

# 1. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

## 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Метод начальных параметров был разработан для решения статически неопределимых задач, однако им решаются и все статически определимые задачи. Поэтому при решении задач этим методом отпадает необходимость их разделения на статически определимые и статически неопределимые.

В основу теории положено дифференциальное уравнение изгиба призматической балки

$$EJV'''' = q(x), \quad (1.1)$$

где  $E$  - модуль продольной упругости;  $I$  - осевой момент инерции сечения;  $V$  - прогиб балки;  $q(x)$  - интенсивность внешней нагрузки.

Задачу решают, приняв следующие предположения:

1. балка находится в одноосном напряженном состоянии, продольные волокна балки не давят друг на друга:  $\sigma_x \neq 0; \sigma_y = \sigma_z = 0$  (здесь  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  - нормальные напряжения по осям  $x, y$  и  $z$ );

2. деформации происходят в пределах применимости закона Гука  $\sigma_x = E\varepsilon_x$ , где  $\varepsilon_x$  - относительные продольные деформации по оси  $x$ ;

3. справедлива гипотеза плоских сечений - сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, а напряжения в пределах сечений распределяются равномерно;

4. прогибы балок малы;

5. изгибающие моменты и перерезывающие силы связаны между собой дифференциальными зависимостями

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dN}{dx} = -q(x) \quad (1.2)$$

$$EJV'' = -M(x); \quad (1.3)$$

$$EJV''' = -N(x), \quad (1.4)$$

где  $M$  и  $N$  – изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки.

## 1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ БАЛКИ. ПОНЯТИЕ О НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ

Рассмотрим балку, лежащую на двух опорах и нагруженную силой  $q(x)$ . Прогиб балки от этой силы обозначим  $V(x)$  (рис.1.1).

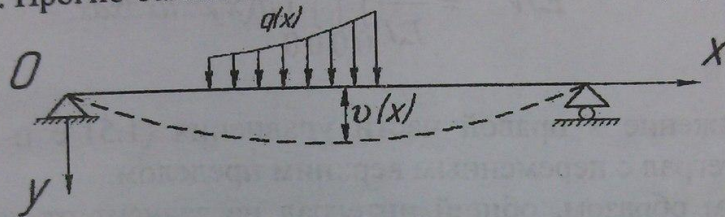


Рис.1.1

Решение основного дифференциального уравнения изгиба балки без продольной силы и упругого основания (1.1) имеет вид

$$V(x) = V_{0И} + V_{ч.р},$$

где  $V_{0И}$  – общий интеграл;  $V_{ч.р}$  – частное решение.

Общий интеграл есть решение соответствующего однородного уравнения, когда  $q(x) = 0$ , т.е.  $EJV''' = 0$ . Тогда, сократив на  $EJ$ , получим  $V''' = 0$ . Интегрируем это уравнение четыре раза:

$$V''' = C_3;$$

$$V'' = C_3x + C_2;$$

$$V' = C_3 \frac{x^2}{2!} + C_2x + C_1;$$

$$V_{0.и} = C_3 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_1x + C_0,$$

где  $C_3, C_2, C_1$  и  $C_0$  – произвольные постоянные интегрирования, которые могут быть и положительными, и отрицательными.

Чтобы найти частное решение уравнения (1.1), представим его в виде

$$V''' = \frac{1}{EJ} q(x)$$

и четыре раза его интегрируем. Для призматической балки, выполненной из одного материала, жесткость  $EI$  постоянная, поэтому ее можно вынести за знак интеграла:

$$EJV'''' = \frac{1}{EJ} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx dx. \quad (1.5)$$

Выражение в правой части уравнения (1.5) есть четырехкратный интеграл с переменным верхним пределом.

Таким образом, общий интеграл не зависит от нагрузки, а частное решение зависит от вида внешней нагрузки.

Прогиб любой балки может быть записан в следующей форме:

$$V = V_{ч.р} + V_{0и} \frac{1}{EJ} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx dx + C_3 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_1 x + C_0. \quad (1.6)$$

Задача может считаться решенной, если будут определены четыре произвольных постоянных:  $C_0, C_1, C_2$  и  $C_3$ .

