cx + D - M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + q \frac{(x-2)^4}{24} -$$

$$-1.5q(x-2)^2 + R_B \frac{(x-2)^3}{6}$$

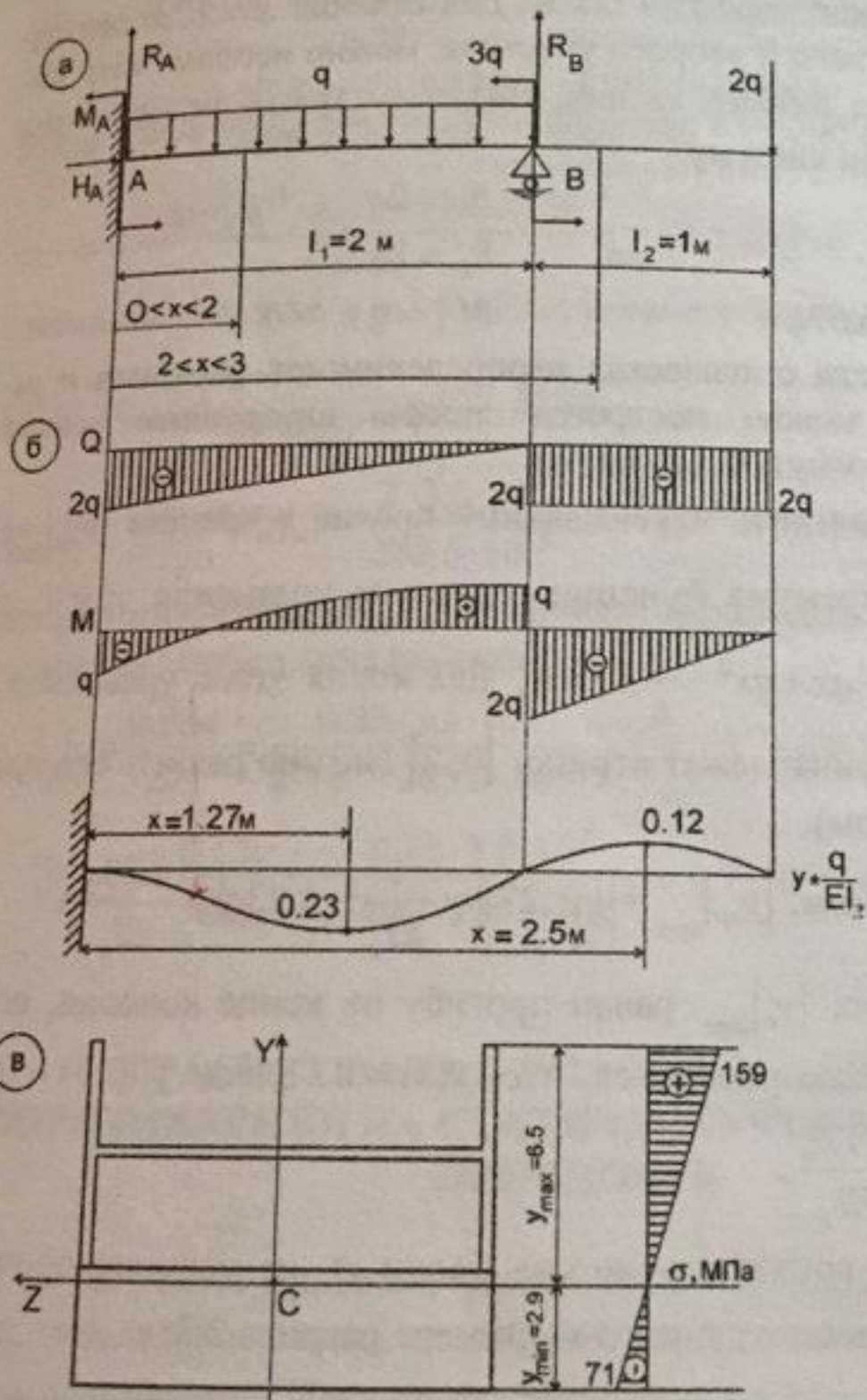


Рис.14. Пример расчета статически неопределимой балки.

