Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра механики

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания к самостоятельной работе
для студентов специальности 130400

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

УДК 624.023.93 (073)

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ: Методические указания к самостоятельной работе / Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». Сост.: *В.Г. Гореликов, Н.В. Чернышева.* СПб, 2014. 49 с.

В методических указаниях приведены варианты расчетных заданий по курсу «Сопротивление материалов». Даны теоретический материал и примеры решений типовых задач.

Предназначены для студентов специальности 130400 «Горное дело» (специализации «Шахтное и подземное строительство», «Маркшейдерское дело», «Взрывное дело», «Технологическая безопасность и горноспасательное дело», «Горнопромышленная экология») дневной формы обучения.

Научный редактор проф. *А.А. Яковлев*

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – раздел механики **деформируемого** твердого тела, инженерная дисциплина, изучающая закономерности работы деталей машин, механизмов, машин, конструкций, выполненных из различных материалов. Подразумевается, что конструкционный элемент должен воспринимать внешние нагрузки, не разрушаясь (условие **прочности**) и не претерпевая значительного искажения формы – больших деформаций (условие **жесткости**) – «сопротивляться» внешним нагрузкам. Удовлетворение этих условий достигается надлежащим выбором формы и размеров детали, а также материала с подходящими физическими характеристиками.

Целью преподавания дисциплины для студентов горного университета является изучение основных видов деформации и связанных с ними внутренних усилий, методов расчета и проектирования конструктивных элементов, удовлетворяющих условиям прочности и жесткости.

Теоретической и практической базой курса являются дисциплины «Математика», «Теоретическая механика».

В соответствии с учебным планом специальности изучение курса предполагает самостоятельную работу по выполнению расчетно-графических заданий.

Приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения следующих задач.

1. Расчет статически неопределимого стержня на растяжение-сжатие.
2. Расчет статически неопределимой балки с использованием дифференциального уравнения изогнутой оси.
3. Расчет вала в условиях сложного сопротивления на статическую и усталостную прочность.

Студент должен выполнить вариант задания в соответствии с присвоенным ему шифром.

1. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

1.1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Пусть на прямолинейный стержень постоянного сечения вдоль оси стержня, совпадающей с осью x, действует сила P.

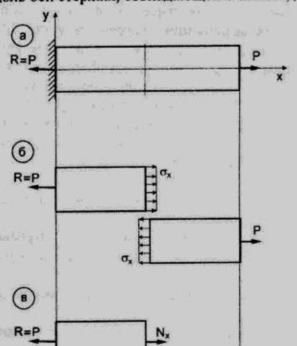


Рис.1. Внутренние усилия в растянутом стержне.

Записав уравнение равновесия для стержня в целом, определим реакцию закрепления (см. рис.1, а):

$$\sum X = -R + P = 0 \Rightarrow R = P.$$

Теперь нам известны все внешние силы (активные и реактивные), действующие на стержень. Если для определения реакций достаточно уравнений равновесия, система называется **статически определимой.**

Мысленно проведем поперечное сечение и рассмотрим одну из отсеченных частей. По площади сечения распределены силы взаимодействия частиц, составляющих материал стержня (атомов или молекул), возникающие в ответ на действие внешних сил и сопротивляющиеся им, – дополнительные **внутренние усилия** (см. рис.1, б). Предположим, что они распределены равномерно с интенсивностью $\sigma_x = const$. Величина σ_x называется **нормальным напряжением.**

Найдем равнодействующую внутренних усилий N_x - **нормальную или продольную силу**

$$N_x = \int_F dN = \int_F \sigma_x dF \Rightarrow N_x = \sigma_x \cdot F \Rightarrow \sigma_x = \frac{N_x}{F}.$$

Выразим внутреннее усилие через внешние силы. Для этого запишем уравнение равновесия левой отсеченной части стержня (можно рассматривать и правую часть):

$$\sum X = -R + N_x = -P + N_x = 0 \Rightarrow N_x = P \text{ (см. рис.1, в).}$$

Этот прием носит название **метода сечений** и применяется для нахождения любых внутренних усилий.

