МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Т.М. Татарникова

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2017

УДК 621.391.037.372

Татарникова Т.М. Методы моделирования и оптимизации: Методические указания к выполнению лабораторных работ. СПб.: ГУАП, 2017

Рецензент: О.И. Кутузов, д-р техн. наук, проф. ГЭТУ (ЛЭТИ)

Методические указания для выполнения лабораторных работ по курсу «Методы моделирования и оптимизации» содержат краткое описание реализуемого метода оптимизации с постановкой задачи и алгоритма ее решения.

Предназначено для подготовки магистров по направлению 11.04.02 - Инфокоммуникационные технологии и системы связи и 10.04.01 – Информационная безопасность.

©Т.М. Татарникова 2017
©ГУАП, 2017

Введение

В самом общем случае решить оптимизационную задачу это значит найти наилучшее решение среди возможных вариантов решения:

Если оптимизационная задача связана с расчетом оптимальных значений параметров при заданной структуре объекта, то она называется параметрической. Задача выбора оптимальной структуры является структурной оптимизацией.

Решение любой оптимизационной задачи основано на построении математической модели исследуемого объекта и проведении вычислительного эксперимента.

Теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, позволяющих избежать полного перебора всех решений.

Методы оптимизации – это методы построения алгоритмов нахождения оптимального значения некоторой функции.

Несмотря на различные содержательные постановки задачи, структура оптимизационной задачи однотипна и содержит следующие компоненты

1. Целевая функция $f(x)$ n-мерного векторного аргумента $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то есть

$$F(x)\in R^n. \ f(x))\in R^1$$

2. Ограничения в виде неравенств по $g_j(x)\geq 0$.

3. Ограничения в виде неравенств $h_k(x)=0$.

4. Область допустимых значений $x\in D\subset R^n$.

В общем виде задачи оптимизации имеет вид:

$$F(x)\rightarrow \min$$

ограничения I рода $h_k(x)=0$, $k=\overline{1,K}$

ограничения II рода $g_j(x)\geq 0$, $j=\overline{1,J}$

$x\in D\subset R^n$.

Лабораторная работа №1
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы: Сравнить интервальные методы однопараметрической оптимизации по эффективности.

1.1 Теоретические сведения

Однопараметрическая оптимизация – поиск экстремумов функций одной переменной без наличия ограничений. Такие задачи могут быть как самостоятельными, так и частью более сложных задач поиска экстремума функции многих переменных.

Постановка задачи однопараметрической оптимизации

$$f(x)\to\min,\ x\in R^1, \qquad (1.1)$$
$$K=J=0,\ \ D\equiv R^1.$$

где x – одномерный вектор аргументов;
R^1 – множество допустимых значений вектора x;
вид функции $f(x)$ произвольный.

Правило исключения интервалов устраняет необходимость полного перебора всех допустимых точек.

Логическая структура поиска с помощью интервальных методов основана на простом сравнении значений функции в двух пробных точках. При сравнении в расчет принимается только отношение порядка на множестве значений функции и не учитывается величина разности между значениями функции.

Применение интервальных методов накладывает единственное требование на исследуемую функцию: она должна быть унимодальной, то есть методы можно использовать для анализа как непрерывных, так и разрывных функций, а также в случаях, когда переменные принимают значения из дискретного множества.

Достоинством интервальных методов является то, что они основаны лишь на вычислении значения функции $f(x)$ в заданных точках x с помощью прямых расчетов или имитационных экспериментов и не требуется, чтобы исследуемые функции были дифференцируемы.

Выбор алгоритма (метода) оптимизации среди нескольких возможных интервальных методов выполняется их сопоставлением по определенной группе характеристик, к числу которых относятся трудоемкость вычислений, сходимость алгоритма и другие.

Поскольку большинство методов оптимизации носит итерационный характер, то количество итераций (шагов) получения решения с заданной точностью может быть характеристикой трудоемкости вычислений.

Сходимость алгоритма – это величина, которая определяет, как быстро на каждой i-й итерации уменьшается расстояние до x^T – точного значения $|x^T\text{-}x_i|$.

Различают глобальную и асимптотическую сходимость. Глобальная сходимость означает, что при любом выборе начальной точки x_0 последовательность

$x_i=f(x_{i-1})$ сходится к точке, удовлетворяющей необходимым условиям оптимизации. Для некоторых унимодальных функций под глобальной сходимостью понимают попадание значений x в окрестность стационарной точки x^*.

Под асимптотической сходимостью понимается поведение последовательности x в окрестности предельной точки x^*.

Сравнение методов поиска экстремума функции выполним по двум характеристикам:

скорости сходимости;

числу шагов k получения экстремума с точностью ε.

Пусть показателем скорости сходимости будет величина

$$\alpha(N)=\frac{L_N}{L_1}, \qquad (1.2)$$

где N – число итераций;
L_1 – длина интервала $[a, b]$ на первой итерации, $x\in[a, b]$;
L_N – длина интервала $[a^N, b^N]$ на последней N-й итерации, $x^*\in[a^N, b^N]$.
Для нахождения числа шагов N воспользуемся тем же соотношением

$$L_N=L_1\alpha(N). \qquad (1.3)$$

Приравняв правую часть уравнения (1.3) заданной точности ε, можно получить соотношения для всех рассматриваемых в работе методов оптимизации.

1.2 Порядок выполнения работы

1. Реализовать алгоритмы интервальных методов однопараметрической оптимизации функции f согласно варианту (таблица 1.2).
2. Найти оценку числа итераций N для каждого метода.
3. Найти оценку показателя скорости α для каждого метода.
4. Количественные характеристики интервальных методов, полученные в результате решения однопараметрической оптимизации функции f записать в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Сравнительные характеристик интервальных методов

Метод	N			α		
	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$
Дихотомии						
Золотого сечения						
Равномерного поиска						

5.Ооформить отчет о проделанной работе.

1.3 Содержание отчета

1. Цель, задание и последовательность выполнения работы.
2. Полученные выражения показателя скорости α для каждого метода .

3. Полученные выражения числа шагов N для каждого метода.

4. Сравнительные характеристик интервальных методов (заполненная таблица 1.1)

5. Выводы о результатах оптимизации.

1.4 Варианты заданий

Таблица 1.2 – Варианты целевой функции

№ варианта	Функция оптимизации f
1	$y=x^2+x-156$
2	$y=0,09x^2-0,6x+1$
3	$y=x^2 - 5x + 4$
4	$y=x^2 + 3x + 2$
5	$y=-2x^2+1,7x+0,3$
6	$x^2 + 2x = 16x - 49$
7	$y=2x^2 + 3x - 2$
8	$y=2x^2 + 3x - 5$
9	$x^2 - 6x = 4x - 25$
10	$y=1/4x^2+9/4x-4$
11	$y=x^2 - 10x$
12	$y=x^2+23x-24$
13	$y=2x^2+x-3$
14	$y=-5x^2+4,4x+0.6$
15	$y=1/3x^2+4/3x-3$
16	$y=x^2+15x-16$

Лабораторная работа №2
МЕТОДЫ ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы: Сравнить методы точечного оценивания однопараметрической оптимизации по эффективности.

2.1 Теоретические сведения

Необходимыми условиями эффективной реализации методов точечного оценивания являются унимодальность и непрерывность исследуемой функции.

В методах точечного оценивания учитываются относительные изменения значений функции и ее производных. Исследуемые функции должны быть достаточно гладкими.

Основная идея таких методов связана с возможностью аппроксимации гладкой функции полиномом и последующего использования аппроксимирующего полинома для оценивания координаты точки оптимума.

Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, если функция непрерывна в некотором интервале, то ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом достаточно высокого порядка. Следовательно, если функция унимодальна и найден полином, который достаточно точно ее аппроксимирует, то координату точки оптимума функции можно оценить путем вычисления координаты точки оптимума полинома. Согласно теореме Вейерштрасса, качество оценок координаты точки оптимума, получаемых с помощью аппроксимирующего полинома, можно повысить двумя способами:

1) использованием полинома более высокого порядка;

2) уменьшением интервала аппроксимации.

Второй способ предпочтительнее поскольку построение аппроксимирующего полинома порядка выше третьего становится весьма сложной процедурой, тогда как уменьшение интервала в условиях, когда выполняется предположение об унимодальности функции, особой сложности не представляет.

Процесс нахождения минимума функции любым из методом точечного оценивания условно можно разделить на три этапа.

1. Выбор начального интервала неопределенности. Границы $[a_0, b_0]$ интервала должны быть такими, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной.

2. Уменьшение интервала неопределенности.

3. Проверка условий окончания. Поиск заканчивается, когда:

• длина текущего интервала неопределенности $[a_k; b_k]$ оказывается меньше установленной величины;

• относительное изменение значения функции $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ (или ее производной) становится меньше заданного значения;

• относительное изменение координаты x_k и x_{k+1} становится меньше заданного значения;

• относительное изменение значения функции $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ (или ее производной) и относительное изменение координаты x_k и x_{k+1} одновременно становится меньше заданного значения.

В некоторых методах заранее задается максимальное количество вычислений функции.

Существует два способа выбора точек, в которых производится вычисление значений функции. Если точки задаются заранее, до начала вычислений, – это пассивный способ выбора точек. Если точки выбираются последовательно в процессе поиска с учетом результатов предыдущих вычислений, – это последовательный способ.

2.2 Порядок выполнения работы

1. Реализовать алгоритмы методов точечного оценивания однопараметрической оптимизации функции f согласно варианту (таблица 2.1).

2. Найти оценку показателя скорости α для каждого метода.

3. Найти оценку числа шагов N для каждого метода.

4. Количественные характеристики методов точечного оценивания, полученные в результате решения однопараметрической оптимизации функции f записать в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Сравнительные характеристик интервальных методов

Метод	N			α		
	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$
Квадратичной аппроксимации						
Ньютона–Рафсона						
Средней точки						
Секущих						

5.Ооформить отчет о проделанной работе.

2.3 Содержание отчета

1. Цель, задание и последовательность выполнения работы.
2. Полученные выражения числа шагов N для каждого метода.
3. Полученные выражения показателя скорости α для каждого метода .
4. Сравнительные характеристик методов (заполненная таблица 2.1)
5. Выводы о результатах оптимизации функции.

