1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

1.1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Система называется статически неопределимой, если для определения усилий в ее элементах недостаточно уравнений равновесия (статики), т.е. когда число неизвестных усилий (реакций опор) больше числа уравнений равновесия. Степень статической неопределимости системы определяется следующим образом:

$$К = R – Y,$$

где K – степень статической неопределимости системы; R – число неизвестных усилий (реакций); Y – число уравнений равновесия.

Для расчета статически неопределимых систем уравнения статики дополняют необходимым числом уравнений деформации элементов конструкции, для составления которых используются условия совместности деформаций.

Число дополнительных уравнений должно равняться степени статической неопределимости системы *К*. Условия совместности деформаций формулируются, исходя из требований сохранения целостности системы и ее способности выполнять свое функциональное назначение при заданной нагрузке.

В статически неопределимой системе усилия в ее элементах могут возникать как вследствие действия внешних нагрузок, так и за счет перераспределения деформаций, вызванных изменением температурных режимов работы системы (температурные напряжения) или неточностью изготовления этих элементов (монтажные напряжения).

Для статически неопределимых систем применяемый способ расчета по допускаемым нагрузкам позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности, повысить несущую способность конструкции и указывает на возможность более экономного расходования материала.

При выполнении расчетно-графической работы следует обратить внимание на единство статической, геометрической и физической сторон задачи расчета статически неопределимых систем.

Порядок выполнения расчетно-графической работы:

1) составить уравнения статики для заданной системы;

2) определить степень статической неопределимости системы;

3) построить схему перемещений элементов системы;

4) составить уравнения совместности деформаций;

5) выразить уравнения совместности деформаций через усилия или напряжения, используя закон Гука;

6) решить систему уравнений статики и совместности деформаций относительно неизвестных усилий (напряжений);

7) исходя из условий прочности, подобрать конструктивные размеры (сечения) стержней.

1.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Рассчитываемая система представляет собой стержневую конструкцию с одной шарнирной опорой и двумя деформируемыми тягами (рис.1.1). Заданы материалы стержней: стержень 1 – сталь, стержень 2 – медь; модули упругости их при растяжении - сжатии: $E_1 = 2{\cdot}10^5$ МПа; $E_2 = 1{\cdot}10^5$ МПа; внешняя сила $P = 2{\cdot}10^5$ Н; коэффициенты линейного расширения материалов стержней $\alpha_1^t = 12\cdot10^{-6}\,{}^0\mathrm{C}^{-1}$, $\alpha_2^t = 16\cdot10^{-6}\,{}^0\mathrm{C}^{-1}$. Неточность изготовления элемента системы: стержень 2 изготовлен длиннее на величину $\delta = 0{,}002{\cdot}l_2$. Изменение температуры окружающей среды $\Delta T = +20$°С (нагрев).

Допустимые напряжения для материалов каждого из стержней: $[\sigma]_1 = 160$ МПа, $[\sigma]_2 = 100$ МПа. Конструктивное соотношение площадей стержней $F_1/F_2 = 2$. Геометрические размеры системы: $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$.

Определить величины F_1, F_2, учитывая, что балка AD (см. рис.1.1) предполагается абсолютно жёсткой и невесомой.

1. Расчет усилий от внешней силы P ($\Delta T = 0$, $\delta = 0$).

Вычертим расчётную схему балки с указанием всех размеров. Для расчёта усилий используем метод сечений. Сечения проведём через оба стержня.

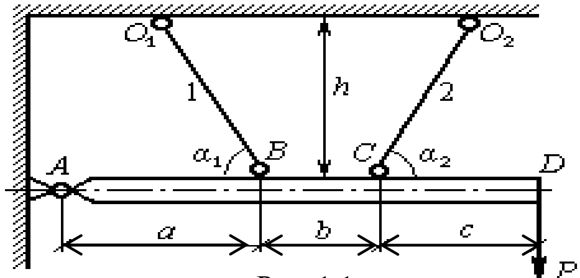

Рис. 1.1

Рассмотрим равновесие нижней части системы, заменяя действие отбрасываемой верхней части стержней внутренними усилиями (реакциями) S_1, S_2 (рис. 1.2).