Под действием продольной силы изменяется длина стержня: $\Delta l = l - l_0$. Величина Δl называется **абсолютным удлинением** и измеряется в метрах (*м*). Абсолютное удлинение относится к *перемещениям.*

Продольная сила связана с абсолютным удлинением **законом Гука,** который может быть записан в прямой форме $N_x = \frac{EF}{l_0}\Delta l$, или в обратной форме $\Delta l = \frac{N_x l_0}{EF}$.

Здесь E - модуль Юнга (модуль нормальной упругости) – физическая постоянная материала, l_0 - исходная длина стержня.

При одновременном действии внешней силы, наличии начальной неточности изготовления стержня δ и изменении температуры Δt° абсолютное удлинение находится по формуле

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_{t^\circ} + \delta = \frac{N_x l_0}{EF} + \alpha \Delta t^{\circ} l_0 + \delta,$$

где α - температурный коэффициент линейного расширения.

Следует отметить, что при растяжении $N_x > 0$, $\sigma_x > 0$, при сжатии эти величины отрицательны. Это и есть **правило знаков** для продольной силы (см. рис.2).

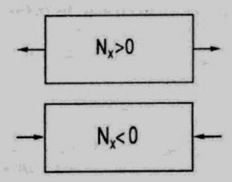


Рис.2. Правило знаков для продольной силы.

В отличие от внешних сил, знак проекций которых определяется по их направлению относительно координатной оси, знак внутренних усилий определяется сразу для двух внутренних сил, приложенных к разным отсеченным частям стержня (см. рис.1). По третьему закону Ньютона они равны по модулю и противоположны по направлению.

1.2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ, РАБОТАЮЩИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Если на первом этапе решения задачи не удается определить внешние силы (реакции) в стержневой системе из уравнений равновесия, потому что их меньше, чем неизвестных реакций, система называется **статически неопределимой**. Разность между количеством неизвестных и количеством независимых уравнений равновесия, которые можно записать для данной стержневой системы, называется **степенью статической неопределимости**.

Недостающие уравнения запишем на основе представлений о том, как может деформироваться стержневая система под действием заданных внешних сил, так чтобы перемещения всех точек не про-

тиворечили наложенным на систему связям и не требовали нарушения целостности ее элементов. Такие уравнения называются поэтому уравнениями **неразрывности (сплóшности)**, или **геометрическими** уравнениями, поскольку выражают зависимости между геометрическими величинами – перемещениями. Еще одно их название – уравнения **совместности перемещений** - связано с тем, что все элементы системы деформируются вместе, не отрываясь друг от друга и от опор.

Однако уравнения совместности сами по себе выражают лишь связь перемещений. Необходимо переписать их так, чтобы они содержали усилия (реакции) в явном виде. Для этого применяются так называемые **физические** уравнения, связывающие усилия и перемещения, например закон Гука.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1 (см. рис.3, а). На стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа) закрепленный между двумя жесткими заделками, действуют внешние продольные силы. Задано соотношение площадей участков стержня: $F_1 : F_2 : F_3 = 2:1:1.5$.

Выразим продольные усилия через внешние силы (заданные активные силы и неизвестные пока реакции опор R_A и R_D):

Сделаем это **методом сечений**:

1) разобьем стержень на участки, границами которых являются сечения, в которых приложены внешние силы;
2) на каждом участке выберем произвольное сечение и рассмотрим внешние силы, приложенные по одну сторону от него;
3) продольная сила определяется из уравнения равновесия отсеченной части стержня, при этом она оказывается равной сумме внешних сил по одну сторону от сечения.

Будем вычислять продольную силу на участке **как сумму внешних сил с одной стороны от произвольного сечения (слева или справа), взятых со знаками по правилу знаков для соответствующей стороны стержня (левой или правой) (см. рис.2)**:

$N_{1\,справа} = R_A$, $N_{2\,справа} = R_A - 50$, $N_{3\,слева} = -R_D$ (см. рис. 3,а) (направление реакций опор выбирается произвольно).

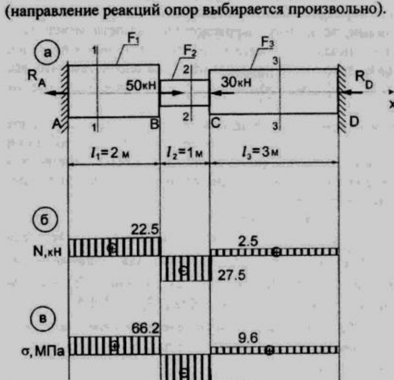


Рис.3. Статически неопределимый стержень.