2.4 Варианты заданий

Таблица 2.2

Варианты целевой функции

№ варианта	Функция оптимизации f
1	Найти минимум функции на интервале [–1; 2] с точностью Δx =0,2. $f(x)=\sin(x+2)$
2	Найти минимум функции на интервале [–1; 2] с точностью Δx =0,2.
3	$f(x)=2\sin(x^2)$
4	Найти минимум функции на интервале [–1; 2] с точностью Δx =0,2. $f(x)=3\sin(2x^3+3)$
5	Найти минимум функции $f(x)=\frac{127}{4}x^2-\frac{61}{4}x+2$ при точности расчета Δ = 0,15. Предварительно определить начальный интервал неопределённости из условия: начальная точка x_0=0,25, шаг Δx = 0,25.
6	Найти минимум функции $f(x)=3x^2+\frac{12}{x^3}-5$ на интервале [0,5; 2,5]. Предварительно определить начальный интервал неопределённости из условия: начальная точка x_0=0,25, шаг Δx = 0,25.
7	Минимизировать функцию с точностью до одного знака после запятой: $f(x)=3x^4+(x-1)^2$ в интервале [0; 4];
8	Минимизировать функцию с точностью до одного знака после запятой: $f(x)=4x\sin(x)$ в интервале [0; π].
9	Найти минимум функции на интервале [–1; 2] с точностью Δx =0,2. $f(x)= \sin(2x^2+1)$

10	Минимизировать функцию с точностью до одного знака после запятой: $f(x) = 2(x-3)^2 + e^{0.5x^2}$ в интервале [0; 100];
11	Минимизировать функцию с точностью до одного знака после запятой: $f(x)=2x\sin(x^2)$ в интервале [0; π].
12	Найти минимум функции $f(x) = \frac{123}{3}x^2 - \frac{53}{3}x + 2$ при точности расчета Δ = 0,1. Предварительно определить начальный интервал неопределённости из условия: начальная точка x_0=0,05, шаг Δx = 0,15.
13	Найти минимум функции $f(x) = x^2 + \frac{12}{x^3} - 2$ на интервале [0; 5]. Предварительно определить начальный интервал неопределённости из условия: начальная точка x_0=0,05, шаг Δx = 0,2.
14	Найти минимум функции $f(x) = x^2 + \frac{12}{x^2} - 2$ на интервале [-1; 10]. Предварительно определить начальный интервал неопределённости из условия: начальная точка x_0=-1, шаг Δx = 0,1.
15	Минимизировать функцию с точностью до одного знака после запятой: $f(x)=3x\cos(x)$ в интервале [0; π].
16	Найти минимум функции на интервале [–1; 2] с точностью Δx =0,2. $f(x)=3\sin(x^3+2)$

Лабораторная работа №3
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель: разработать математическую модель и решить задачу линейного программирования симплекс-методом и графическим методом.

3.1 Теоретические сведения

Задачей линейного программирования называется оптимизационная задача, в которой целевая функция линейна на множестве линейных ограничений:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = \overline{1,m},\ x_j \ge 0. \tag{3.1}$$

где F – целевая функция;
a_{ij}, b_i – постоянные коэффициенты для уравнений;
c_j – постоянный коэффициент для целевой функции;
x_j – неизвестные переменные;

Ограничения, накладываемые на координаты x_j могут быть равенствами и неравенствами.

Классическим методом решения задач линейного программирования является симплекс-метод − это последовательный переход от одного базисного решения системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимальное значение.

Алгоритм симплекс-метода состоит из следующих шагов.

Вначале исходную задачу линейного программирования приводят к каноническому виду, затем составляют симплекс-таблицу вида:

Таблица 3.1 – Симплекс-таблица

Базис	B	x_1	…	x_k	…	x_j	…	x_n
…	…				…			
x_i	b_i			a_{ik}		a_{ij}		
…								
x_r	b_r			a_{rk}	…	a_{rj}		
…	b_m				…			
$f(x)$	0	$-c_j=-\Delta_j$						

где в столбце «Базис» указываются базисные переменные, а в последней строке столбца «базис» пишется $f(x)$. В столбец «В» записываются свободные члены ограничений b_i и значение целевой функции (на 1-м этапе оно равно 0).

В столбцах x_j для небазисных переменных указываются коэффициенты при небазисных переменных из ограничений задачи. В столбцах базисных переменных содержится только 0 или 1 на пересечении столбца с соответствующей строкой базисной переменной.

В последней строке c_j – это коэффициенты при переменных целевой функции взятые с противоположным знаком.

Симплекс-таблица составлена, теперь опишем сам симплекс-метод.

Шаг 1: Выполняется проверка полученного базисного плана на оптимальность по условию: если при каком-либо ДБР (допустимое базисное решение) в симплекс-таблице все коэффициенты строки $f(x)$ (то есть c_j) неотрицательны, то данное ДБР оптимально, следовательно, КОНЕЦ решения. В противном случае:

Шаг 2: Переход к новому базисному плану. Для этого из числа небазисных переменных с отрицательными значениями в последней строке (то есть $c_j < 0$) выбирается переменная, вводимая в базис – x_k, это переменная которой соответствует наибольшая по модулю отрицательная оценка:

$$\left|\Delta_k\right| = \max\left|\Delta_j\right|, \text{ для всех } \Delta_j<0,$$

$$\Delta_k = \min\Delta_j$$

Столбец, отвечающий переменной x_k, называется главным, или ведущим. Элементы данного столбца обозначаются через a_{ik}.

Если окажется несколько одинаковых наибольших по модулю отрицательных оценок, то выбирается любая из соответственных переменных.

Шаг 3: Выбираем переменную r – переменную, которая выводится из базиса. Данная переменная находится из соотношения:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_j \frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} \geq 0$$

Строка таблицы, в которой получено наименьшее отношение элемента столбца «B» к соответствующему положительному элементу ведущего столбца, является ведущей, или главной.

Элементы главной строки обозначаются через a_{rj}. Выбранная переменная x_r будет выводиться из базиса, то есть это исключаемая переменная.

Если окажется несколько одинаковых наименьших значений отношений, то выбирается любая из соответствующих им переменных.

Элемент, который стоит на пересечении главного столбца и строки называется главным, или ведущим, и обозначается a_{rk}.

Шаг 4: Для определения нового базисного плана проводится пересчет элементов симплекс-таблицы, и результаты заносятся в новую таблицу. Выбранные переменные среди базисных и небазисных, лежащих на главной строке и главном столбце, меняются местами.

Процедура пересчета элементов выполняется следующим образом:

а) элементы главной строки необходимо разделить на ведущий элемент:

$$b_k = \frac{b_r}{a_{rk}};\ a_{kj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

б) элементы полученной строки умножаются на a_{ik}, и результаты складываются с i-й строкой, причем $i \neq k$:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}}$$

$$b'_i = b_i - \frac{b_r a_{ik}}{a_{rk}}$$

$$f'(x) = f(x) - \frac{b_r \Delta_k}{a_{rk}}$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{rj}\Delta_k}{a_{rk}}$$

После определения новой симплекс-таблицы переходят к шагу 1.

Важные условия

Если допустимое базисное решение дает оптимум линейной формы (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, то полученное оптимальное решение – не единственное.

Если в выражении линейной формы имеется неосновная переменная с отрицательным коэффициентом в случае ее максимизации (с положительным - в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит также с отрицательными коэффициентами или отсутствует, то линейная форма не ограничена при данной системе ограничений. В этом случае ее максимальное (минимальное) значение записывают в виде $F_{max}=\infty$ ($F_{min}=-\infty$).

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования, в то время, как графический метод пригоден лишь для системы ограничений с двумя переменными.

Порядок графического решения задачи ЛП**:**

1. Построить многоугольник решений.
2. Построить вектор $c=(c_1, c_2)$ и перпендикулярно ему провести линию уровня линейной функции F, например, $F=0$.
3. Параллельным перемещением прямой $F=0$ в направлении вектора $c(-c)$ найти точку $A_{max}(B_{min})$, в которой F достигает максимума (минимума).
4. Решая совместно уравнения прямых, пересекающихся в точке оптимума, найти ее координаты.
5. Вычислить F_{max} (F_{min}).

3.2 Порядок выполнения работы

1. Реализовать алгоритм симплекс-метода решения задачи линейного программирования для функции оптимизации, приведенной в таблице 3.2.

2. Зафиксировать количественные характеристики симплекс-метода, полученные в результате решения задачи, последнюю симплекс-таблицу и значение целевой функции.

3. Решить эту же задачу линейного программирования графическим методом.

4. Сравнить результаты целевой функции, полученной симплекс-методом и графическим методом, оценить интервальную ошибку.

5.Ооформить отчет о проделанной работе.

3.3 Содержание отчета по лабораторной работе

– Математическая постановка задачи линейного программирования, канонический вид системы линейных уравнений.

– Последняя симплекс-таблица задачи линейного программирования, количественные характеристики задачи, значение целевой функции.

– Многоугольник решений задачи линейного программирования, графического метода, уравнения прямых, пересекающихся в точке оптимума, координаты точки оптимума и значение целевой функции в точке оптимума.

– Выводы по сравнению результатов решения задачи, полученных симплекс-методом и графическим методом.

3.4 Варианты заданий

Таблица 3.2

Варианты функции оптимизации

№ варианта	Функция оптимизации f	№ варианта	Функция оптимизации f
1	$f(x)=6x_1+5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1+5x_2 \le 25 \\ -2x_1+5x_2 \le 30 \\ x_1 \le 10 \\ 3x_1-3x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	2	$f(x)=x_1+x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1-4x_2-4 \le 0 \\ 3x_1-x_2 \ge 0 \\ x_1+x_2-4 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$f(x)=40x_1+36x_2 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1+3x_2 \ge 45 \\ x_1 \le 8,\ x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	4	$f(x)=3x_1+2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1+2x_2 \le 160 \\ 3x_1+4x_2 \le 180 \\ 7x_1 \le 196 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$f(x)=-x_1-2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \le 7 \\ 2x_1+x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	6	$f(x)=-x_1-2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1+x_2 \ge 1 \\ 2x_1-x_2 \ge -1 \\ x_1-2x_2 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
7	$f(x)=x_1+2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 5 \\ x_1+3x_2 \ge 5 \\ -2x_1+3x_2 \le 7 \\ x_1+x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	8	$f(x)=8x_1+6x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1+8x_2 \ge 700 \\ 3x_1+9x_2 \le 800 \\ 7x_1+6x_2 \le 600 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9	$f(x)=5x_1+3x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 4 \\ 5x_1+2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	10	$f(x)=400x_1+300x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 21 \\ x_1+x_2 \le 10 \\ 2x_1+2x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

11	$f(x)=3x_1+2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 6 \\ x_1-2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 16 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	12	$f(x)=5x_1+4x_2 \to \max$ $\begin{cases} 6x_1+4x_2 \le 24 \\ x_1+2x_2 \le 6 \\ -x_1+x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
13	$f(x)=20x_1+38x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2 \le 1800 \\ 5x_1+2x_2 \le 800 \\ 3x_2 \le 1240 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	14	$f(x)=x_1+3x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1-x_2 \le 3 \\ 2x_1+x_2 \ge 3 \\ x_1-3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
15	$f(x)=x_1+3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1+2x_2 \le 10 \\ -x_1+x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	16	$f(x)=-4x_1-x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1+8x_2 \le 24 \\ 2x_1-x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Лабораторная работа №4
СТРУКТУРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Цель: решить задачу структурной оптимизации при заданных параметрах рассматриваемой системы и допустимых значений вероятностно-временных характеристик ее работы.