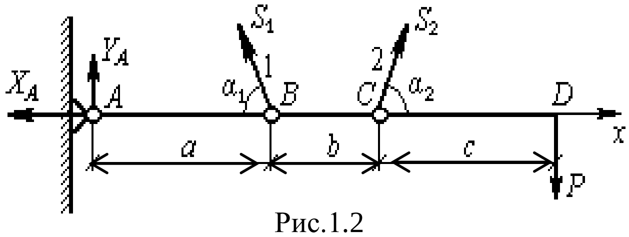

Рис.1.2

Составим уравнение статики:

$$\sum M_A = - S_1 \cdot a \cdot \sin\alpha_1 - S_2(a + b)\sin\alpha_2 + P(a + b + c) = 0 \qquad (1.1)$$

или

$$S_1 \cdot a \cdot \sin\alpha_1 + S_2(a + b)\sin\alpha_2 = P(a + b + c).$$

Остальные уравнения статики можно не составлять, так как они необходимы лишь при определении реакций в шарнире X_A, Y_A, чего не требуется по условию задачи.

Таким образом, степень статической неопределимости системы $K = 1$, так как имеем два неизвестных усилия S_1, S_2 и одно уравнение равновесия статики.

Для составления условия совместности деформаций необходимо рассмотреть схему перемещений элементов системы (рис. 1.3).

Под действием внешней силы P первый стержень удлинится на величину Δl_1, а второй – на величину Δl_2, при этом жёсткая балка

AD повернётся в положение AD_1.

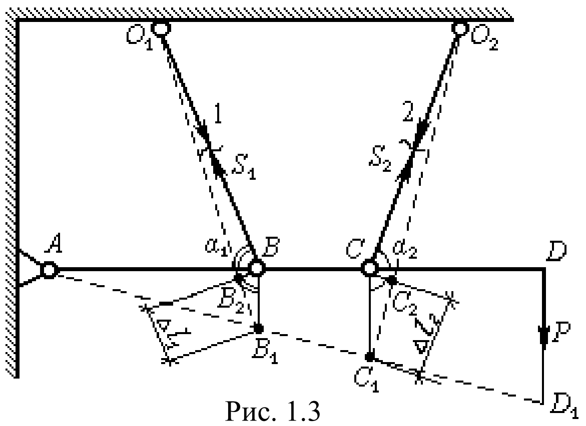

Рис. 1.3

Ввиду малости упругих деформаций, горизонтальными смещениями точек B и C, лежащих на оси балки, пренебрежем и будем считать, что точки B и C в ходе деформирования системы переместятся вертикально и займут положение B_1 и C_1. Положение этих точек определяется пересечением линии AD и перпендикуляров, проведенных к первоначальному направлению осевой линии балки AD в точки B и C. Удлинения Δl_1 и Δl_2 находим также графически, для чего из точек B и C опустим перпендикуляры на линии O_1B_1 и O_2C_1, соответствующие новым положениям стержней 1 и 2 после приложения нагрузки P. Отрезки B_1B_2 и C_1C_2 определяют удлинения стержней - соответственно Δl_1 и Δl_2.

Условие совместности деформаций в данном случае проще всего составить, воспользовавшись подобием треугольников ABB_1 и ACC_1:

$$\frac{BB_1}{a} = \frac{CC_1}{a+b}. \tag{1.2}$$

Откуда определим:

$$BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha_1}; \quad CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin\alpha_2} = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha_2}. \tag{1.3}$$

Подставив равенства (1.3) в формулу (1.2), получим условие совместности деформаций для заданной стержневой системы:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a}{(a+b)} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \tag{1.4}$$

или

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot k,$$

где $k = \dfrac{a}{(a+b)} \cdot \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ – безразмерный коэффициент, учитывающий особенности геометрической конфигурации системы.