Согласно уравнениям (3) и (4) можно написать

$$M = -EJV'''; \quad N = -EJV'''. \quad (1.7)$$

Чтобы решить, можно ли определить физический смысл произвольных постоянных, рассмотрим балку с нагрузкой  $q(x)$  (рис.1.2).

Определяя прогиб  $V$  в начале координат при  $x = 0$  по формуле (1.6) получим  $V_0 = C_0$ . Таким образом,  $C_0 = V_0$  есть прогиб в начале координат.

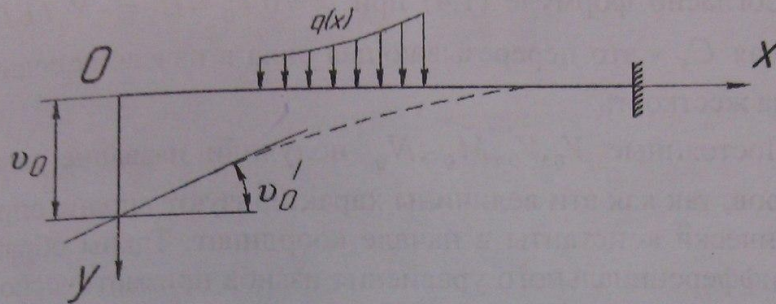


Рис.1.2

Проведем касательную и горизонталь к линии прогибов в начале координат (рис.1.2). Продифференцируем уравнение (1.6):

$$V' = \frac{1}{EJ} \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx + C_3 \frac{x^2}{2!} + C_2 x + C_1,$$

и применим эту формулу для определения угла поворота в начале координат. Получим, что при  $x=0$   $V'_0 = C_1$ . Таким образом,  $C_1 = V'_0$  есть тангенс угла наклона касательной в начале координат.

Еще раз продифференцируем:

$$V'' = \frac{1}{EJ} \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx + C_3 x + C_2. \quad (1.8)$$

Итак, при  $x=0$   $V''_0 = C_2$ . С учетом зависимости (1.3) можно записать

$$V''_0 = -\frac{M_0}{EJ} = C_2.$$

Следовательно, постоянная  $C_2$  - это изгибающий момент в начале координат, деленный на жесткость. Установим физический смысл постоянной  $C_3$ , еще раз продифференцировав уравнение (1.8):

$$V''' = \frac{1}{EJ} \int_0^x q(x) dx + C_3.$$

Согласно формуле (1.4) при  $x=0$   $V_0'' = C_3 = -N_0/EJ$ . Итак, постоянная  $C_3$  - это перерезывающая сила в начале координат, деленная на жесткость.

Постоянные  $V_0, V_0', M_0, N_0$  получили название начальных параметров, так как эти величины характеризуют вполне определенные физические константы в начале координат. Таким образом, решение дифференциального уравнения изгиба призматической балки в методе начальных параметров имеет вид

$$V = \frac{1}{EJ} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx dx - \frac{N_0}{EJ} \frac{x^3}{3!} - \frac{M_0}{EJ} \frac{x^2}{2!} - V_0' x + V_0.$$

Частное решение дифференциального уравнения изгиба балки при различных видах нагрузки имеет вид

$$V_{ч.р.} = \frac{1}{EJ} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx dx.$$

Результаты решения этого уравнения для различных видов внешних нагрузок сведены в табл.1.1.

Найдем уравнение для прогиба в случае сплошной нагрузки на балку (рис.1.3).