4.1 Теоретические сведения

Пусть объект моделирования и оптимизации представлен замкнутой системой массового обслуживания, в которой N − количество узлов системы. Узлы задаются временем обслуживания $T_{\text{обс}i}$, $i=\overline{1,N}$. Перехода заявок между узлами системы задается матрицей вероятностей p_{ij}. Необходимо найти оптимальную структуру системы – определить сколько каналов каждого узла системы надо, чтобы задания выполнялись за допустимое время $T_{\text{доп}}$.

Для решения структурной оптимизации предлагается следующая рекуррентная процедура

$$T_{\text{пр}i}(j)=T_{\text{обс}i}\left(1+\left\{\frac{\overline{L}_i(j-1)}{K_i}\right\}\right); \qquad i=\overline{1,N} \tag{4.1}$$

$$T_{\text{пр}}(j)=e\cdot T_{\text{пр}i}(j); \tag{4.2}$$

$$\overline{\Lambda}(j)=\frac{j}{T_{\text{пр}i}(j)}\ ; \tag{4.3}$$

$$\overline{L}_i(j) = \overline{\Lambda}(j) e_i T_{\text{пр}i}(j) \tag{4.4}$$

где $T_{\text{пр}i}(j)$ – среднее время пребывания заявки в i-м узле при наличии в сети j заявок;

$\overline{\Lambda}(j)$ – пропускная способность узла при наличии в нем j заявок;

вектор $e = [e_i]_{i=\overline{1,N}}$ является решением системы линейных уравнений

$$e_i = \sum_{j=1}^{N} e_{ij} p_{ij} \tag{4.5}$$

которая определяет стационарное распределение цепи Маркова, управляющей переходами заявок с матрицей вероятностей переходов $p_{ij},\ i, j = \overline{1,3}$.

Система (4.5) решается при дополнительном ограничении

$$\sum_{i=1}^{N} e_i = 1$$

Решение процедуры (4.1) − (4.4) начинается с $\overline{L}_i(0) = 0$, для $i = \overline{1, N}$.
Выход из рекурсии – условие

$$\frac{\Lambda(j-1)}{\Lambda(j)} \geq \varepsilon,\ \ 0.9<\varepsilon<1$$

4.2 Порядок выполнения работы

1. Записать исходные данные для варианта системы, приведенной в таблице 4.1. Считать, что:

– каждый узел системы – это многоканальная СМО;

– число каналов первого узла K_1 постоянно и равно 4.

– количество каналов других СМО определяется в результате структурной оптимизации.

2. Реализовать рекуррентную процедуру структурной оптимизации (4.1) – (4.4) при K_1=4; $K_i = 1,\ i=\overline{2, N}$.

3. Проверить условие

$$T_{\text{пр}} \leq T_{\text{доп}}. \tag{4.6}$$

Если (4.6) выполняется, то оптимальная структура системы найдена, иначе увеличить на единицу число каналов в узле с минимальной стоимостью C и повторить рекуррентную процедуру (4.1) – (4.4) для новой структуры. Повторять структурную оптимизацию до выполнения условия (4.6).

4. Изменить значение целевой функции $T_{\text{доп}}$ в соответствии со значением коэффициента k, то есть считать, что новое значение $T_{\text{доп}}$= k Т$_{\text{доп}}$ и зафиксировать изменение структуры системы, изменения записать в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Структура системы для разных значений целевой функции

k	$T_{доп}$	Оптимальная структура
1		
0,5		
1,7		

5.Ооформить отчет о проделанной работе.

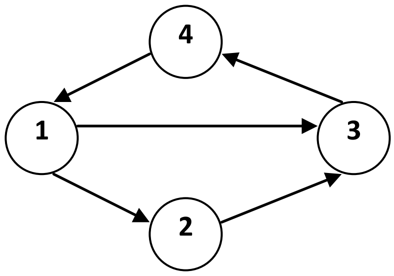
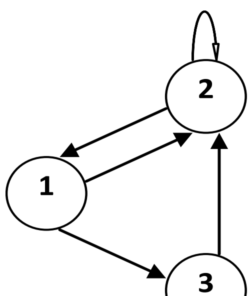
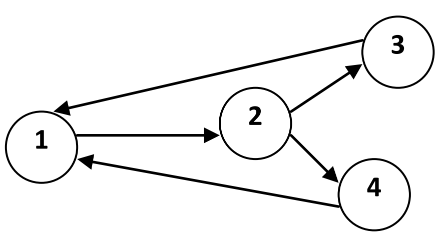
4.3 Содержание отчета по лабораторной работе

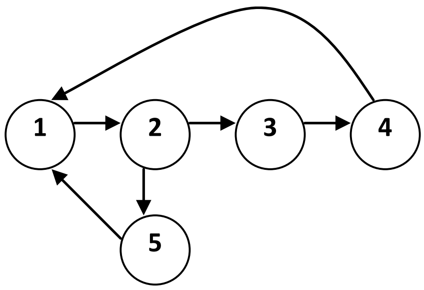
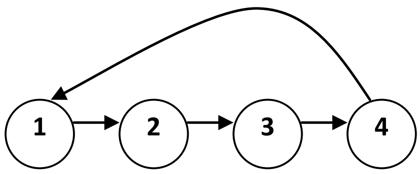
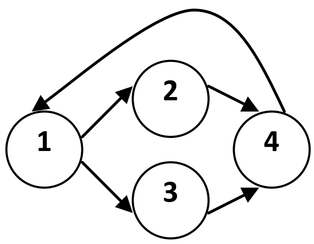
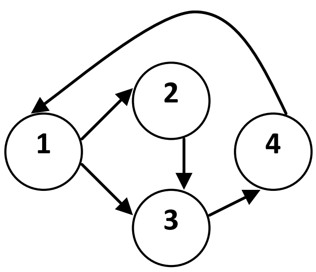
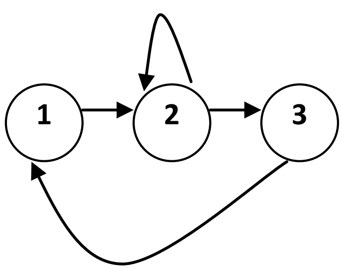
1. Исходные данные.
2. Заполненная таблица 4.1.
3. Листинг программы структурной оптимизации.

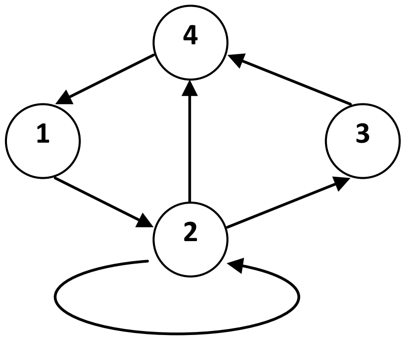
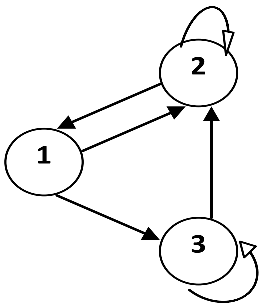
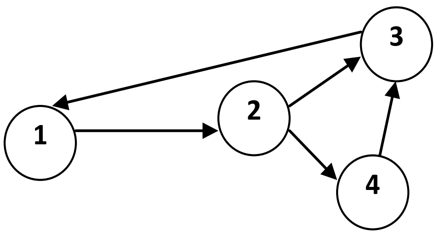
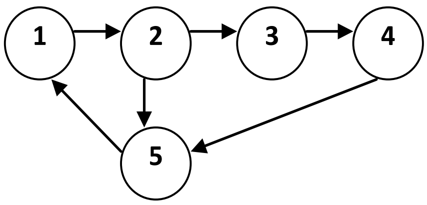
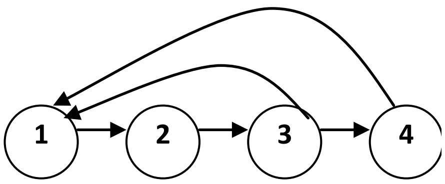
4.4 Варианты заданий

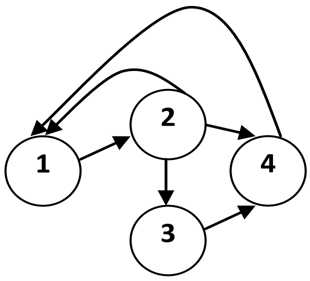
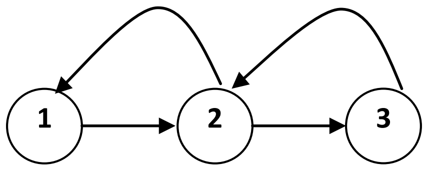
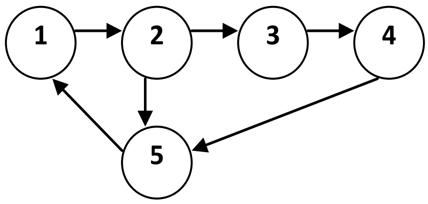
Таблица 4.1

Варианты параметров оптимизируемой системы

№ варианта	Параметры СМО
1	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,5; C_3=1; C_4=1,7.  $T_{обс1}$=0,3; $T_{обс2}$=0,4; $T_{обс3}$=0,45; $T_{обс4}$=0,6. $p_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{доп} \le 1,2$
2	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,5; C_3=1,9.  $p_{i\,j} = \begin{vmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,6; $T_{обс2}$=0,5; $T_{обс3}$=0,1. $T_{доп} \le 0,8$
3	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,7; C_3=2,3; C_4=1,75.  $p_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,7; $T_{обс2}$=0,35; $T_{обс3}$=0,6; $T_{обс4}$=0,5. $T_{доп} \le 1,23$

4	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,5; C_3=1; C_4=1,7; C_5=2,1.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,2; $T_{обс2}$=0,25; $T_{обс3}$=0,3; $T_{обс4}$=0,32; $T_{обс5}$=0,4. $T_{доп}\le$0,65
5	Коэффициенты стоимости узлов C_2=2,31; C_3=1,92; C_4=1,71.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=1; $T_{обс2}$=0,7; $T_{обс3}$=0,5; $T_{обс4}$=0,4. $T_{доп}\le$1,53.
6	Коэффициенты стоимости узлов C_2=2,51; C_3=1,32; C_4=2,07.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,8; $T_{обс2}$=0,5; $T_{обс3}$=0,5; $T_{обс4}$=0,4. $T_{доп}\le$1,22.
7	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,95; C_3=1,42; C_4=1,17.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,$T_{обс1}$=0,7; $T_{обс2}$=0,5; $T_{обс3}$=0,3; $T_{обс4}$=0,2. $T_{доп}\le$0,54.
8	Коэффициенты стоимости узлов C_2=2,5; C_3=3,1.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=1,2; $T_{обс2}$=0,9; $T_{обс3}$=0,5. $T_{доп}\le$0,74.
9	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,57; C_3=1,84; C_4=1,73.