Используя закон Гука для каждого из стержней, из уравнения (1.4) получим

$$\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} \cdot k.$$

Учитывая, что $l_1 = \mathrm{h}/\sin\alpha_1$; $l_2 = \mathrm{h}/\sin\alpha_2$ (см. рис. 1.3), последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$S_1 = S_2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cdot \frac{a}{(a+b)} \cdot \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2}. \tag{1.5}$$

Далее решаем совместно систему уравнений (1.1) и (1.5):

$$S_2 = P \frac{\dfrac{(a+b+c)}{(a+b)\sin\alpha_2}}{1 + \dfrac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \dfrac{a^2}{(a+b)^2} \dfrac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}};$$

$$S_1 = P \frac{\dfrac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \dfrac{a(a+b+c)}{(a+b)^2} \dfrac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2}}{1 + \dfrac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \dfrac{a^2}{(a+b)^2} \dfrac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}.$$

Из последних выражений при известном отношении F_1/F_2 находим численные значения усилий: $S_1 = 19{,}4 \cdot 10^4$ Н (растяжение), $S_2 = 29{,}1 \cdot 10^4$ Н (растяжение). Проверка правильности найденных численных значений производится путём подстановки полученных значений S_1 и S_2 в уравнение равновесия (1.1):

$$19{,}4\cdot 10^4\cdot 1\cdot 0{,}5+29{,}1\cdot 10^4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cdot 2\cdot 10^5=0$$

2. Определение напряжений, вызванных неточностью изготовления ($P = 0,\ \Delta T = 0,\ \delta \neq 0$).

Пусть первый стержень изготовлен с неточностью по длине $+\delta_1$, а второй – с неточностью $+\delta_2$, т.е. с фактической длиной, несколько большей номинальной. Тогда при сборке в них появятся внутренние напряжения. Расчётная схема при этом будет выглядеть так, как показано на рис.1.4.

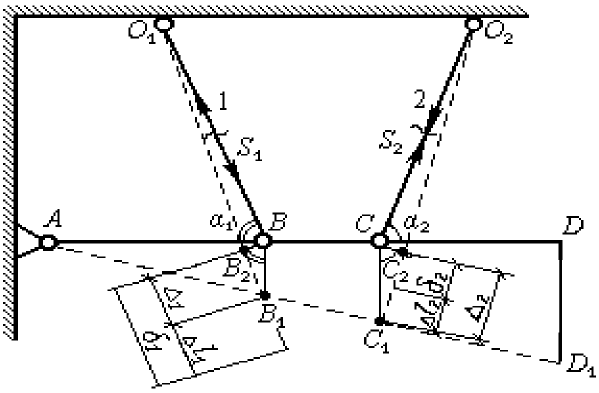

Рис. 1.4

Знаки внутренних усилий будут разными, так как при сборке необходимо второй стержень растянуть на величину Δl_2, и в нём появятся растягивающие усилия S_2. Первый стержень будет «сопротивляться» этому, что приведёт к необходимости его сжатия на величину Δl_1, и в нём возникнут сжимающие усилия S_1.

Уравнение равновесия для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид:

$$+S_1\cdot a\cdot\sin\alpha_1\ -S_2(a+b)\sin\alpha_2=0. \qquad (1.6)$$

Из схемы перемещений (рис.4) получим:

$$B_2B_1=\Delta_1=\delta_1-\Delta l_1; \qquad C_2C_1=\Delta_2=\delta_2+\Delta l_2. \qquad (1.7)$$

Соотношение между Δ_1 и Δ_2 находим аналогично п.1:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cdot k. \tag{1.8}$$

Подставив выражения (1.7) в равенство (1.8), получим условие совместности деформаций:

$$\delta_1 - \Delta l_1 = (\delta_2 + \Delta l_2) \cdot k. \tag{1.9}$$

Выразив согласно закону Гука удлинения Δl_1 и Δl_2 через усилия S_1, S_2, преобразуем уравнение (1.9):

$$\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} + \frac{k S_2 l_2}{E_2 F_2} = \delta_1 - k\delta_2. \tag{1.10}$$