Запишем **уравнение равновесия** стержня в целом:

$$\sum X = -R_A + 50 - 30 - R_D = 0 \Rightarrow R_A + R_D = 20.$$

Здесь знаки проекций внешних сил связаны, как обычно, с их направлением относительно оси x.

Итак, для определения двух неизвестных реакций мы располагаем лишь одним уравнением равновесия. Дополнительное уравнение – **уравнение совместности перемещений** – выражает неизменность длины стержня ввиду наличия жестких защемлений:

$$\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Это уравнение не содержит в явном виде неизвестных реакций R_A и R_B, поэтому воспользуемся **законом Гука**:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1},\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2},\ \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3}.$$

Учитывая выражения для продольных сил через внешние силы, перепишем уравнение совместности в виде:

$$\frac{R_A l_1}{EF_1} + \frac{(R_A - 50) \cdot l_2}{EF_2} - \frac{R_D l_3}{EF_3} = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2F_2} + \frac{(R_A - 50) \cdot 1}{EF_2} - \frac{R_D l_3}{E \cdot 1.5F_2} = 0.$$

Окончательно получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$R_A + R_D = 20,$$
$$2R_A - 50 - 2R_D = 0.$$

Решив ее, найдем $R_A = 22.5$ (кН), $R_D = -2.5$ (кН) затем определим продольные усилия и построим эпюру N_x (см. рис.3, б):

$$N_1 = 22.5 \text{ (кН)}, N_2 = -27.5 \text{ (кН)}, N_3 = 2.5 \text{ (кН)}.$$

Теперь подберем площади сечений из условий прочности для отдельных участков, сохраняя заданные соотношения между ними:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} \le [\sigma] \Rightarrow F_1 = 2F_2 \ge \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{22.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cong 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)} = 1.4 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{F_2} \le [\sigma] \Rightarrow F_2 \ge \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{27.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cong 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)} = 1.7 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} \le [\sigma] \Rightarrow F_3 = 1.5F_2 \ge \frac{2.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cong 0.2 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)} = 0.2 \text{(см}^2\text{)}.$$

Разрешив эти три неравенства относительно F_2, примем в соответствии с наиболее сильным из них ($F_2 \geq 1.7$ см^2): $F_1 = 3.4$ см^2, $F_2 = 1.7$ см^2, $F_3 = 2.6$ см^2.

Построим теперь эпюру напряжений (см. рис. 3, в):

$$\sigma_1 = \frac{22.5 \cdot 10^3}{3.4 \cdot 10^{-4}} = 66.2 \text{ (Мпа)}, \quad \sigma_2 = \frac{-27.5 \cdot 10^3}{1.7 \cdot 10^{-4}} = -161.8 \text{ (Мпа)},$$

$$\sigma_3 = \frac{2.5 \cdot 10^3}{2.6 \cdot 10^{-4}} = 9.6 \text{ (Мпа)}.$$

Несмотря на то, что $|\sigma|_{max} = |\sigma_2| > [\sigma]$, такой перегруз допустим, поскольку он не превышает 5%:

$$\frac{|\sigma|_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{161.8 - 160}{160} \cdot 100\% = 1.1\% < 5\%.$$

Найдем абсолютные удлинения участков, проверим условие совместности и определим перемещения сечений (см. рис. 3, г):

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{66.2}{2 \cdot 10^5} \cdot 2 = 0.66 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 0.66 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \frac{-161.8}{2 \cdot 10^5} \cdot 1 = -0.81 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.81 \text{ (мм)}$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3}{E} l_3 = \frac{9.6}{2 \cdot 10^5} \cdot 3 = 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 0.15 \text{ (мм)};$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.66 - 0.81 + 0.15 = 0;$$

$$\Delta l_B = \Delta l_1 \approx 0.66 \text{ (мм)}, \quad \Delta l_C = -\Delta l_3 = -0.15 \text{ (мм)};$$

сечение B перемещается вправо, а сечение C - влево (см. рис.3).