	 $p_{ij}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,2; $T_{обс2}$=0,5; $T_{обс3}$=0,45; $T_{обс4}$=0,1. $T_{доп}$≤0,58.
10	Коэффициенты стоимости узлов C_2=2,42; C_3=3,31.  $p_{ij}=\begin{vmatrix}0 & 0,2 & 0,8\\ 0,9 & 0,1 & 0\\ 0 & 0,5 & 0,5\end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,4; $T_{обс2}$=0,5; $T_{обс3}$=0,2. $T_{доп}$≤0,35.
11	Коэффициенты стоимости узлов C_2=2,51; C_3=2,63; C_4=2,72.  $p_{ij}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,7; $T_{обс2}$=0,35; $T_{обс3}$=0,6; $T_{обс4}$=0,5. $T_{доп}$≤0,98.
12	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,55; C_3=2,34; C_4=2,71; C_5=2,13.  $p_{ij}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,2; $T_{обс2}$=0,25; $T_{обс3}$=0,3; $T_{обс4}$=0,32; $T_{обс5}$=0,4. $T_{доп}$≤0,43.
13	Коэффициенты стоимости узлов C_2=3,51; C_3=1,78; C_4=2,73; C_5=1,92.  $p_{ij}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=1; $T_{обс2}$=2; $T_{обс3}$=0,5; $T_{обс4}$=1,4. $T_{доп}$≤1,28.

14	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,56; C_3=1,67; C_4=1,78.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,8; $T_{обс2}$=1,5; $T_{обс3}$=0,5; $T_{обс4}$=1,2. $T_{доп}\le$1,93.
15	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,5; C_3=2,45.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,8; $T_{обс2}$=1,5; $T_{обс3}$=0,5; $T_{обс4}$=1,2. $T_{доп}\le$2,07.
16	Коэффициенты стоимости узлов C_2=1,59; C_3=2,56; C_4=3,07; C_5=2,1.  $p_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $T_{обс1}$=0,12; $T_{обс2}$=0,15; $T_{обс3}$=0,23; $T_{обс4}$=0,12; $T_{обс5}$=0,3. $T_{доп}\le$0,31.

Лабораторная работа №5
ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Цель: построение оптимизационной модели физического процесса средствами имитационного моделирования.

5.1 Теоретические сведения

С математической точки зрения модель динамического процесса представляет собой задачу Коши.

Представим, что тело определенной массы *m* вылетает под некоторым углом α к горизонту. Очевидно, что существует оптимальный угол α, при котором дальность полета будет наибольшей. Требуется найти оптимальный угол α, при котором достигается максимальная дальность полета тела.

Примем следующие предположения:

– объектом исследования является тело массы *m*, принимаемое за материальную точку;

– движение тела подчиняется второму закону Ньютона;

– тело находится под действием двух сил: силы тяжести и силы сопротивления воздуха.

Модель тела имеет четыре вещественных переменных: положение его центра в координатах *x* и *y*, и составляющие скорости *Vx* и *Vy* по этим координатам (см. рис. 5.1). Координаты являются интегралами от соответствующих скоростей:

$\frac{dx}{dt} = Vx$; $\frac{dy}{dt} = Vy$. Производная от проекций скоростей определена как: $\frac{dVx}{dt} = -K \cdot Vx^2$; $\frac{dVy}{dt} = -g - K \cdot Vy^2$, где K – коэффициент сопротивления воздуха, g = 9,81 – ускорение свободного падения. Начальные условия: $x = 0$, $y = 0$; $Vx = V0 * \cos(\alpha)$, $Vy = V0 * \sin(\alpha)$.

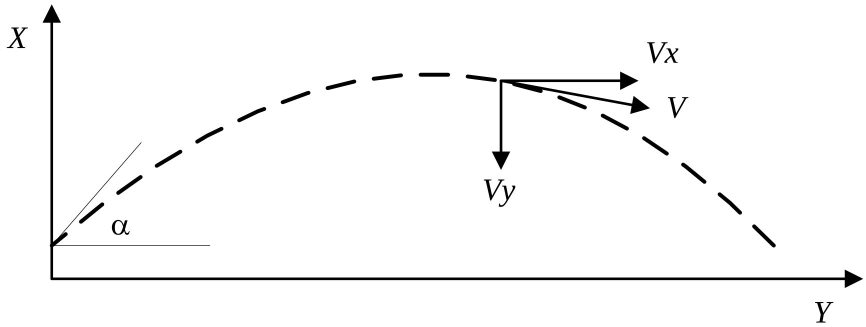


Рис. 5.1. Переменные, определяющие модель динамического процесса

Оптимизация средствами имитационного моделирования состоит из нескольких последовательных прогонов модели с различными значениями параметров, что позволяет находить значения параметров модели, соответствующие оптимальному значению целевой функции. В рассматриваемой модели целевая функция – дальность полета тела, параметр оптимизации – угол α. Для решения этой задачи оптимизации следует выполнить ряд следующих этапов:

1. Создание имитационной модели.

Создадим новую модель с именем Polet используя библиотеку **Системной динамики**. Из палитры **Системная динамика** перенесем 4 элемента типа **Накопитель** на диаграмму класса активного объекта с именами *x*, *x*, *vx* и *vy*, как показано на рисунке 5.2 Это динамические переменные, описывающие координату и скорость перемещения тела.

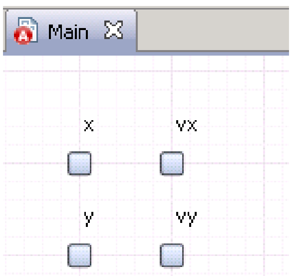


Рис. 5.2. Динамические переменные модели

В панели **Свойства** для объявленных переменных введем соответствующие формулы и начальные значения, как это показано на рисунке 5.3.

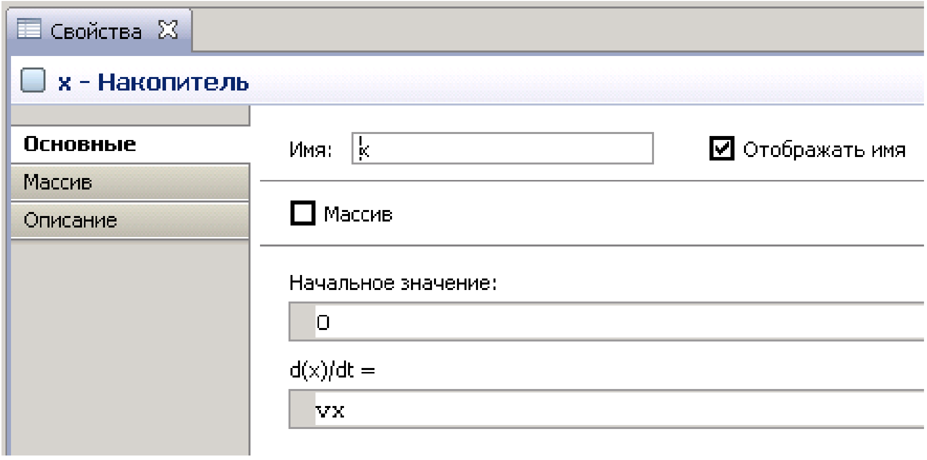


Рис. 5.3. Свойства переменной *x*

Для того чтобы учесть направление скорости движения уравнение $d(vy)/dt = -g-K*vy^2$ необходимо изменить на $d(vy)/dt = -g-K*vy*|vy|$. Аналогично нужно изменить уравнение для *vx*.

Объявим и присвоим значения параметрам *g*, *K*, *V*0 и α. Для этого перенесите из палитры **Системная динамика** 4 элемента типа **Параметр** на диаграмму класса активного объекта, переименуем их в *g*, *k*, *v*0, *a* и зададим им значения 9,81; 0,01; 100; 1 соответственно.

Нарисуем траекторию движения тела. Для этого перенесем из палитры **Статистика** элемент типа **График** на диаграмму класса активного объекта, затем в свойствах графика кнопкой **Добавить элемент данных** в поле **Значение по оси X** введем *x*, а в поле **Значение по оси Y** – *y* соответственно, как показано на рис. 5.4.