Перейдём в уравнении (1.10) к новым переменным, в качестве которых выберем монтажные напряжения

$$\sigma_1^{м} = \frac{S_1}{F_1}, \quad \sigma_2^{м} = \frac{S_2}{F_2}.$$

Тогда, выразив l_1 и l_2 через h, уравнению (1.10) можно придать следующий вид:

$$\sigma_1^{м} + \sigma_2^{м} k \frac{l_2 \sin\alpha_1 E_1}{l_1 \sin\alpha_2 E_2} = \left(\frac{\delta_1}{l_1} - k\frac{\delta_2}{l_1} \right) E_1. \tag{1.11}$$

Перепишем уравнение (1.6) в напряжениях:

$$\sigma_1^{м} = \sigma_2^{м} \frac{(a+b)\sin\alpha_2}{a\sin\alpha_1} \frac{F_2}{F_1} = \sigma_2^{м} \frac{F_2}{F_1} \frac{1}{k}. \tag{1.12}$$

Решим систему уравнений (1.11) и (1.12) относительно неизвестных напряжений $\sigma_1^{м}; \sigma_2^{м}$:

$$\sigma_2^{м} = \frac{\left(\frac{\delta_1}{l_1} - k\frac{\delta_2}{l_1} \right) \frac{F_1}{F_2} \frac{a}{(a+b)} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} E_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}};$$

$$\tag{1.13}$$

$$\sigma_1^{м} = \frac{\left(\frac{\delta_1}{l_1} - k\frac{\delta_2}{l_1} \right) E_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}.$$

Если задать $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0{,}002 l_2$, то из уравнений (1.13) получим: $\sigma_1^{м}$ = –55,9 МПа; $\sigma_2^{м}$ = –32,3 МПа. Отрицательные значения найденных напряжений означают, что принятые направления усилий в стержнях S_1 и S_2 противоположны фактическим, т.е. первый стержень растягивается, а второй – сжимается: $\sigma_1^{м}$ = 55,9 МПа (растяжение); $\sigma_2^{м}$ = –32,3 МПа (сжатие).

3. Расчёт температурных напряжений ($P = 0,\ \delta = 0,\ \Delta T \neq 0$).

Вариант 1 (нагрев стержней). Предположим, что оба стержня системы нагреты до температуры $T_к + \Delta T$, где $T_к$ – начальная (комнатная) температура. Тогда их длины получат соответствующие приращения

$$\Delta l_1^t = \alpha_1^t \cdot l_1 \cdot \Delta T, \quad \Delta l_2^t = \alpha_2^t \cdot l_2 \cdot \Delta T. \tag{1.14}$$

Эти приращения можно формально рассматривать как неточности изготовления стержней и воспользоваться для определения возникающих при этом температурных напряжений результатами решения п.2 (см. уравнения (1.13)), заменив в окончательных выражениях δ_1 на Δl_1^t, δ_2 на Δl_2^t. Тогда для температурных напряжений σ_1^t и σ_2^t будут справедливы соотношения:

$$\sigma_1^t = \frac{\left(\alpha_1^t - k\dfrac{l_2}{l_1}\alpha_2^t\right)\cdot \Delta T \cdot E_1}{1 + \dfrac{E_1 F_1}{E_2 F_2}\cdot\dfrac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}};$$

$$\sigma_2^t = \frac{\left(\alpha_1^t - k\dfrac{l_2}{l_1}\alpha_2^t\right)\cdot \Delta T \cdot E_1 \dfrac{F_1}{F_2}k}{1 + \dfrac{E_1 F_1}{E_2 F_2}\cdot\dfrac{a^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}. \tag{1.15}$$

При ΔT = +20°C и заданных геометрических и физических параметрах системы из уравнений (1.15) получим:

$\sigma_1^t = -31{,}3$ МПа (сжатие); $\sigma_2^t = 18{,}1$ МПа (растяжение).

Проверка решения по аналогии с предыдущими случаями.

Вариант 2 (охлаждение одного из стержней). Рассмотрим в качестве второго примера определение температурных напряжений конструктивной схемы, соответствующей варианту 4 и изображенной на рис.1.5.