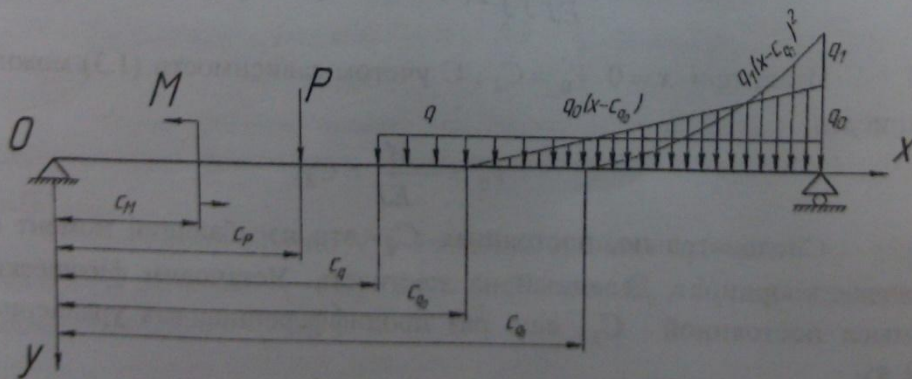


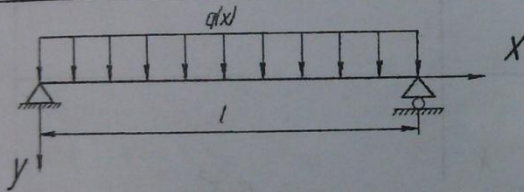
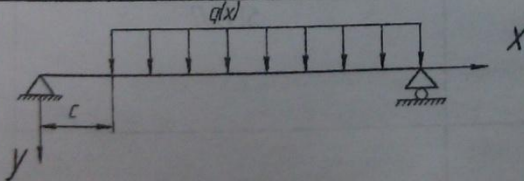
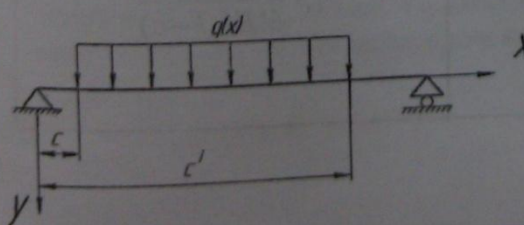
Рис.1.3

В силу линейности основного дифференциального уравнения справедлив принцип наложения, поэтому полный прогиб будет выражаться зависимостью

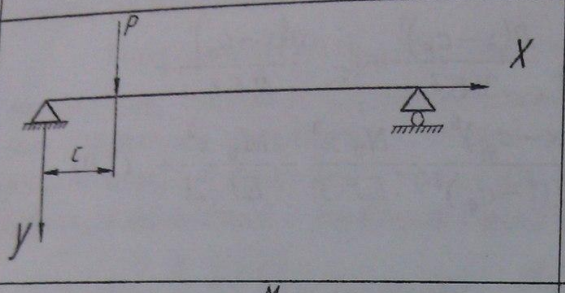
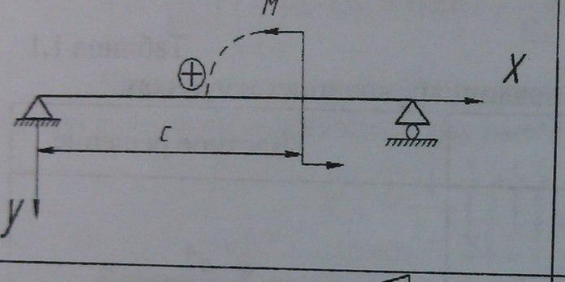
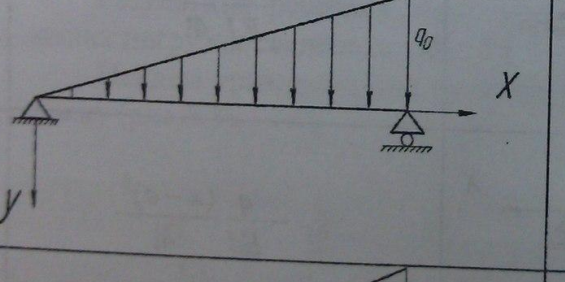
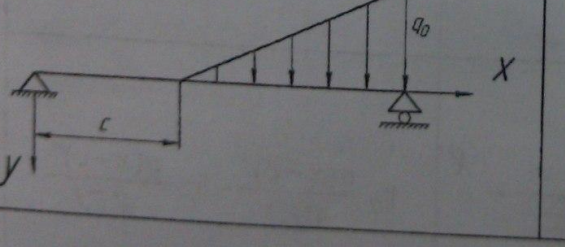
$$V = \parallel_{c_M} \frac{M(x-c_M)^2}{2! EJ} + \parallel_{c_P} \frac{P(x-c_P)^3}{3! EJ} + \parallel_{c_q} \frac{q(x-c_q)^4}{4! EJ} + \\ + \parallel_{c_{q_0}} \frac{q_0(x-c_{q_0})^5}{5! EJ(l-c_{q_0})} + \parallel_{c_{q_1}} \frac{q_1(x-c_{q_1})^6}{6! EJ(l-c_{q_1})^2} - \frac{N_0 x^3}{EJ 3!} - \frac{M_0 x^2}{EJ 2!} + (1.9) \\ + V_0' x + V_0.$$