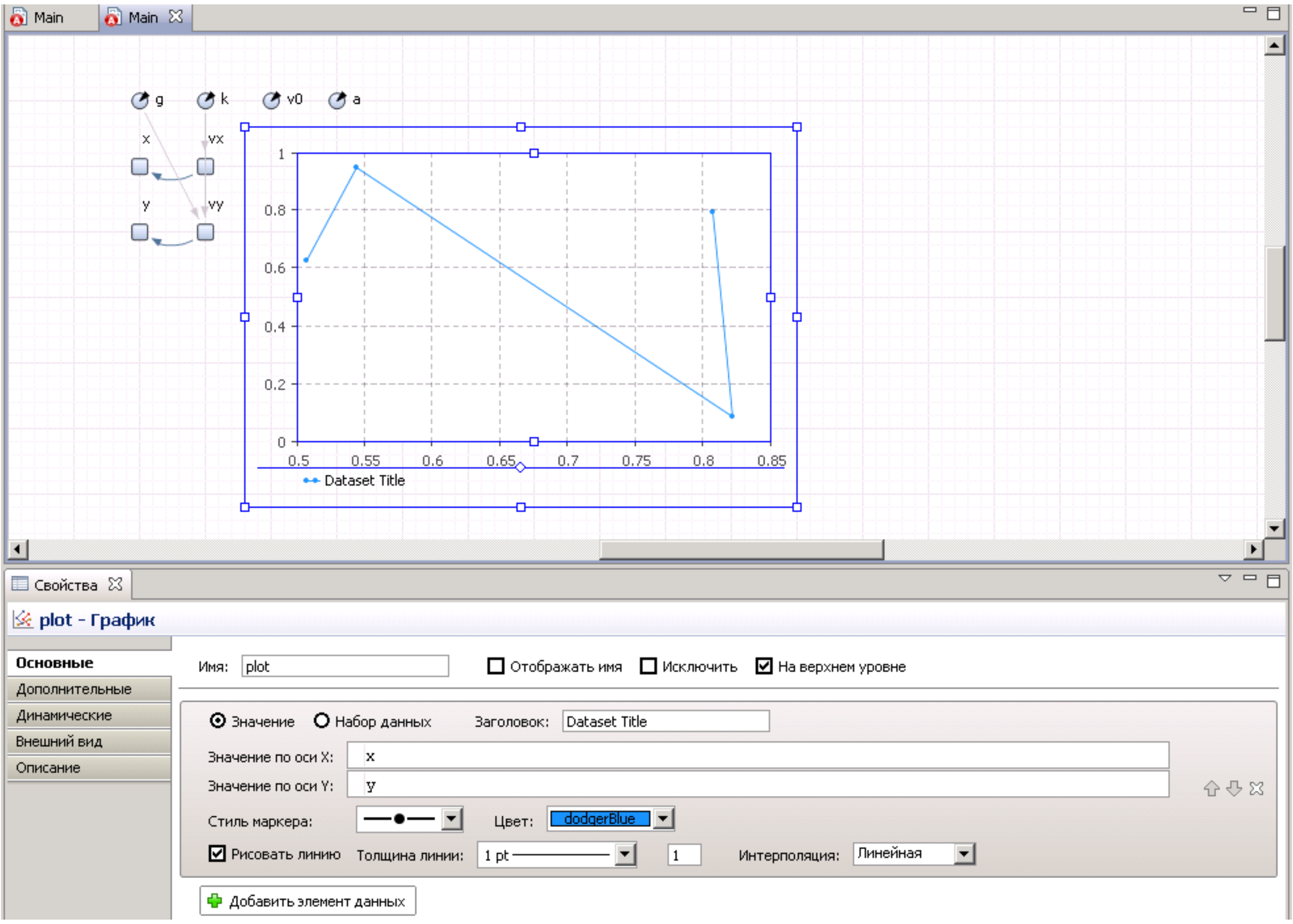


Рис. 5.4. Задание траектории движения тела

Запустив модель на выполнение можно увидеть траекторию движения тела, рис. 5.5. и оценить адекватность модели в первом приближении.

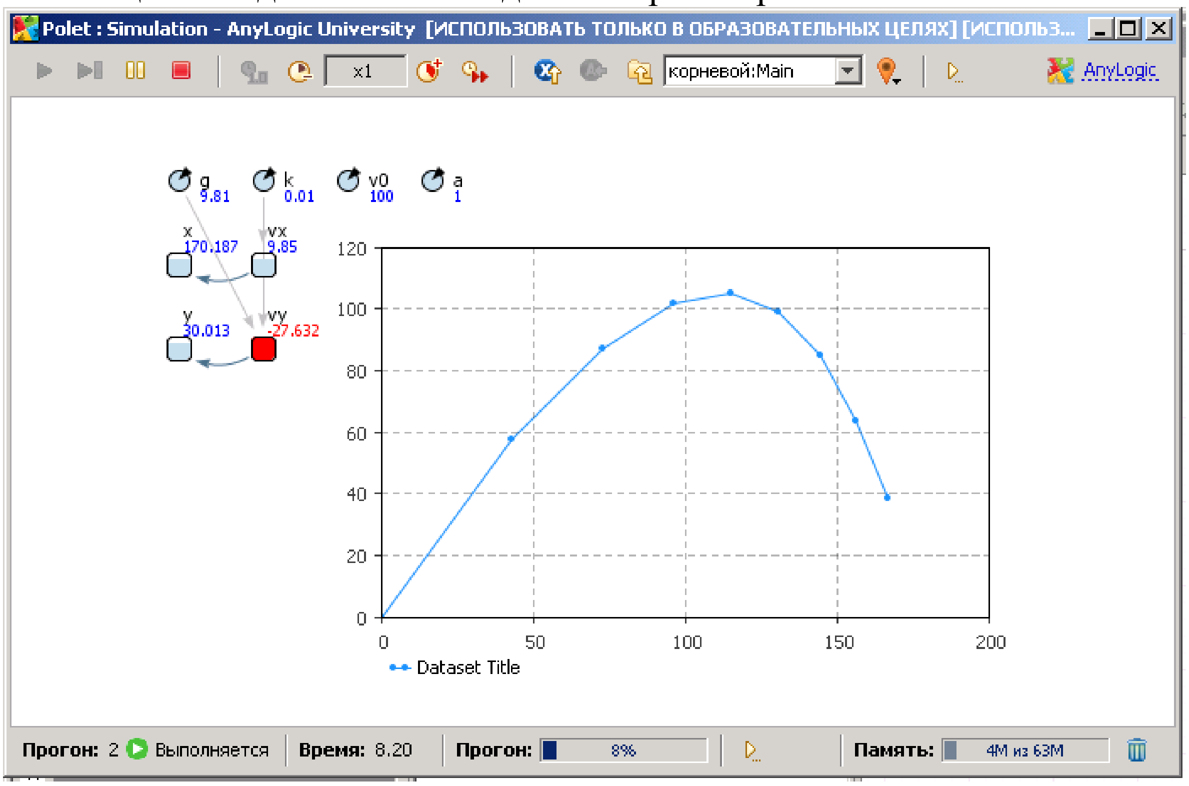


Рис. 5.5. Визуализация траекторию движения снаряда

Введем простую переменную *D* из палитры **Основная**, в которую будем записывать дальность полета тела – значение переменной *x* в момент падения тела на землю. Отследить момент падения можно с помощью стейтчарта, который надо построить с помощью палитры **Диаграмма состояний**, как показано на рис. 5.6. Переход в конечное состояние должен происходить при выполнении условия $y < 0$, т.е. когда тело упадет на землю. При этом должно выполниться действие, при котором переменная *D* получит значение дальности полета, а именно $D = x$.

Для остановки прогона модели при $y < 0$ в конечном состоянии стейтчарта в поле **Действие** впишем функцию finishSimulation().

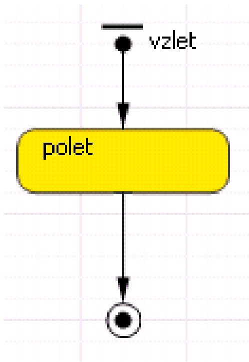


Рис. 5.6. Стейтчарт

2. Создание оптимизационного эксперимента.

Оптимизационный эксперимент создается в панели **Проекты** из контекстного меню **Создать|Эксперимент**. Необходимо выбрать тип эксперимента **Оптимизация** и дать имя эксперимента.

Введем целевой функционал – переменную *D*. Корневой активный объект эксперимента доступен здесь как root, поэтому запишем root.D.

Зададим условие остановки оптимизации – количество итераций = 500, это максимальное число итераций, доступное в учебной версии. Зададим оптимизационные параметры, т.е. параметры, значения которых будут меняться. Изменяем параметр угол α, причем этот угол может принимать любое значение от 0 до 180°, поэтому в таблице **Параметры** напротив параметра *a* в ячейке **Тип** выберем тип параметра непрерывный и установим минимальное значение – 0, максимальное – 3.1415, начальное значение – 1, рис. 5.7. При нажатии кнопки **Создать интерфейс**, будет создан интерфейс эксперимента – на презентацию будут добавлены элементы управления, отображающие текущий прогресс оптимизации и облегчающие управление процессом. Сохраним проект и запустим оптимизационный эксперимент.

3. Запуск модели

Кнопка **Запустить оптимизацию** на презентации оптимизационного эксперимента выполняет запуск оптимизационного процесса, рис. 5.8. В правой части расположен график, визуально отображающий ход оптимизации. По оси X откладываются номера итераций, а по оси *Y* - Текущее, Лучшее допустимое и Лучшее недопустимое значения, найденные для каждой итерации.

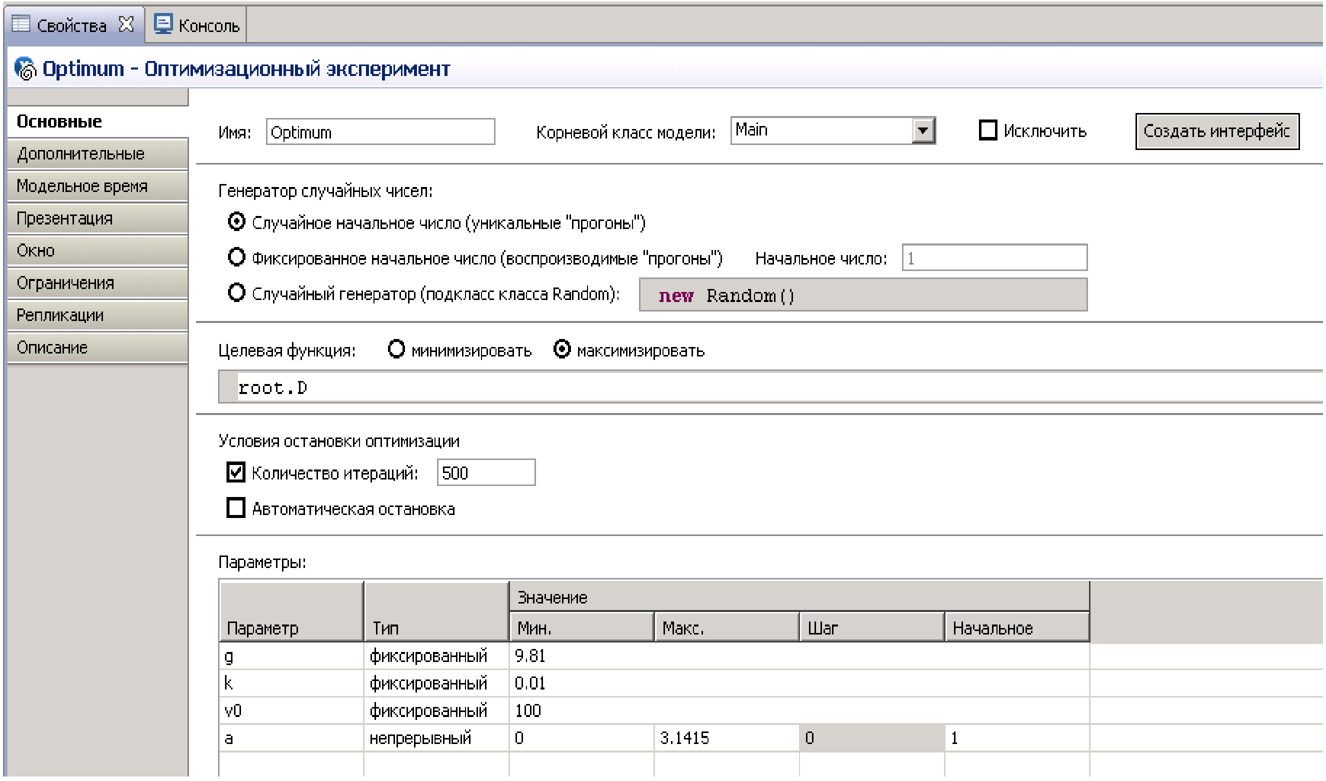


Рис. 5.7. Окно создания оптимизационного эксперимента

Таблица, расположенная в левой части окна, отображает всю необходимую информацию о ходе оптимизационного процесса. В столбце Текущее отображаются: номер последней завершенной итерации, значение целевой функции и значения параметров, при которых оно было получено на момент окончания этой итерации.