Пусть второй стержень *DG* охлаждается на ΔT_2 =30^{0}С. Тогда его укорочение составит $\delta_{T_2} = \alpha_{T_2} \Delta T_2 l_2$. При сборке конструкции упругое удлинение второго стержня будет соответствовать отрезку D_2M = Δl_2 (рис.1.6).

После сборки точка *D* совпадает с точкой D_1. При этом балка *AD* повернется вокруг шарнира *C* и будет сжимать первый стержень, упругое сжатие которого изображается отрезком *KB*. Точка *B* в результате переместится в точку B_1.

Из подобия треугольников BB_1C и DD_1C получим:

$$\frac{BB_1}{b} = \frac{DD_1}{c}. \tag{1.16}$$

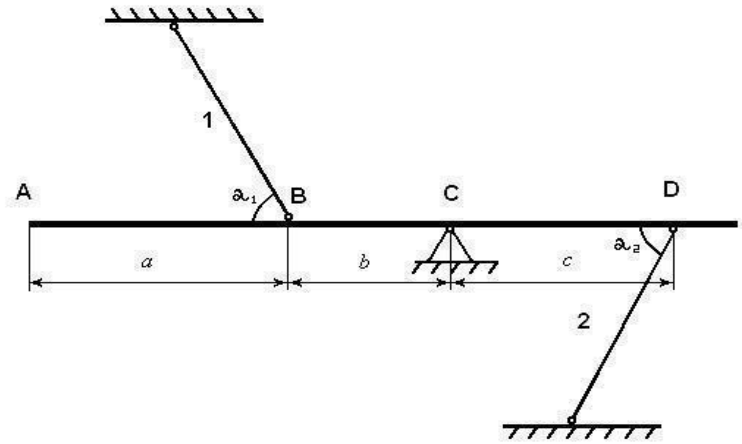

Рис. 1.5

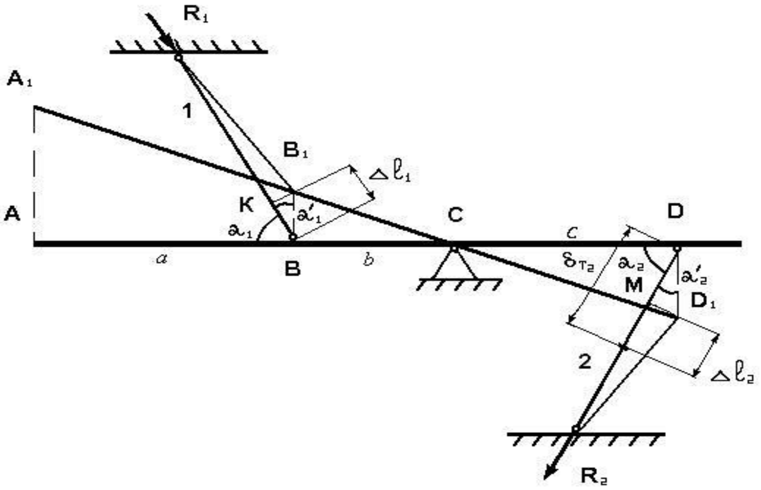

Рис. 1.6

Для BB_1 и DD_1 можно записать:

$$BB_1 = \frac{KB}{\cos\alpha_1^{'}} = \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha_1};$$

$$DD_1 = \frac{\delta_{T_2} - \Delta l_2}{\cos\alpha_2^{'}} = \frac{\delta_{T_2} - \Delta l_2}{\sin\alpha_2}, \qquad (1.17)$$

где Δl_1 и Δl_2 - упругие деформации первого и второго стержней соответственно.

При этом, первый стержень сжимается, а второй – растягивается. На рис.1.6 обозначим соответственно знакам деформаций реактивные усилия в стержнях R_1 и R_2.

