Лабораторная работа №5. Интерполяция табличных функций

Цель работы - выполнить интерполяцию табличной функции с помощью классического полинома, многочлена Лагранжа и многочлена Ньютона. Вычислить значение табличной функции точках, находящихся в координатах $x=(x_{n+1}+x_n)/2$, где n - номер узла табличной функции.

На практике часто возникает задача замены полученной экспериментально табличной функции вида

X	1	2	3	4	5
Y	1.3	1.7	1.5	2.6	3

аналитической функцией вида $y=f(x)$ которая на интервале $[x_0, x_n]$ близка к табличной функции. Такая потребность возникает при необходимости вычисления величины Y в точках X, для которых не производились измерения (например, для точки $X=1.5$), для математической обработки табличных функций (например, их дифференцирования или интегрирования, вычисления координат экстремума)

Рассмотрим три способа интерполяции табличной функции

x	-2,00	-1,60	-1,20	-0,80	-0,40	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60
y	-16,30	-15,59	-14,57	-13,06	-10,85	-8,00	-5,15	-2,94	-1,43	-0,41

1. С помощью классического полинома;
2. С помощью многочлена Лагранжа;
3. С помощью многочлена Ньютона.

Интерполяция классическим полиномом

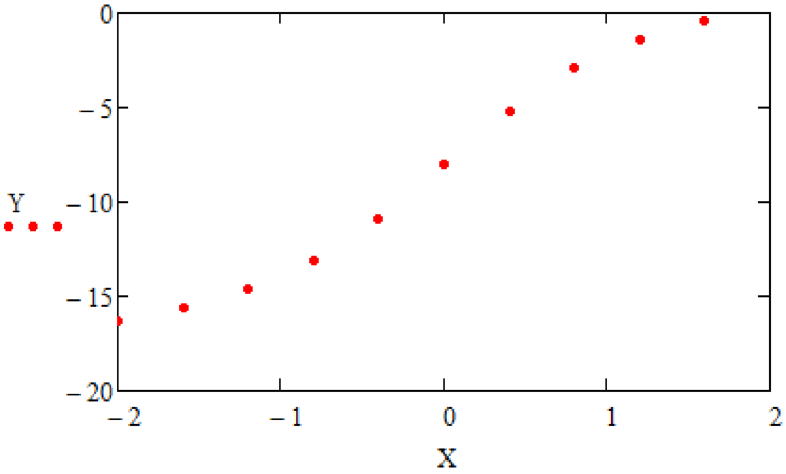
1. Зададим координаты узлов табличной функции с помощью двух вектор-столбцов X и Y. Перед этим присвоим системной переменной ORIGIN значение 1;

ORIGIN := 1

$$Y := \begin{pmatrix} -16.30 \\ -15.59 \\ -14.57 \\ -13.06 \\ -10.85 \\ -8 \\ -5.15 \\ -2.94 \\ -1.43 \\ -0.41 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} -2 \\ -1.6 \\ -1.2 \\ -0.8 \\ -0.4 \\ 0 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

2. Построим узлы табличной функции на X-Y графике. Для этого вместо переменной x на оси графика введем имя столбца X, а вместо наименования функции по оси y - имя столбца Y. Для того, чтобы заменить получившуюся на графике ломаную линию точками, надо зайти в меню форматирования графика и

на вкладке «Трассировка» выбрать в столбце «Тип графика» - точки, а в столбце «Ширина символа» указать значение 3.



3. Проведем интерполяцию табличной функции полиномом второй степени (функцией вида $y = a x^2 + b x + c$). Для этого требуется определить значения коэффициентов a, b и c. Для их вычисления требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a x_1^2 + b x_1 + c \\ y_2 = a x_2^2 + b x_2 + c \\ y_3 = a x_3^2 + b x_3 + c \end{cases},$$

где x_n, y_n - координаты узлов трех точек табличной функции. Решим такую систему в MathCAD с помощью вычислительного блока Given-Find

$a := 0 \quad b := 0 \quad c := 0$

Given

$$a\cdot(-2)^2 - 2\cdot b + c = -16.3$$

$$a\cdot(-1.6)^2 - b\cdot 1.6 + c = -15.59$$

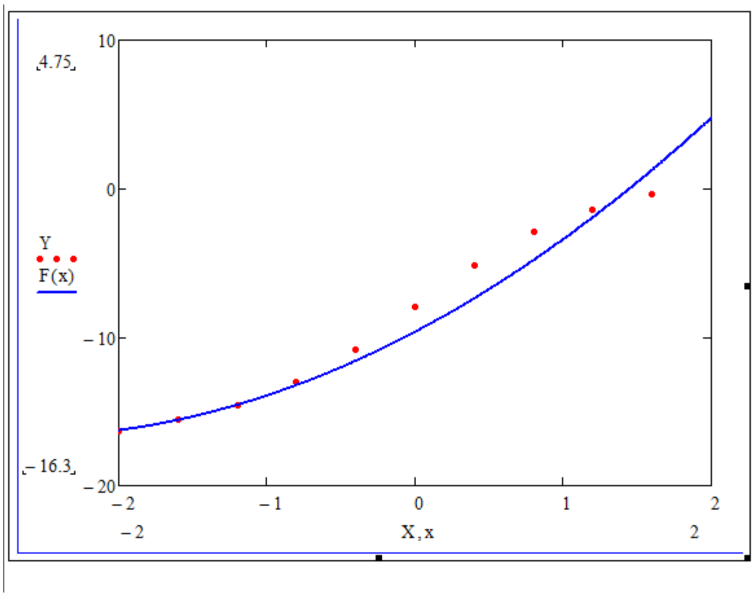
$$a\cdot(-1.2)^2 - b\cdot 1.2 + c = -14.57$$

$$\mathrm{Find}(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0.969 \\ 5.262 \\ -9.65 \end{pmatrix}$$