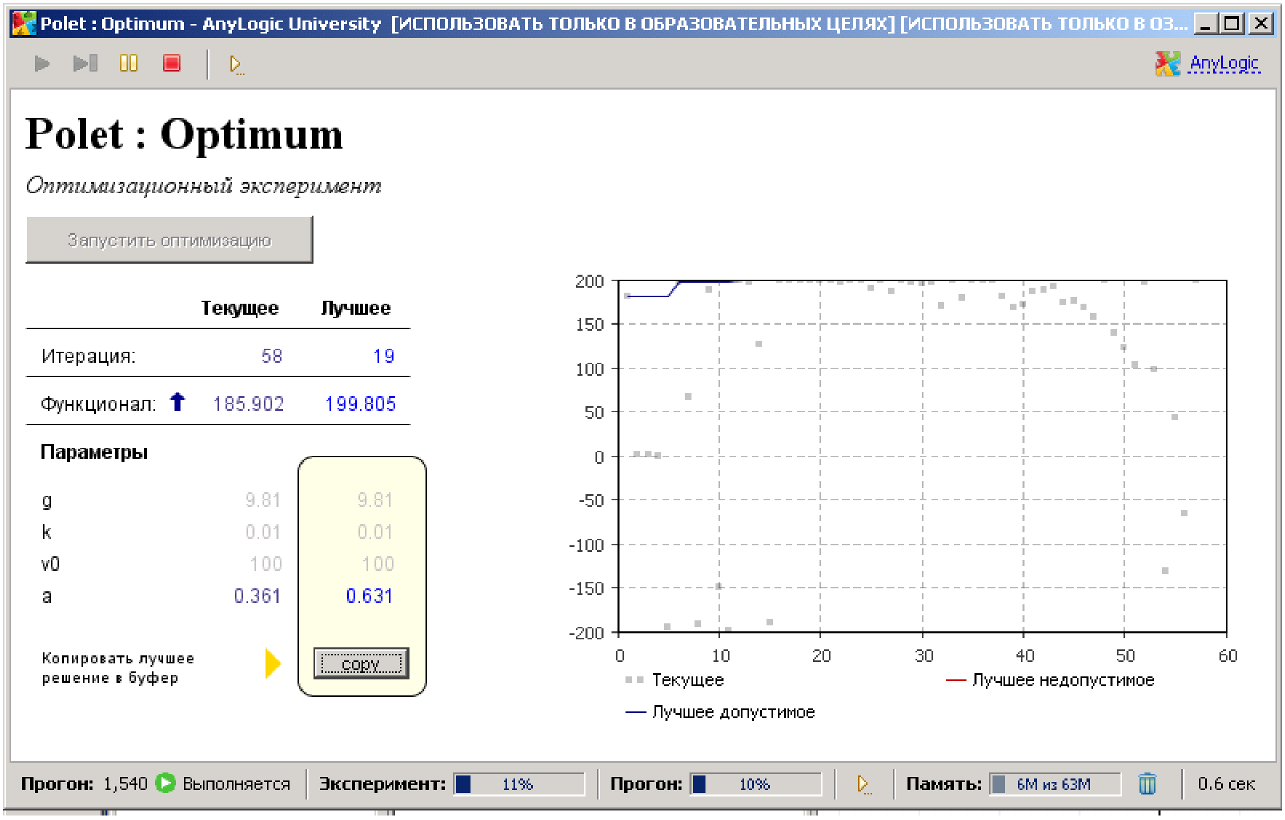


Рис. 5.8. Окно выполнения оптимизационного процесса

В столбце **Лучшее** отображается та же информация для найденного решения, которое является оптимальным на данный момент.

Можно экспортировать полученное решение в другие эксперименты модели, скопировав его и вставив в дальнейшем в нужный эксперимент с помощью кнопки **Вставить**, расположенной в нижней части страницы.

5.2 Порядок выполнения работы

1. Создать имитационную модель.
2. Создать оптимизационный эксперимент.
3. Задать целевой функционал, оптимизационные параметры, условия остановки прогона, условия остановки оптимизации.
4. Запустить оптимизационный эксперимент и зафиксировать результат.

5.3 Содержание отчета по лабораторной работе

1. Исходные данные.
2. Математическая модель.
3. Результаты имитационной модели и оптимизационного эксперимента на ней.

5.4 Варианты заданий

1. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывался встречный ветер со скоростью 10 м/с.

2. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывался попутный ветер со скоростью 10 м/с.

3. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась следующая зависимость коэффициента сопротивления от высоты: при $h < h_{max}/10$, $К_{сопр} = 0,02$; при h >= $h_{max}/10$, Ксопр = 0,01. (h_{max} – максимальная высота, достигаемая телом при отсутствии сопротивления воздуха).

4. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась следующая зависимость коэффициента сопротивления от вертикальной скорости: при наборе высоты Ксопр = 0, при спуске Ксопр = 0,1.

5. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась следующая зависимость коэффициента сопротивления от вертикальной скорости: при наборе высоты Ксопр = 0,1 при спуске Ксопр = 0.

6. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась подъемная сила, зависящая от квадрата скорости полета, Кпод = 0,01.

7. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы в качестве целевой функции использовалась продолжительность полета.

8. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась следующая зависимость коэффициента подъемной силы от вертикальной скорости: при наборе высоты Кпод = 0, при спуске Кпод = 0,5.

9. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы определить угол бросания, при котором тело упадет в ту же точку, при условии, что на тело действует встречный ветер, со скоростью 15 м/с

10. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывался встречный ветер со скоростью 15 м/с. Целевая функция – продолжительность полета.

11. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывался попутный ветер со скоростью 15 м/с. Целевая функция – продолжительность полета.

12. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась следующая зависимость коэффициента сопротивления от высоты: при $h < h_{max}/12$, $К_{сопр} = 0,015$; при $h >= h_{max}/12$, Ксопр = 0,01. (h_{max} – максимальная высота, достигаемая телом при отсутствии сопротивления воздуха). Целевая функция – продолжительность полета.

13. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитываласьследующая зависимость коэффициента сопротивления от вертикальной скорости: при наборе высоты Ксопр = 0, при спуске Ксопр = 0,1. Целевая функция – продолжительность полета.

14. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась следующая зависимость коэффициента сопротивления от вертикальной скорости: при наборе высоты Ксопр = 0,1 при спуске Ксопр = 0. Целевая функция – продолжительность полета.

15. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась подъемная сила, зависящая от квадрата скорости полета, Кпод = 0,01. Целевая функция – продолжительность полета.

16. Доработайте оптимизационную модель таким образом, чтобы учитывалась подъемная сила, зависящая от квадрата скорости полета, Кпод = 0,01. Целевая функция – скорость полета.

Лабораторная работа 6
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Цель: решить задачу многокритериальной оптимизации методом взаимных уступок.

6.1. Теоретические сведения

В общем виде оптимизационная задача со многими критериями может быть сформулирована следующим образом:

$$f(x) = \left(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)\right) \to \max_{x \in X}, \tag{6.1}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X \subset R^n$. Множество X допустимых вариантов (допустимых решений) является областью n-мерного пространства R^n, называемого пространством альтернатив.

В отличие от однокритериальных многокритериальные задачи обладают особенностями, требующими для их решения разработки специальных подходов:

1. В многокритериальных задачах критерии обычно противоречивы, то есть не существует решения, которое лучше других решений из множества X с точки зрения всех критериев.

2. Часто критерии измеряются в разных единицах, и это делает простое сравнение критериев f_i и f_j бессмысленным.

Поэтому все исходные критерии $f(x_1),...,f(x_m)$ приводят к сопоставимому виду. Одним из таких методов является метод последовательных уступок (компромиссов).

Вначале производится качественный анализ относительной важности критериев. На основании такого анализа критерии нумеруются в порядке убывания важности.

Ищем максимальное значение f_1^* первого критерия $f=f_1(x)$ на всем множестве допустимых решений. Затем назначаем величину «допустимого» снижения (уступки) Δ_1 критерия $f_1(x)$ и определяем наибольшее значение f_2^* второго критерия $f=f_2(x)$ при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше, чем $f_1^* - \Delta_1$. Затем назначаем величину «допустимого» снижения (уступки) Δ_2 критерия $f_2(x)$ и определяем наибольшее значение f_3^* третьего критерия $f=f_3(x)$ при условии, что значение второго критерия должно быть не меньше, чем $f_2^* - \Delta_2$ и т. д. Таким образом, оптимальным решением многокритериальной задачи считается всякое решение последней из задач последовательности:

1) найти $\max f_1(x) = f_1^*$ в области $x \in X$;

2) найти $\max f_2(x) = f_2^*$ в области, задаваемой условиями

$$x \in X;\ f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1; \qquad (6.2)$$

$$\ldots$$

m) найти $\max f_m(x) = f_m^*$ в области, задаваемой условиями

$$x \in X;\ f_i(x) \geq f_i^* - \Delta_i,\ i = \overline{1, m-1}.$$

Очевидно, что если все Δ_i =0, то метод уступок находит только оптимальные решения, которые доставляют первому по важности критерию наибольшее на X значение. В другом крайнем случае, когда величины уступок очень велики, решения, получаемые по этому методу, доставляют последнему по важности критерию наибольшее на X значение. Поэтому величины уступок можно рассматривать как своеобразную меру отклонения приоритета частных критериев от главного критерия.

Метод последовательных уступок не всегда приводит к получению только эффективных точек, но среди этих точек всегда существует хотя бы одна эффективная. Это следует из следующих утверждений.

Утверждение 1. Если $X \subset R^n$ – множество замкнутое и ограниченное, а функции $f_i(x)$ непрерывны, то решением m-й задачи из (6.2) является, по крайней мере, одна эффективная точка.

Утверждение 2. Если x^* – единственная (с точностью до эквивалентности) точка, являющаяся решением m-й задачи из (6.2), то она эффективна.

6.2 Порядок выполнения работы

1. Реализовать алгоритм взаимных уступок решения многокритериальной оптимизационной задачи, условия которой приведены в таблице 6.1.
2. Зафиксировать количественные характеристики метода взаимных уступок и полученные результаты решения задачи.
3. Решить эту же задачу графическим методом.
4. Сравнить результаты целевой функции, полученной симплекс-методом и графическим методом, оценить интервальную ошибку.
5. Оформить отчет о проделанной работе.