Таблица 1.1

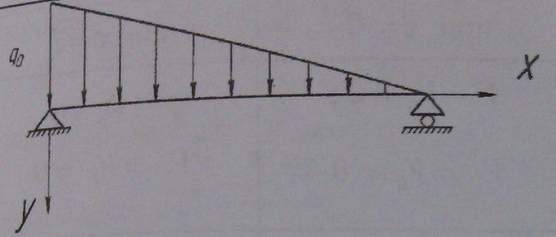
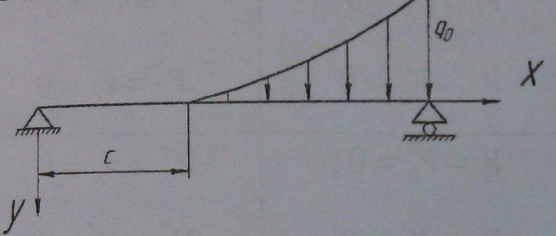
Частные решения при различных внешних нагрузках

Вид нагрузки	Частное решение
	$\frac{q}{EJ} \frac{x^4}{4!}$
	$\parallel_c - \frac{q}{EJ} \frac{(x-c)^4}{4!}$
	$\parallel_c \frac{q(x-c)^4}{4! EJ} - \parallel_{c'} \frac{q(x-c)^4}{4! EJ}$

Продолжение таблицы 1.1

Вид нагрузки	Частное решение
	$\ _c \frac{P(x-c)^3}{3!EJ}$
	$\ _c \frac{M(x-c)^2}{2!EJ}$
	$\frac{q_0 x^5}{5!EJ}$
	$\ _c \frac{q_0(x-c)^5}{5!EJ(l-c)}$

Окончание таблицы 1.1

Вид нагрузки	Частное решение
	$\frac{q(x-c)^4}{4!EJ} - \frac{q_0 x^5}{5!EJ}$
	$\parallel_c \frac{q_1(x-c_{q_1})^6}{6!EJ(l-c_{q_1})^2}$

Значок  $\parallel_c$ , введенный И.Г. Бубновым, означает, что при определении прогибов в интервале  $0 - c$  частное решение принимается равным нулю, а при определении прогибов на втором участке при  $x > c$  этот член учитывается.