Объединяя (1.16) и (1.17), получаем уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\Delta l_1}{b \sin\alpha_1} = \frac{\delta_{T_2} - \Delta l_2}{c \sin\alpha_2} \quad \text{или} \quad \Delta l_1 \frac{c \sin\alpha_2}{b \sin\alpha_1} + \Delta l_2 = \delta_{T_2}.$$

Обозначая $\dfrac{c\sin\alpha_2}{b\sin\alpha_1} = A$, получим окончательно:

$$\Delta l_1 \cdot A + \Delta l_2 = \delta_{T_2}. \tag{1.18}$$

Уравнение равновесия запишется как

$$\sum M_C = -R_1 b \cdot \sin\alpha_1 + R_2 c \cdot \cos\alpha_2 = 0 \tag{1.19}$$

или

$$R_1 = R_2 \frac{c \cdot \sin\alpha_2}{b \cdot \sin\alpha_1} = AR_2 \tag{1.20}$$

Далее решение проводится аналогично варианту 1:

$$\Delta l_1 = \frac{R_1 l_1}{E_1 F_1}; \;\; \Delta l_2 = \frac{R_2 l_2}{E_2 F_2} \;\; . \tag{1.21}$$

Обозначая $\sigma_1^T = R_1/F_1$, $\sigma_2^T = R_2/F_2$, из (1.21) получаем выражение:

$$\Delta l_1 = \sigma_1^T \frac{l_1}{E_1}; \;\; \Delta l_2 = \sigma_2^T \frac{l_2}{E_2} \;\; ,$$

которые подставляем в (1.20) и (1.18):

$$\sigma_1^T = A\sigma_2^T \frac{F_2}{F_1}; \tag{1.22}$$

$$A\sigma_1^T \frac{l_1}{E_1} + \sigma_2^T \frac{l_2}{E_2} = \delta_{T_2} \tag{1.23}$$

или

$$A\frac{l_1}{l_2}\frac{E_2}{E_1} \cdot \sigma_1^T + \sigma_2^T = \frac{\delta_{T_2} E_2}{l_2} = \alpha_{T_2} \Delta T_2 E_2. \tag{1.24}$$

Решая совместно (1.22)и (1.24) получаем для температурных напряжений следующие зависимости:

$$\sigma_2^T = \frac{\alpha_{T_2} \cdot \Delta T_2 \cdot E_2}{1 + A^2 \dfrac{l_1 E_2 F_2}{l_2 E_1 F_1}};$$

$$\sigma_1^T = \frac{\alpha_{T_2} \cdot \Delta T_2 \cdot E_2 \cdot A \cdot E_2\, F_2/F_1}{1 + A^2 \dfrac{l_1 E_2 F_2}{l_2 E_1 F_1}}. \qquad (1.25)$$

Подставляя в (1.25) численные значения: α_{T_2} = 12·10^{-6}, ΔT_2 = =30^{0}С, E_2 = 2·10^5 МПа, E_1 = 1·10^5 МПа, $l_1/l_2 = 1$, $F_2/F_1 = 2$, b = 2 м, c = 1 м, $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^0$, $A = 1/2 = 0.5$, получаем:

$$\sigma_1^T = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 2 \cdot 10^5}{1 + 0.5^2 \cdot 1 \dfrac{2 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} \cdot 2} = \frac{72}{1 + 0.25 \cdot 4} = 36 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2^T = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2}{1 + 0.5^2 \cdot 1 \cdot \dfrac{2 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} \cdot 2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ МПа},$$

где $A = c/b = 0.5$.

Таким образом, окончательно получаем температурные напряжения с учетом знаков (см. рис.1.6):

$$\sigma_1^T = -36 \text{ МПа (сжатие)}, \ \sigma_2^T = +36 \text{ МПа}.$$

Проверка выполняется аналогично предыдущим случаям.

4. Подбор сечений элементов систем (например, для первого варианта).