6.3 Содержание отчета по лабораторной работе

– Математическая постановка многокритериальной оптимизационной задачи.

– Количественные характеристики задачи и результаты ее решения.

– Последовательность решения многокритериальной оптимизационной задачи графическим способом.

– Выводы по сравнению результатов решения задачи, полученных методом взаимных уступок и графическим методом.

6.4 Варианты заданий

Таблица 6.1

Варианты функции оптимизации

№ варианта	Функция оптимизации f	№ варианта	Функция оптимизации f
1	$f_1(x) = 7x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2(x) = x_1 - 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=2	2	$f_1(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2(x) = -x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \le 8 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=4
3	$f_1(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$ $f_2(x) = -x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \le 6 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=1	4	$f_1(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \max$ $f_2(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 - 4x_2 \le 4 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=0,5
5	$f_1(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$ $f_2(x) = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$ $f_3(x) = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 16 \\ x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=4, Δ_2=5.	6	$f_1(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 \le 16 \\ x_2 \le 15 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=3.
7	$f_1(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$ $f_2(x) = 3x_1 + 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 \le 9 \\ x_2 \le 12 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=3.	8	$f_1(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2(x) = x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 8 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=3.

9	$f_1(x)=3x_1+2x_2\to\max$ $f_2(x)=3x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 18\\ x_1\le 12\\ x_2\le 15\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=2,5.	10	$f_1(x)=6x_1+x_2\to\max$ $f_2(x)=4x_1+6x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 20\\ x_1\le 12\\ x_2\le 15\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=3.
11	$f_1(x)=6x_1+3x_2\to\max$ $f_2(x)=x_1+3x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 10\\ x_1\le 8\\ x_2\le 7\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=3.	12	$f_1(x)=2x_1+x_2\to\max$ $f_2(x)=3x_1+5x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 18\\ x_1\le 12\\ x_2\le 10\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_2, f_1\}$; Δ_2=1,5.
13	$f_1(x)=5x_1+2x_2\to\max$ $f_2(x)=2x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 16\\ x_1\le 11\\ x_2\le 14\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_2, f_1\}$; Δ_2=3.	14	$f_1(x)=6x_1+x_2\to\max$ $f_2(x)=x_1+2x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 20\\ x_1\le 14\\ x_2\le 13\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_2, f_1\}$; Δ_2=2.
15	$f_1(x)=4x_1+x_2\to\max$ $f_2(x)=4x_1+5x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 10\\ x_1\le 7\\ x_2\le 8\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_2, f_1\}$; Δ_2=2.	16	$f_1(x)=6x_1+x_2\to\max$ $f_2(x)=4x_1+6x_2\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2\le 20\\ x_1\le 12\\ x_2\le 15\\ x_i\ge 0,\, i=\overline{1,2}\end{cases}$ Критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$; Δ_1=3.

Лабораторная работа 7
ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель: разработать генетический алгоритм оптимизации, ускоряющий поиск решения по сравнению с полным перебором

7.1. Теоретические сведения

Работа ГА – итеративный процесс, продолжающийся вплоть до выполнения заданных условий остановки: близость полученных решений к заданному значению, прекращение роста средней «полезности» популяции, минимальная численность популяции, число итераций и др. Основной (классический) генетический алгоритм состоит из следующих шагов:

1) генерация случайным образом начальной популяции хромосом $P_0 = \left\{A_{r1}^0, \ldots, A_{rk}^0, \ldots, A_{rN_0}^0\right\}$;

2) оценка приспособленности хромосом в популяции;

3) проверка условия остановки алгоритма;

4) селекция хромосом;

5) применение к начальной популяции последовательности генетических операторов, порождающей новую популяцию P_t;

б) формирование новой популяции P_{t+1};

7) выбор «наилучшей» хромосомы.

Блок-схема основного генетического алгоритма изображена на рис. 7.1.

Генерация или формирование исходной популяции заключается в случайном выборе заданного количества хромосом (особей), закодированных двоичными последовательностями фиксированной длины.

Оценивание приспособленности хромосом в популяции состоит в расчете функции приспособленности для каждой хромосомы этой популяции. Чем больше значение этой функции, тем выше «качество» хромосомы. Предполагается, что функция приспособленности всегда принимает неотрицательные значения и, кроме того, что для решения оптимизационной задачи требуется максимизировать эту функцию.

Проверка условия остановки алгоритма. Определение условия остановки генетического алгоритма зависит от его конкретного применения. В оптимизационных задачах, если известно максимальное (или минимальное) значение функции приспособленности, то остановка алгоритма может произойти после достижения ожидаемого оптимального значения, возможно, с заданной точностью. Остановка алгоритма также может произойти в случае, когда его выполнение не приводит к улучшению уже достигнутого значения. Алгоритм может быть остановлен по истечении определенного времени выполнения или после выполнения заданного количества итераций. Если условие остановки выполнено, то производится переход к завершающему этапу выбора «наилучшей» хромосомы. В противном случае на следующем шаге выполняется селекция.

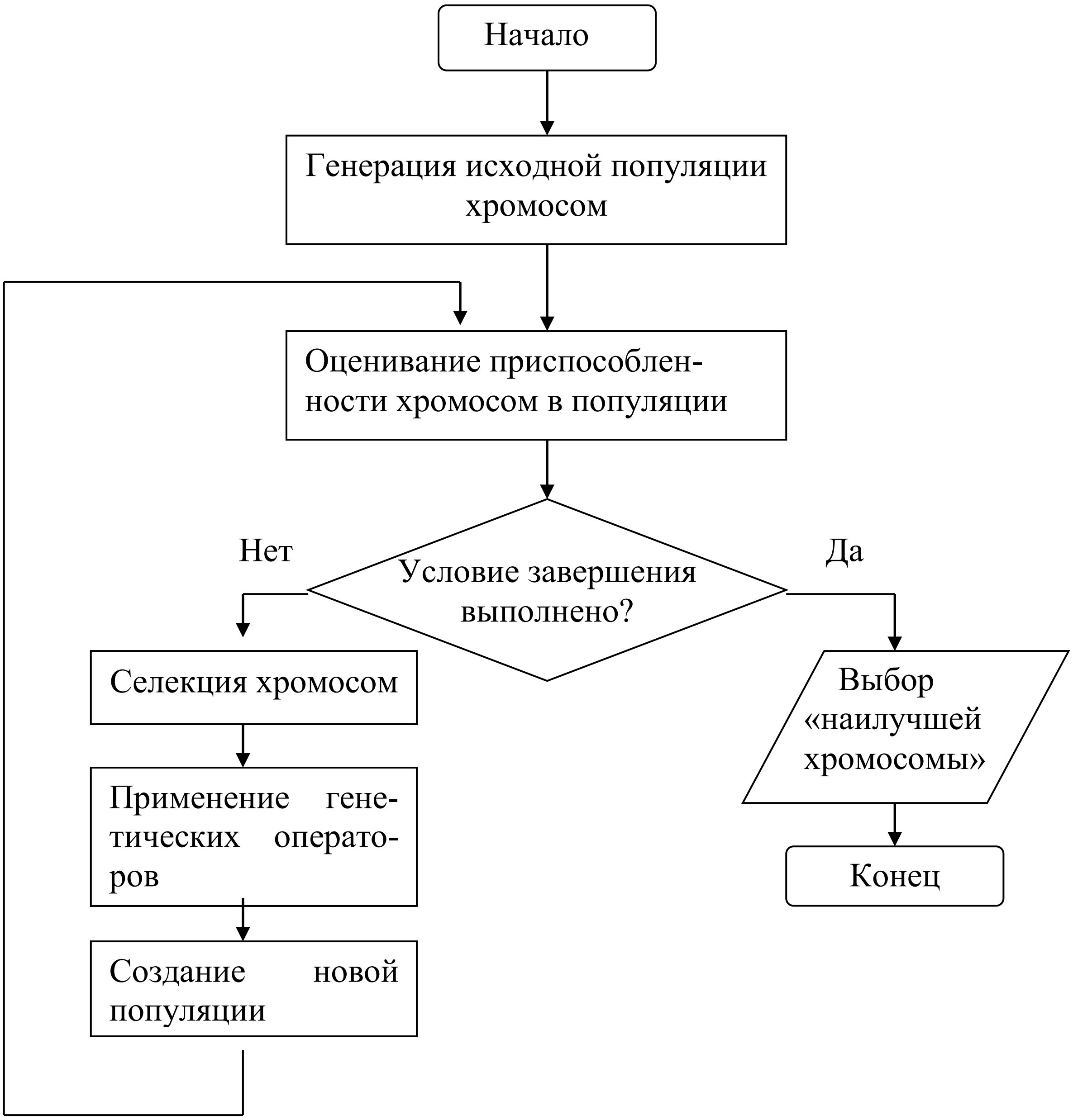


Рис. 7.1. Схема классического генетического алгоритма

Селекция хромосом заключается в выборе (по рассчитанным на втором этапе значениям функции приспособленности) тех хромосом, которые будут участвовать в создании потомков для следующей популяции, т.е. для очередного поколения. Такой выбор производится, согласно принципу естественного отбора, по которому наибольшие шансы на участие в создании новых особей имеют хромосомы с наибольшими значениями функции приспособленности.

В результате процесса селекции создается родительская популяция, также называемая родительским пулом с численностью *N*, равной численности текущей популяции. *Применение генетических операторов* к хромосомам, отобранным с помощью селекции, приводит к формированию новой популяции потомков от созданной на предыдущем шаге родительской популяции.

В классическом генетическом алгоритме применяются два основных генетических оператора: оператор скрещивания и операторы мутации и инверсии.

Однако следует отметить, что операторы мутации и инверсии играют явно второстепенную роль по сравнению с оператором скрещивания. Это означает, что скрещивание в классическом генетическом алгоритме производится практически всегда, а мутация и инверсия – достаточно редко. Вероятность скрещивания, как правило, достаточно велика (обычно $0,5 \le p_c \le 1$), тогда как вероятности мутации и инверсии устанавливаются весьма малыми (чаще всего $0 \le p_m \le 0,1$; $0 \le p_c \le 0,1$). Это следует из аналогии с миром живых организмов, где мутации происходят чрезвычайно редко.

В генетическом алгоритме мутация и инверсия хромосом могут выполняться на популяции родителей перед скрещиванием или на популяции потомков, образованных в результате скрещивания.