Пример 2. Пусть стержень, описанный в примере 1, изготовлен неточно - длиннее, чем нужно, на $\delta = 0.5$ мм (рис.4, а). Тогда в нем при установке (сборке) возникнут внутренние усилия (напряжения) даже при отсутствии внешних сил.

Из уравнения равновесия следует, что опорные реакции равны:

$$\sum X = -R_A - R_D = 0 \Rightarrow R_A = -R_D.$$

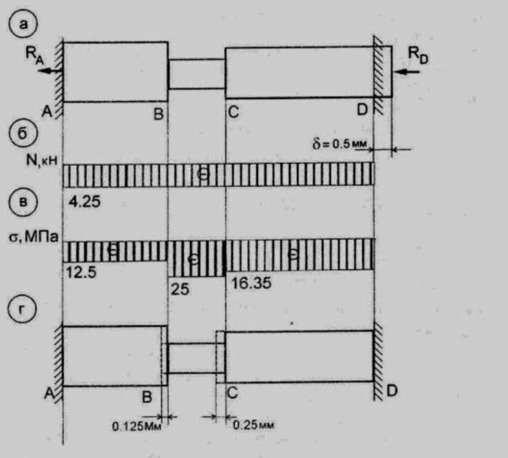


Рис.4. Расчет стержня на неточность изготовления.

Методом сечений устанавливаем, что $N_1 = N_2 = N_3 = R_A = -R_D$.

С учетом наличия неточности неточность δ уравнение совместности принимает вид:

$$\frac{R_A l_1}{EF_1} + \frac{R_A l_2}{EF_2} - \frac{R_D l_3}{EF_3} + \delta = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2F_2} + \frac{R_A \cdot 1}{EF_2} + \frac{R_A \cdot 3}{E \cdot 1.5F_2} + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = -\frac{\delta E F_2}{4} = -\frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{4} = -4.25 \text{ (кН)}.$$

На рис. 4, б представлена эпюра продольной силы.

Построим эпюру напряжений (см. рис. 4, в):

$$\sigma_1 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{3.4 \cdot 10^{-4}} = -12.5 \text{ (МПа)}, \quad \sigma_2 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{1.7 \cdot 10^{-4}} = -25 \text{ (Мпа)},$$

$$\sigma_3 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{2.6 \cdot 10^{-4}} = -16.35 \text{ (МПа)}.$$

Проверим выполнение условия совместности:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{-12.5}{2 \cdot 10^5} \cdot 2 = -0.125 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.125 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \frac{-25}{2 \cdot 10^5} \cdot 1 = -0.125 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.125 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3}{E} l_3 = \frac{-16.35}{2 \cdot 10^5} \cdot 3 = -0.25 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.25 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0.125 - 0.125 - 0.25 + 0.5 = 0.$$

Сечение B перемещается влево на $\Delta l_B = -0.125$ мм, сечение C перемещается влево на $\Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0.25$ мм (см. рис.4, г).

Пример 3. Пусть второй участок рассматриваемого стержня нагрет на $\Delta t^\circ = 40^\circ C$. Поскольку внешние силы на стержень не действуют, внутренние силы на всех участках равны (см. пример 2):

$$N_1 = N_2 = N_3 = R_A = -R_D.$$

Уравнение совместности запишем так же, как в примере 1: $\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$, а в физическое уравнение для второго участка внесем слагаемое, учитывающее изменение температуры:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} + \delta_{t^\circ}, \delta_{t^\circ} = \alpha \cdot \Delta t^\circ l_2 = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 1 = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Здесь $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ $(1/^\circ)$ - температурный коэффициент линейного расширения стали.

Окончательный вид уравнения для определения R_A:

$$\frac{R_A l_1}{EF_1} + \frac{R_A l_2}{EF_2} + \delta_{t^\circ} - \frac{R_D l_3}{EF_3} = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2F_2} + \frac{R_A \cdot 1}{EF_2} + \frac{R_A \cdot 3}{E \cdot 1.5F_2} + \delta_{t^\circ} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = -\frac{\delta_{t^\circ} E F_2}{4} = -\frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{4} = -4.25 \text{ (кН)}.$$

Таким образом, фактически расчет на температурное воздействие полностью аналогичен расчету на неточность изготовления.