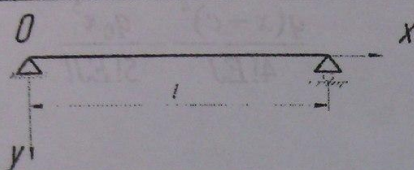
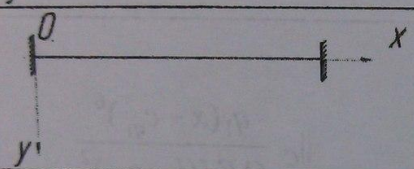
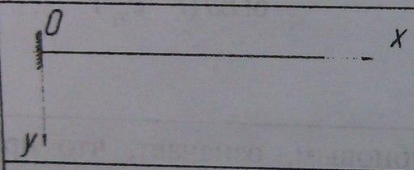
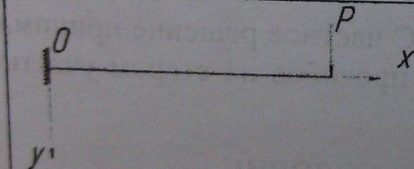
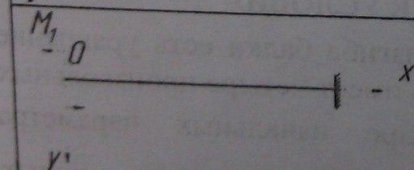
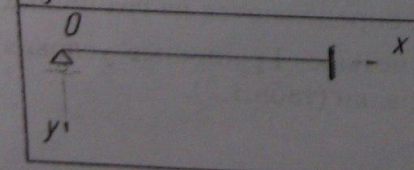
### 1.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Дифференциальное уравнение изгиба балки есть уравнение четвертого порядка, его общее решение имеет четыре произвольных постоянных  $C_0, C_1, C_2, C_3$  или четыре начальных параметра  $V_0, V_0', M_0$  и  $N_0$ . Это четыре постоянных определяются из граничных условий, которых также должно быть четыре. Граничные условия выписываются по две на каждом конце балки (табл. 1.2).



Граничные условия для балок на жестких опорах

Таблица 1.2

Вид балки	Граничные условия	
	при $x = 0$	при $x = l$
	$V = V_0 = 0;$ $V'' = V_0'' = 0$	$V = V_l = 0;$ $V'' = V_l'' = 0$
	$V = V_0 = 0;$ $V' = V_0' = 0$	$V = V_l = 0;$ $V' = V_l' = 0$
	$V = V_0 = 0;$ $V' = V_0' = 0$	$V'' = V_l'' = 0;$ $V''' = V_l''' = 0$
	$V = V_0 = 0;$ $V' = V_0' = 0$	$V'' = V_l'' = 0;$ $V''' = V_l''' = -\frac{P}{EJ}$
	$V''' = V_0''' = 0;$ $V'' = V_0'' = -\frac{M_1}{EJ}$	$V = V_l = 0;$ $V' = V_l' = 0$
	$V = V_0 = 0;$ $V'' = V_0'' = 0$	$V = V_l = 0;$ $V' = V_l' = 0$

#### 1.4. ПРИМЕР И ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТА

Рекомендуемый порядок выполнения расчета следующий:

1. строят расчетную схему балки и наносят на нее все необходимые размеры;

2. составляют уравнение упругой линии балки, удерживая в нем необходимые члены;
3. выписывают четыре граничных условия для заданной балки и подставляют их в уравнение упругой линии;
4. определяют значения начальных параметров;
5. подставляют найденные начальные параметры в уравнение упругой линии и проверяют правильность их вычисления;
6. дифференцируют уравнения упругой линии и находят зависимость для построения эпюр углов поворота сечений, изгибающих моментов и перерезывающих сил по длине балки;
7. строят эпюры по длине балки;
8. производят проверку прочности и жесткости балки или подбирают ее сечение.

Рассмотрим однопролетную статически неопределимую балку, нагруженную силой  $P$  (рис.4).

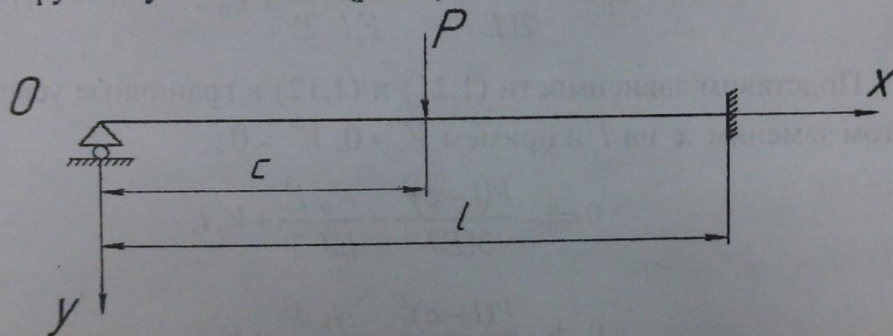


Рис.1.4

Выпишем для нее уравнение упругой линии (1.9), удерживая в нем необходимые члены, из частного решения остается

$$\|_c \frac{P(x-c)^3}{3!EJ}$$

Уравнение упругой линии имеет вид

$$V = \|_c \frac{P(x-c)^3}{3!EJ} - \frac{N_0 x^3}{EJ 3!} - \frac{M_0 x^2}{EJ 2!} + V_0' x + V_0. \quad (1.10)$$