Формирование новой популяции. Хромосомы, полученные в результате применения генетических операторов к хромосомам временной родительской популяции, включаются в состав новой популяции. Она становится так называемой текущей популяцией для данной итерации генетического алгоритма. На каждой очередной итерации рассчитываются значения функции приспособленности для всех хромосом этой популяции. Затем проверяется условие остановки алгоритма и либо фиксируется результат в виде хромосомы с наибольшим значением функции приспособленности, либо осуществляется переход к следующему шагу генетического алгоритма, т.е. к селекции. В классическом генетическом алгоритме вся предшествующая популяция хромосом замещается новой популяцией потомков, имеющей ту же численность.

Выбор наилучшей хромосомы. Если условие остановки алгоритма выполнено, то следует вывести результат работы, т.е. представить искомое решение задачи. Лучшим решением считается хромосома A^*с наибольшим значением функции приспособленности $F(A^*) = \max\limits_{p} F(A_k)$.

7.2 Порядок выполнения работы

1. Разработать генетический алгоритм решения оптимизационной задачи, условия которой приведены в таблице 7.1.
2. Зафиксировать количественные характеристики работы генетического алгоритма и полученные результаты решения задачи.
3. Решить эту же задачу полным перебором.
4. Сравнить количественные характеристики задачи и результаты ее решения с применением генетическим алгоритмом и полного перебора.
5. Оформить отчет о проделанной работе.

7.3 Содержание отчета по лабораторной работе

– Математическая постановка многокритериальной оптимизационной задачи.

– Количественные характеристики задачи и результаты ее решения.

– Выводы по сравнению результатов решения задачи, полученных генетическим алгоритмом и полным перебором.

7.4 Варианты заданий

Таблица 7.1

Варианты задач оптимизации

№ варианта	Условие задачи
1	**Задача «поиска кратчайшего пути».** Имеются n узлов транспортной сети, соединенных между собой дорогами, протяженность которых представлена матрицей $\left\| d_{ij} \right\|_{n \times n}$ и соответствующей ей бинарной матрицей, отражающих возможность наличия потока между узлами. Найти оптимальный маршрут между любыми двумя узлами с целью минимизации суммарной его протяженности.
2	**Задача «о максимальном потоке».** Имеются n узлов транспортной сети, соединенных между собой дорогами, протяженность которых представлена матрицей $\left\| p_{ij} \right\|_{n \times n}$ и соответствующей ей бинарной матрицей, отражающих возможность наличия потока между узлами. Найти максимально возможную величину потока, проходящую через сеть между любыми двумя удаленными узлами.
3	**Задача «коммивояжера».** Имеются n пунктов назначения, соединенных попарно между собой дорогами, время перехода между ними представлена матрицей $\left\| t_{ij} \right\|_{n \times n}$. Найти оптимальный маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одном и том же пункте с целью минимизации суммарного времени обхода всех пунктов.
4	**Задача «о раскрое».** Имеется продукция, в комплектацию которой входят m=2 вида деталей 1-го и 2-го типа в количестве $\{k_j\} = \{2,3\}$ штук соответственно, при этом детали изготавливаются из заготовок длиной D=6,5 м и имеют длину соответственно $\{d_j\} = \{2;1{,}25\}$ м, исходное количество заготовок N=50 штук. Найти оптимальный раскрой заготовок (т.е. сколько деталей 1-го и 2-го типа изготавливать из одной заготовки) с целью максимизации суммарного количества продукции (полной комплектации) при соблюдении ограничений на общее число заготовок.
5	**Задача «о минимизации числа исполнителей».** Имеются n=3 исполнителя, характеризующиеся различной производительностью (количество операций в единицу времени) выполнения работ: $\{\Pi_i\} = \{1,2,3\}$ и m=10 работ, характеризующиеся трудоемкостью (количеством операций): $\{T_j\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задан директивный срок окончания всех работ D=12.Найти минимальное число исполнителей, достаточное для выполнения всех работ к заданному сроку.
6	**Задача «распределения ресурсов на сетевом графике проекта».**

	Имеются n событий (узлов графа сети), соединенных между собой работами (дугами), продолжительность выполнения которых представлена матрицей $\left\| d_{ij} \right\|_{n \times n}$ (где символом «_» отражено отсутствие работы) и соответствующей ей бинарной матрицей, отражающих возможность наличия соответствующей работы. W – суммарный объем дополнительных ресурсов. Найти оптимальный распределение дополнительных ресурсов , обеспечивающее минимальный срок реализации всего комплекса работ проекта.
7	**Задача «упаковки ранца».** *Дано*: Имеются n=5 объектов, каждый из которых характеризуется свойствами: важности и размерности, соответственно: $\{c_i\}$=$\{2,5,4,7,3\}$ – значения показателя важности объектов; $\{v_i\}$=$\{4,3,1,5,2\}$ – значения показателя размерности объектов; w=11 – вместимость ранца. *Найти*: Оптимальную упаковку ранца, с целью максимизации суммарной важности взятых объектов при соблюдении ограничения на вместимость ранца.
8	**Задача «о назначении».** *Дано*: Имеются n=4 вида работ и m=4 исполнителя (кандидата), каждый из которых характеризуется соответствующими затратами необходимых ресурсов на выполнение работ, соответственно: 1-й исполнитель: $\{t_{1j}\}$=(3,4,5,5}, 2-й исполнитель: $\{t_{2j}\}$=(4,3,2,4}, 3-й исполнитель: $\{t_{3j}\}$=(2,4,3,5}, 4-й исполнитель: $\{t_{4j}\}$=(3,4,5,5}. *Найти*: Оптимальное назначение исполнительной на работы, с целью минимизации суммарных затрат ресурсов на выполнение всех работ.
9	**Задача «упаковки контейнеров».** *Дано*: Имеются n=3 контейнера, имеющие соответствующие значения показателя вместимости: $\{w_i\}$=$\{11,7,9\}$, и m=8 объектов, каждый из которых характеризуется свойствами: важности и размерности, соответственно: $\{c_j\}$=$\{2,5,4,7,3,4,7,6\}$ – значения показателя важности объектов; $\{v_i\}$=$\{4,3,1,5,2,6,4,7\}$ – значения показателя размерности объектов *Найти*: Оптимальную упаковку контейнеров (т.е. какой объект – в какой контейнер), с целью максимизации суммарной важности взятых объектов при соблюдении ограничения на вместимость контейнеров
10	**Задача «об ассортименте продукции».** *Дано*: Имеются n=3 вида продукции, которые выпускает фирма, прибыль от продажи которых соответственно равна $\{c_j\}$=$\{3,2,5\}$, в процессе производства видов продукции используются (последовательно) m=3 технологические операции, при этом производство каждого вида характеризуется соответствующими продолжительностями операций на изготовление единицы продукции:

	для 1-го вида: $\{t_{1j}\}$=(1,3,1} единиц времени, для 2-го вида: $\{t_{2j}\}$=(2,0,4} единиц времени, для 3-го вида: $\{t_{3j}\}$=(1,2,0} единиц времени, фонд рабочего времени, в течении которого могут выполняться технологические операции ограничен соответствующими предельными значениями $\{T_j\}=\{430,460,420\}$ единиц времени в сутки. *Найти*: Оптимальный суточный объем производства каждого вида продукции с целью минимизации суммарной прибыли от ее реализации при соблюдении ограничений на общую продолжительность технологических операций.
11	**Задача «транспортная».** *Дано*: Имеются n=3 склада товаров, имеющие соответствующие значения запасов: $\{w_j\}=\{8,4,6\}$ и m=4 магазина, каждый из которых характеризуется ежедневными потребностями в товарах, соответственно $\{v_j\}=\{4,3,6,5\}$, известны соответствующие расходы по доставке единицы товара со складов в магазины: с 1-го склада: $\{c_{1j}\}$=(2,2,4,5}, со 2-го склада: $\{c_{2j}\}$=(3,2,2,3}, с 3-го склада: $\{c_{3j}\}$=(3,6,7,6}. *Найти*: Оптимальный план перевозки товаров со складов в магазины (с какого склада – в какой магазин сколько товара), с целью минимизации суммарных транспортных расходов по доставке требуемого количества товаров в соответствующие магазины.
12	**Задача «минимизации суммарного штрафа».** *Дано*: Имеются n=6 работ, характеризующиеся продолжительностью выполнения: $\{d_j\}=\{1,2,3,4,5,6\}$. При этом заданы директивные сроки окончания выполнения соответствующих $D_j=\{2,6,3,5,4,5\}$ и штрафы за их нарушение $h_j=\{1,1,2,1,3,4\}$. *Найти*: Оптимальное расписание (очередность выполнения работ) с целью минимизации суммы штрафов за нарушение директивных сроков завершения выполнения соответствующих работ.
13	**Задача «о минимизации позднего времени окончания работ».** Имеются n=3 исполнителя, характеризующиеся различной производительностью (количество операций в единицу времени) выполнения работ: $\{П_i\}=\{1,2,3\}$ и m=10 работ, характеризующиеся трудоемкостью (количеством операций): $\{T_j\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Найти оптимальный расписание параллельного выполнения работ исполнителями, с целью минимизации позднего времени окончания выполнения всех работ.
14	**Задача «об оптимальном выпуске продукции».** Автомобильная компания производит легковые автомобили и грузовики. Каждое транспортное средство должно обрабатываться в покрасочном и сборочном цехах. Если бы в покрасочном цехе обрабатывались только грузовые автомобили, то можно было бы покрасить 40 машин в

	день. Если бы обрабатывались только легковые автомобили, то выпуск составил бы 60 единиц продукции. В сборочном цехе обрабатывается 50 транспортных средств в день. Прибыль от производства одного легкового автомобиля и грузовика составляет 200$ и 300$ соответственно. Найти: оптимальный ежедневный выпуск продукции, обеспечивающий максимальную прибыль компании.
15	**Задача «о построении оптимального плана производства».** Кондитерская фабрика производит продукцию двух видов: конфеты и шоколад. Для производства продукции каждого вида требуются ресурсы двух типов: сахар и какао-бобы. Для производства одной тонны продукции каждого вида требуется по одной тонне сахара. Для производства одной тонны шоколада требуется 5 тонн какао, а для производства одной тонны конфет – 2 тонны какао. Суточные запасы ресурсов равны 4 и 10 тонн соответственно. Прибыль от реализации одной тонны шоколада и конфет составляет 5 и 3 тысячи рублей соответственно. Найти: оптимальный (т. е. максимизирующего прибыль) суточный план производства.
16	**Задача «о прибыли банка»**. Собственные средств банка в сумме с депозитами составляют *P* млн. руб. Часть этих средств, но не менее *Q* млн. руб. должна быть размещена в кредитах, а вложения в ценные бумаги должны составлять не менее *r*% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. C_1 – доходность кредитов, C_2 – доходность ценных бумаг (причем $C_1 > C_2$). Найти: оптимальное размещение средств с целью максимизации прибыли банка.

Содержание