1.3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТЕРИАЛА

В разделе 1.1 вычислялись нормальные напряжения на площадке, перпендикулярной оси стержня. Если выбрать другое положение площадки (рис.5), то **полное напряжение** p_0 на ней будет попрежнему направлено вдоль оси стержня x_0, но значение его будет другим: $p_0 = \frac{N}{F_\alpha}$, где $F_\alpha = \frac{F}{\cos\alpha}$ - площадь сечения, нормаль к которому наклонена к оси стержня под углом α. Это полное напряжение может быть разложено на две составляющие: **нормальное напряжение** σ (перпендикулярное площадке) и **касательное напряжение** τ (параллельное площадке). Они связаны с σ_0 выражениями

$$\sigma = p_0 \cdot \cos\alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2\alpha,$$

$$\tau = p_0 \cdot \sin\alpha = \sigma_0 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

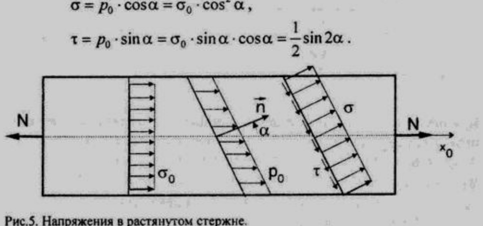


Рис.5. Напряжения в растянутом стержне.

Исследуем эти формулы. Очевидно, что $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, при этом площадки, на которых действуют наибольшее и наименьшее напряжения ($\sigma_{max} = \sigma_0$ и $\sigma_{min} = 0$) свободны от касательных напряжений.

Такие площадки называются **главными**, а напряжения σ_{max} и σ_{min} - **главными напряжениями**. Как видно, таких площадок две пары и они попарно перпендикулярны друг другу.

В дальнейшем напряжения будем изображать на рисунке одной стрелкой из соображений графической четкости. Обозначения и правило знаков для нормальных и касательных напряжений приведены на рис.6. Отметим, что нормальные напряжения обозначаются одним индексом – той оси, вдоль которой действуют напряжения, а касательные – двумя – первый обозначает нормаль к площадке, второй – ось, вдоль которой действуют напряжения.

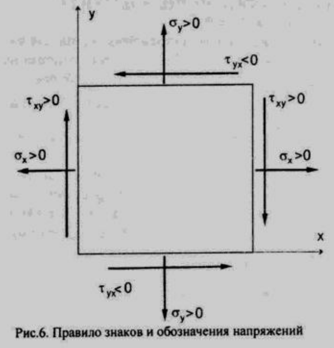


Рис.6. Правило знаков и обозначения напряжений

В общем случае объемного напряженного состояния существует три пары взаимно перпендикулярных главных площадок и три главных напряжения. Они нумеруются в порядке алгебраического убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Если только одно главное напряжение отлично от нуля, напряженное состояние называется **линейным.**

Напряжения на площадке, нормаль к которой (ось x) наклонена под углом α к σ_{max}, и на перпендикулярной ей площадке (см. рис.7) вычисляются по формулам:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}\cdot\cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2} - \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}\cdot\cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}\cdot\sin 2\alpha\,;\ \tau_{yx} = -\tau_{xy}\,.$$

Последнее выражение носит название **закон парности касательных напряжений.**

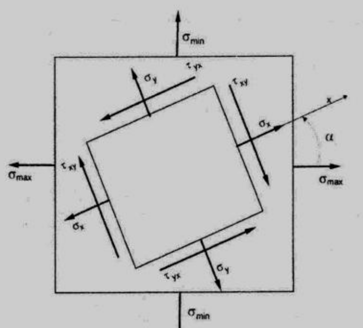


Рис.7. Определение напряжений.

Исследовав формулу для τ_{xy}, можно убедиться, что наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к главным площадкам, при этом

$$|\tau_{max}| = \tau_{xy}(\alpha = 45^{\circ}) = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2},\ \sigma(\alpha = 45^{\circ}) = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}\,.$$

Пример 1. Для растянутого участка стержня, $\sigma_x = 100$ МПа, найти напряжения на площадке, наклоненной к оси стержня под углом $\beta = 30^{\circ}$ (см. рис.8, а). Здесь $\sigma_1 = 100$ МПа, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

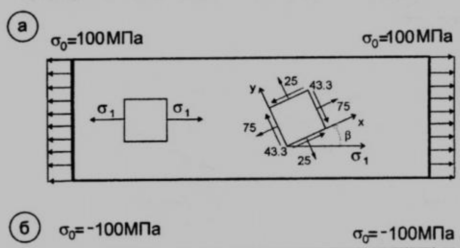


Рис.8. Примеры определения напряжений.