При расчёте сечений учитывается одновременное действие всех нагружающих факторов: внешней нагрузки, внутренних монтажных и температурных напряжений. Полученные в пп.1, 2, 3 данные представим в виде табл. 1.1. Условия прочности для каждого из стержней записываются в виде неравенств

$$\frac{S_1}{F_1} + \sigma_1^м + \sigma_1^t \le [\sigma]_1; \qquad \frac{S_2}{F_2} + \sigma_2^м + \sigma_2^t \le [\sigma]_2.$$

Тогда $F_1 \geq \dfrac{S_1}{[\sigma]_1 - \sigma_1 - \sigma_1^t}$, $\quad F_2 \geq \dfrac{S_2}{[\sigma]_2 - \sigma_2 - \sigma_2^t}$. (1.26)

При выбранных численных значениях для F_1 и F_2 получим

$$F_1 \geq 14{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad F_2 \geq 25{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \qquad (1.27)$$

Учитывая заданное отношение $F_1/F_2 = 2$, находим площади первого и второго стержня соответственно: $F_1' = 2F_2 = 50{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2; $F_2' = 0{,}5F_1 = 7{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2. Первому из неравенств (27) удовлетворяет значение $F_1' = 50{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2, при значениях F_2' второе неравенство не выполняется. Окончательно выбираем: $F_1 = 50{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2; $F_2 =$ $=25{,}4 \cdot 10^{-4}$ м^2.

Таблица 1.1

Внутренние усилия от P, МН	Напряжения, МПа			F/F$_1$
	от δ	от ΔT	допускаемые	
$S_1 = 0{,}194$	$\sigma_1 = 55{,}9$	$\sigma_1^t = 31{,}3$	$[\sigma]_1 = 160$	2
$S_2 = 0{,}291$	$\sigma_2 = -32{,}3$	$\sigma_2^t = 18{,}1$	$[\sigma]_2 = 160$	

Очевидно, что при этом напряжения в первом стержне будут меньше допускаемых, т.е. $\sigma_1 < [\sigma]_1$, во втором - $\sigma_2 = [\sigma]_2$.

Задание для РГР. Рассчитать площади поперечного сечения стержней для конструкций, изображенных на рис.1.7 и 1.8. Данные вариантов приведены в табл.1.2.