Выпишем четыре граничных условия (см. табл.2) для балки: при  $x=0$   $V = V_0 = 0$ ,  $V' = V_0' = 0$ ;

при  $x = l$   $V = V_l = 0$ ,  $V' = V'_l = 0$ .

В общем интеграле два начальных параметра оказываются равным нулю:  $V_0 = 0$  и  $M_0 = -EJV_0'' = 0$ . Следовательно, уравнение упругой линии (10) будет иметь вид

$$V = \int_c \frac{P(x-c)^3}{3!EJ} - \frac{N_0}{EJ} \frac{x^3}{3!} + V_0' x. \quad (1.11)$$

Задача будет считаться решенной, если будут найдены два оставшихся начальных параметра  $V_0'$  и  $N_0$ . Эти начальные параметры определяются из двух граничных условий на правом конце балки при  $x = l$ .

Найдем первую производную

$$V' = \int_c \frac{P(x-c)^2}{2!EJ} - \frac{N_0}{EJ} \frac{x^2}{2!} + V_0'. \quad (1.12)$$

Подставим зависимости (1.11) и (1.12) в граничные условия, при этом заменим  $x$  на  $l$  и примем  $V = 0$ ,  $V' = 0$ :

$$0 = \int_c \frac{P(l-c)^3}{3!EJ} - \frac{N_0}{EJ} \frac{l^3}{3!} + V_0' l;$$

$$0 = \int_c \frac{P(l-c)^2}{2!EJ} - \frac{N_0}{EJ} \frac{l^2}{2!} + V_0',$$

где значок можно опустить, так как он показывает, что соответствующий член учитывается при  $x > c$ , а в нашем случае  $x = l$ , т.е. известно  $x = l > c$ .

Запишем уравнения в нормальной форме:

$$0 = \frac{P(l-c)^3}{3!EJ} - \frac{N_0}{EJ} \frac{l^3}{3!} + V_0' l; \quad (1.13)$$

$$0 = \frac{P(l-c)^2}{2!EJ} - \frac{N_0}{EJ} \frac{l^2}{2!} + V_0'. \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.14) следует, что

$$V' = \frac{N_0 l^2}{EJ 2!} - \frac{P(l-c)^2}{2! EJ}. \quad (1.15)$$

Подставим значение  $V'_0$  в уравнение (1.13):

$$\frac{P(l-c)^3}{3! EJ} - \frac{N_0 l^3}{EJ 3!} + \frac{N_0 l^3}{EJ 2!} - \frac{P(l-c)^2 l}{2! EJ} = 0.$$

После приведения подобных

$$\frac{N_0 l^3}{EJ} \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{P(l-c)^2 l}{2! EJ} - \frac{P(l-c)^3}{3! EJ}$$

получим

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{3P(l-c)^2}{2l^2} - \frac{P(l-c)^3}{2l^3} = \frac{P(l-c)^2}{2l^2} \left( 3 - \frac{l-c}{l} \right) = \\ &= \frac{P(l-c)^2}{2l^2} \left( 2 + \frac{c}{l} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подставим зависимость (1.16) в уравнение (1.15), найдем

$$\begin{aligned} V'_0 &= \frac{P(l-c)^2}{2l^2} \left( 2 + \frac{c}{l} \right) \frac{l^2}{2EJ} - \frac{P(l-c)^2}{2EJ} = \\ &= \frac{P(l-c)^2}{2EJ} \left[ \left( 2 + \frac{c}{l} \right) \frac{1}{2} - 1 \right] = \frac{P(l-c)^2}{2! EJ} \frac{c}{2l}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Теперь подставим найденные параметры в  $V'_0$  и  $N_0$  в уравнение упругой линии (1.10):

$$V = \int_c^x \frac{P(x-c)^3}{3! EJ} - \frac{P(l-c)^2}{2l} \left( 2 + \frac{c}{l} \right) \frac{x^3}{3! EJ} + \frac{P(l-c)^2}{2! EJ} \frac{c}{2l} x,$$