Учтем граничные условия. Поскольку сечение $x=0$ находится на первом участке, подставляем $x=0$ в выражения $EI_z y'$ и $EI_z y$ для первого участка, получаем $C=D=0$. Для сечения $x=2$, являющегося границей первого и второго участков, можно использовать выражение $EI_z y$ для любого из них. Получаем третье недостающее уравнение и решаем систему:

$$\begin{aligned} R_A + R_B &= 4q \\ M_A - 2R_A &= -3q \\ -2M_A + 1.33R_A &= 6.67q \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R_A &= 2q \\ R_B &= 2q \\ M_A &= q \end{aligned}$$

Теперь, когда статическая неопределенность раскрыта и реакции найдены, можно построить эпюры внутренних усилий (см. рис.14, б) и изогнутую ось балки.

Чтобы определить максимальный прогиб в пролете $|y_{np}|_{\max}$, найдем точку экстремума функции y , решив уравнение $y'=0$ на первом участке: $-qx + qx^2 - \frac{q}{6}x^3 = 0$. Два корня этого уравнения - $x=0$ и $x=1.27$ принадлежат отрезку $[0; 2]$ (можно решить его приближенным методом).

$$\text{Таким образом, } |y_{np}|_{\max} = |y(1.27)| = \frac{1}{EI_z} |-0.23q| = \frac{0.23q}{EI_z}.$$

Как правило, $|y_{\kappa}|_{\max}$ равен прогибу на конце консоли, но в данном случае можно убедиться, что $y(3) = 0$. Здесь $y'(2.5) = 0$ и $|y_{\kappa}|_{\max} = |y(2.5)| = \frac{0.12q}{EI_z}$.

Определим грузоподъемность балки q из условия прочности, для сечения, рассмотренного в примере раздела 2.3:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2q}{43.9 \cdot 10^{-6}} \leq 160 \cdot 10^6 \Rightarrow q \leq 3.51 \text{ (кН/м)}.$$

Наряду с условиями прочности проверим условия жесткости:

$$|y_{np}|_{max} \leq [y_{np}] = \frac{l_{np}}{750} \Rightarrow \frac{0.23q}{EI_z} \leq \frac{2}{750} = 2.67 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 2.67 \text{ (мм)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q \leq \frac{2.67 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}}{0.23} = 6.62 \text{ (кН/м)},$$

$$|y_{\kappa}|_{max} \leq [y_{\kappa}] = \frac{l_{\kappa}}{350} \Rightarrow \frac{0.12q}{EI_z} \leq \frac{1}{350} = 2.86 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 2.86 \text{ (мм)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q \leq \frac{2.86 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}}{0.12} = 13.6 \text{ (кН/м)}.$$

Выбираем значение $q = 3.5$ кН/м, удовлетворяющее всем условиям.

$$\text{Тогда } |\sigma_{max}| = \frac{2 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{43.9 \cdot 10^{-6}} = 159 \text{ МПа},$$

$$|\sigma_{min}| = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} \cdot y_{min} = \frac{2 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{285.5 \cdot 10^{-8}} \cdot 2.9 \cdot 10^{-2} = 71 \text{ МПа}.$$

Эпюра напряжений по высоте сечения представлена на рис.14, в.
Вычислим наибольшие прогибы:

$$|y_{np}|_{max} = \frac{0.23q}{EI_z} = \frac{0.23 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}} = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 1.4 \text{ (мм)},$$

$$|y_{\kappa}|_{max} = \frac{0.12q}{EI_z} = \frac{0.12 \cdot 3.5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 285.5 \cdot 10^{-8}} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 0.7 \text{ (мм)}.$$