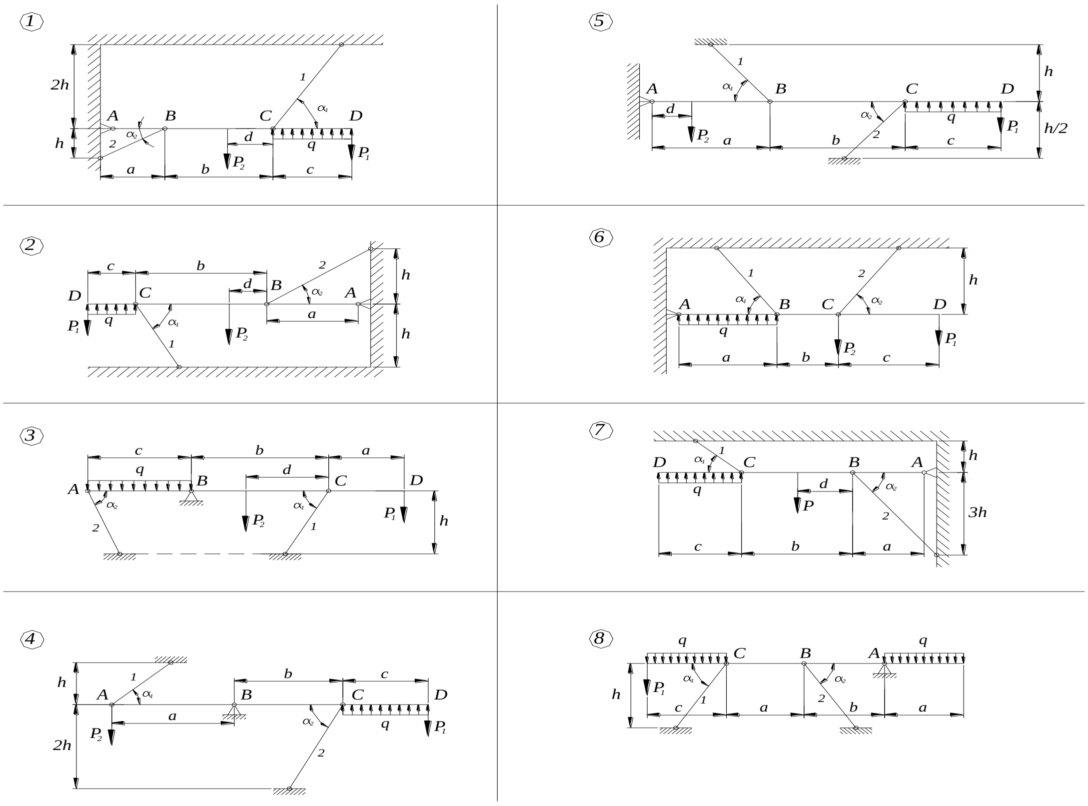

Рис. 1.7

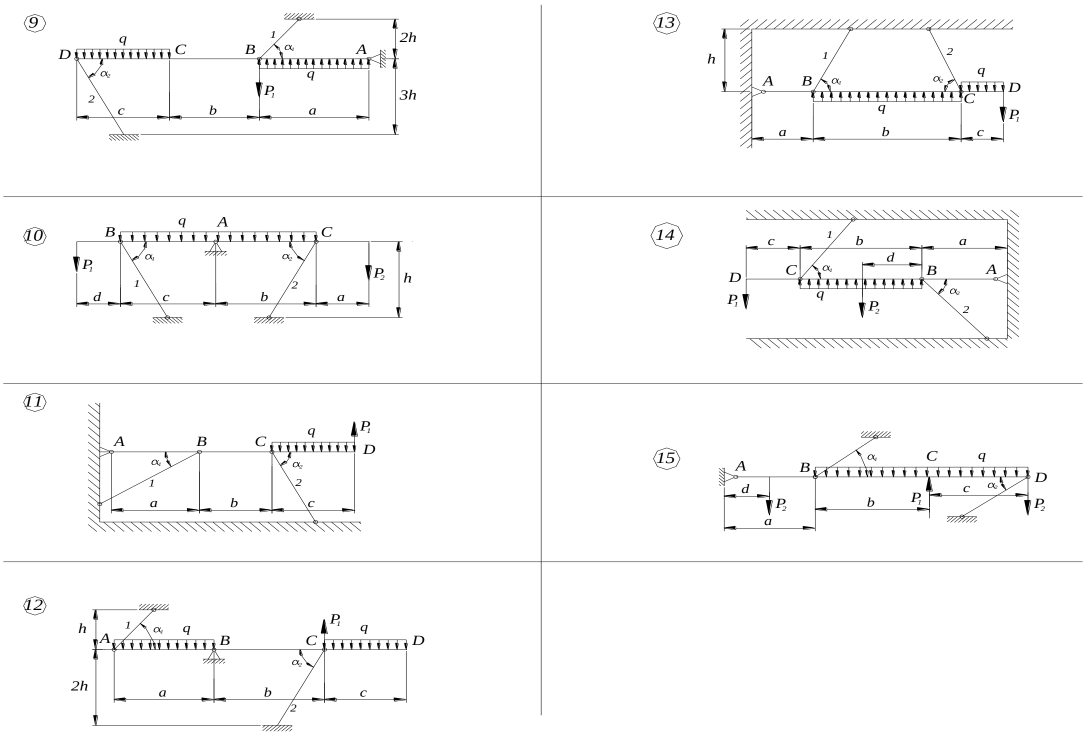
9
D
q
C
B
1
α1
A
2h
α2
q
P1
3h
2
c
b
a
13
h
A
B
1
α1
2
α2
q
D
C
q
P1
a
b
c
10
B
q
A
C
α1
α2
P1
P2
h
1
2
d
c
b
a
14
c
1
b
a
d
D
C
α1
B
A
P1
q
P2
α2
2
11
A
B
C
q
P1
D
α1
α2
1
2
a
b
c
15
A
B
α1
C
q
D
d
P2
b
P1
c
α2
P2
a
12
h
A
1
α1
q
B
C
P1
q
D
α2
2h
a
b
c
2

Рис.1. 8