и вынесем за скобку члены таким образом, чтобы в выражении в скобках остались безразмерные величины:

$$V = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \int_c \frac{(x-c)^3}{l^3} - \frac{(l-c)^2 \left(2 + \frac{c}{l}\right) x^3}{2l^5} + \frac{3(l-c)^2 \left(\frac{c}{2l}\right) x}{l^3} \right]. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.18) найдем прогиб, когда сила  $P$  приложена посередине пролета, т.е.  $c = l/2$ :

$$V = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \int_c \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{l^3} - \frac{5x^3}{16l^3} + \frac{3x}{16l} \right]. \quad (1.19)$$

Проверим, будут ли прогибы равны нулю при  $x = 0$  и при  $x = l$ . Для этого подставим в уравнение (1.19) сначала  $x = 0$ , а затем  $x = l$ . Получим соответственно

$$V = \frac{Pl^3}{3!EJ} [0 - 0 + 0] = 0;$$

$$V = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^3}{l^3} - \frac{5l^3}{16l^3} + \frac{3l}{16l} \right] = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{3}{16} \right] = 0.$$

Итак, заданные граничные условия выполняются. Дифференцируем уравнение (19) три раза:

$$V' = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \int_c \frac{3\left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{l^3} - \frac{15x^2}{16l^3} + \frac{3}{16l} \right]; \quad (1.20)$$

$$V'' = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \int_C \frac{6\left(x - \frac{l}{2}\right)}{l^3} - \frac{30x}{16l^3} \right]; \quad (1.21)$$

$$V''' = \frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \int_C \frac{6}{l^3} - \frac{30}{16l^3} \right]. \quad (1.22)$$

Теперь подставим выражения для  $V''$  и  $V'''$  в формулу (1.7):

$$M = -\frac{Pl^3}{3!} \left[ \int_C \frac{6\left(x - \frac{l}{2}\right)}{l^3} - \frac{30x}{16l^3} \right] = -P \left[ \int_C \left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{5}{16}x \right]; \quad (1.23)$$

$$N = -\frac{Pl^3}{3!EJ} \left[ \int_C \frac{6}{l^3} - \frac{30x}{16l^3} \right] = -P \left[ \int_C 1 - \frac{5}{16}x \right]. \quad (1.24)$$

По зависимостям (1.19), (1.20), (1.23) и (1.24) строим эпюры  $V$ ,  $V'$ ,  $M$  и  $N$  по длине заданной балки (рис.1.5).

Проверку балки на прочность и жесткость производят по известным формулам сопротивления материалов:

а) по условию прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z^{max}|}{I_z} Y_{max} \leq [\sigma_H];$$

$$\tau_{max} = \frac{|N_y^{max}| S_z^{пол.сеч}}{I_z b} Y_{max} \leq [\tau_H];$$

б) по условию жесткости

$$V_{max} \leq [V], \text{ где } [V] = \left( \frac{1}{300} \div \frac{1}{1000} \right) l.$$