Угол $\alpha = \beta = 30^{\circ}$. Поэтому $\sigma_x = \frac{100}{2} + \frac{100}{2}\cos 60^{\circ} = 75$ (МПа),

$\sigma_y = \frac{100}{2} - \frac{100}{2}\cos 60^{\circ} = 25$ (МПа), $\tau_{xy} = \frac{100}{2}\sin 60^{\circ} = 43.3$ (МПа).

Пример 2. Для сжатого участка стержня, $\sigma_x = -100$ МПа, найти напряжения на площадке, наклоненной к оси стержня под углом $\beta = 30^{\circ}$ (см. рис.8, б). Здесь $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -100$ МПа. Угол $\alpha = -(90 - \beta) = -60^{\circ}$, поскольку $\sigma_{max} = \sigma_1 = 0$.

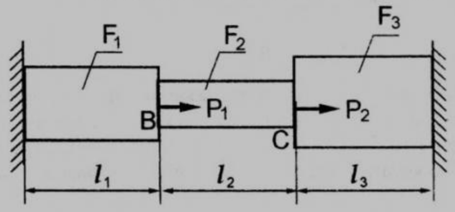
Тогда $\sigma_x = -\frac{100}{2} + \frac{0-(-100)}{2}\cos(-120^{\circ}) = -75$ (МПа),

$\sigma_y = -\frac{100}{2} - \frac{0-(-100)}{2}\cos(-120^{\circ}) = -25$ (МПа),

$\tau_{xy} = \frac{0-(-100)}{2}\sin(-120^{\circ}) = -43.3$ (МПа).

ЗАДАНИЯ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ

ЗАДАНИЕ 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ



1. Построить эпюру продольной силы N.
2. Подобрать размеры сечений F_1, F_2, F_3 из условия прочности.
3. Построить эпюру нормальных напряжений.
4. Найти перемещения сечений В и С и показать их на рисунке.
5. Считая $P_1 = P_2 = 0$, построить эпюру дополнительных нормальных напряжений, возникающих при изменении температуры на i-том участке стержня или при монтаже неточно изготовленного (длиннее или короче) стержня.
6. Вычислить и показать на рисунках нормальные и касательные напряжения на гранях элемента, вырезанного из i-того участка стержня

а) вдоль оси стержня,
б) под углом β к оси стержня,
в) на элементе, для которого максимальны касательные напряжения

При расчетах пп. 2, 4 и 5 принимается модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, коэффициент линейного расширения $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}\ 1/^\circ$.

Таблица 1

A	$F_1 : F_2 : F_3$	l_1, м	P_1^* кН	B	l_2, м	P_2^* кН	C	β, °	i	D	l_3 м	δ^{**} мм	Δt °C
0	1:1:2	1	60	0	2	50	0	15	1	0	2	0.9	-
1	1:1.5:2	0.8	-30	1	2.5	-20	1	25	2	1	1.8	-	40
2	2:1:1	1.2	40	2	3	-70	2	35	3	2	1.5	-0.8	-
3	1.5:2:1	2	-50	3	3.5	30	3	15	1	3	2.5	-	-30
4	1:2:1	0.9	20	4	4	-40	4	20	2	4	2.2	0.7	-
5	1.5:1:2	1.5	-10	5	1.8	60	5	50	3	5	1.9	-	50
6	2:1:2	1.3	70	6	2.8	-80	6	40	1	6	2.1	-0.5	-
7	1:2:1.5	1.8	-40	7	3.2	10	7	35	2	7	2.6	-	-40
8	1:2:2	1.1	30	8	3.8	-60	8	25	3	8	3.0	0.6	-
9	2:1:1.5	0.7	-60	9	2.2	40	9	40	1	9	2.8	-	20

* - знак «минус» перед значением силы означает, что она направлена в сторону, противоположную изображенной на рисунке;

** - знак «минус» перед значением неточности изготовления δ означает, что стержень изготовлен короче, чем нужно.