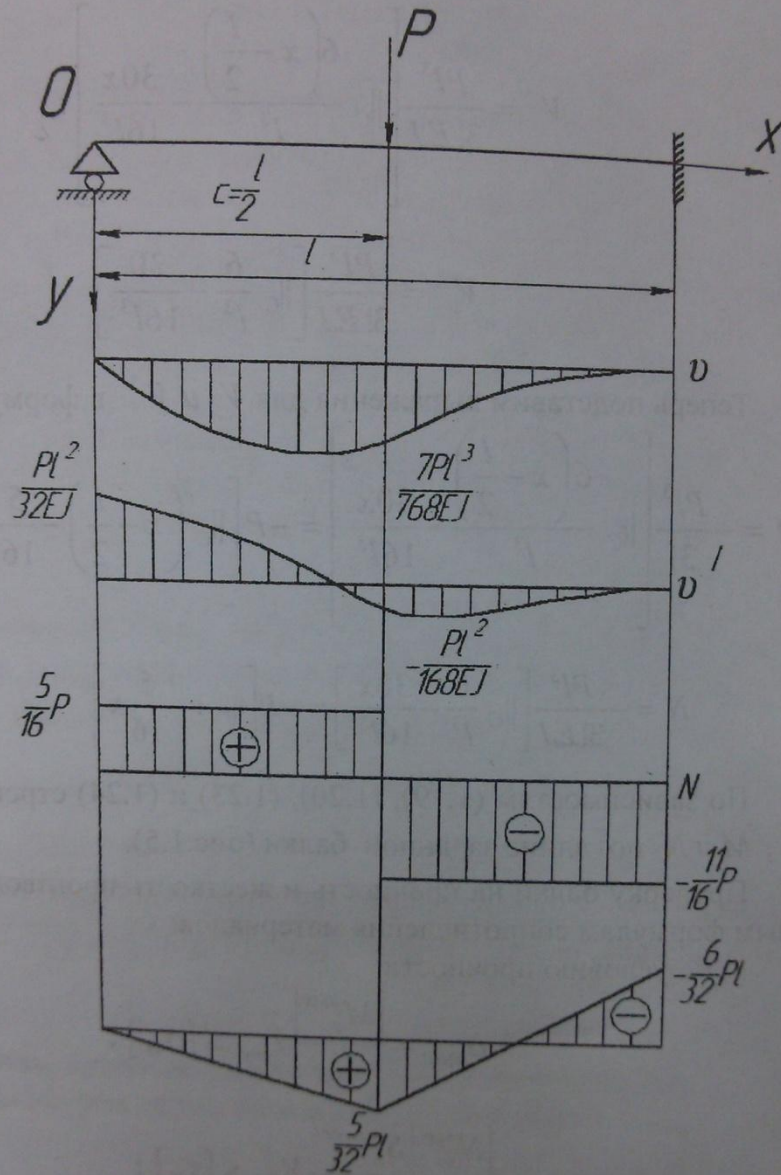


Рис. 1.5

Варианты заданий (схемы и исходные данные) выдаются преподавателям каждому студенту отдельно.

Исходные данные для задания для РГР№1  
по дисциплине «Сопротивление материалов»  
для групп БТС-12, ОП-12

Вариант	P, кН	M, кН·м	q <sub>0</sub> , кН/м	c <sub>p</sub> , м	c <sub>m</sub> , м	c <sub>q0</sub> , м
1	5	10	5	8	4	0
2	10	20	10	3	4	6
3	15	30	5	9	3	6
4	20	40	15	6	3	8
5	10	20	5	6	10	4
6	20	40	10	6	4	0
7	15	30	5	3	6	8
8	5	10	15	4	9	0
9	5	10	10	3	12	6
10	15	10	10	4	2	0
11	10	20	5	1,5	2	3
12	20	15	5	4,5	1,5	3
13	20	5	5	3	1,5	4
14	20	5	10	3	5	2
15	10	15	5	3	2	0
16	5	10	15	1,5	3	4
17	5	20	5	2	4,5	0
18	10	15	10	1,5	6	3
19	15	40	5	0,8	0,4	0
20	15	40	15	0,3	0,4	0,6
21	10	40	30	0,9	0,3	0,6
22	20	20	5	0,6	0,3	0,8
23	15	10	30	0,6	1	0,4
24	20	10	10	0,6	0,4	0
25	20	20	5	0,3	0,6	0,8
26	20	30	15	0,4	0,9	0
27	10	15	10	0,3	1,2	0,6