4. Подставляя полученные коэффициенты в функцию интерполяционного полинома, получаем

$$F(x) := 0.969\cdot x^2 + 5.262\cdot x - 9.65$$

5. Построим график этой функции, и посмотрим как ее точки расположены относительно точек табличной функции



Из графика видно, что интерполяционная функция хорошо описывает табличную функцию в области первых трех узлов, координаты которых были использованы для вычисления коэффициентов полинома, но в остальных точках имеет место большое расхождение результатов. Такой типа интерполяции называется локальным.

Интерполяция многочленом Лагранжа

Интерполяция многочленом Лагранжа является наиболее общим способом интерполяции. Сам многочлен представляет из себя функцию вида

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}y_i,$$

Где $P_i(x_i)=\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$ - коэффициенты Лагранжа.

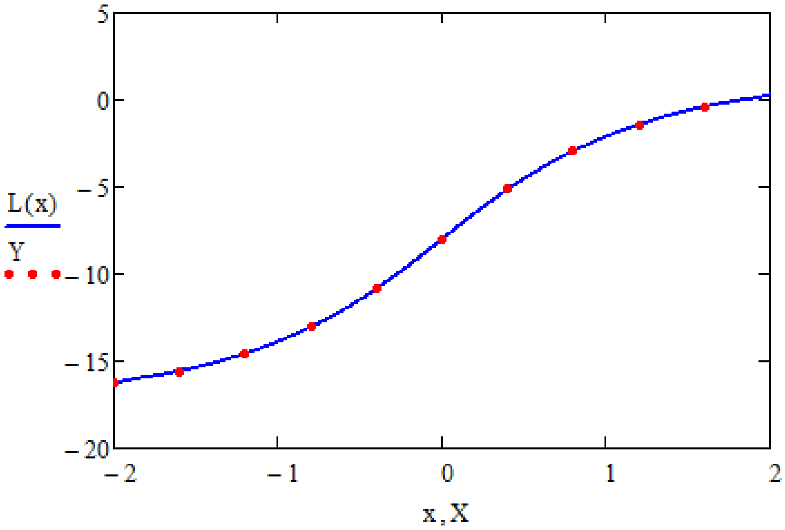
Максимальная степень многочлена n не может быть больше количества точек табличной функции минус единица. Поэтому примем n = 9.

1. Вычислим коэффициенты Лагранжа, воспользовавшись выражением $P_i(x)=\prod_{j=0}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$. Так как в MathCAD нумерация элементов матриц начинается с 1, то n необходимо принять равным 10. Программный блок, вычисляющий i-й коэффициент Лагранжа, и сам многочлен приведены ниже.

$$P(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..10 \\ \quad P_i \leftarrow \prod_{j=1}^{10} \left[\begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ \dfrac{(x - X_j)}{(X_i - X_j)} & \text{otherwise} \end{cases} \right] \\ P \end{array} \right.$$

$$L(x) := \sum_{i=1}^{10} \left(P(x)_i \cdot Y_i\right)$$

2. Построим график полученной функции, и посмотрим, как он будет проходить относительно узлов табличной функции



В этом случае полученная кривая точно проходит через все узлы табличной функции.

Интерполяция многочленом Ньютона

Другим вариантом интерполяционной функции является многочлен Ньютона, имеющий вид

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

где $\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i, i = 0, n - m$ - конечные разности порядка m, $h = x_{i+1} - x_i = const$ - шаг интерполирования. Максимальная степень многочлена равна количеству узлов табличной функции минус единица, т.е. 9. Т.к нумерация элементов массивов начинается с 1, то примем n = 10.

1. Вычислим матрицу конечных разностей, составив следующий программный модуль

$$n := 10$$

$$\Delta Y := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..n-1 \\ \quad \Delta_{k,1} \leftarrow Y_{k+1} - Y_k \\ \text{for } j \in 2..n-1 \\ \quad \text{for } i \in 1..n-j \\ \quad\quad \Delta_{i,j} \leftarrow \Delta_{i+1,j-1} - \Delta_{i,j-1} \\ \Delta \end{array} \right.$$

$$\Delta Y = \begin{pmatrix} 0.71 & 0.31 & 0.18 & 0.03 & -0.3 & -10\times10^{-3} & 0.9 & -1.79 & 1.79 \\ 1.02 & 0.49 & 0.21 & -0.27 & -0.31 & 0.89 & -0.89 & -1.044\times10^{-14} & 0 \\ 1.51 & 0.7 & -0.06 & -0.58 & 0.58 & 2.442\times10^{-15} & -0.89 & 0 & 0 \\ 2.21 & 0.64 & -0.64 & 0 & 0.58 & -0.89 & 0 & 0 & 0 \\ 2.85 & 0 & -0.64 & 0.58 & -0.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.85 & -0.64 & -0.06 & 0.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.21 & -0.7 & 0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.51 & -0.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Разности получаются при вычитании соседних элементов столбцов)

2. Вычислим множители $P(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$

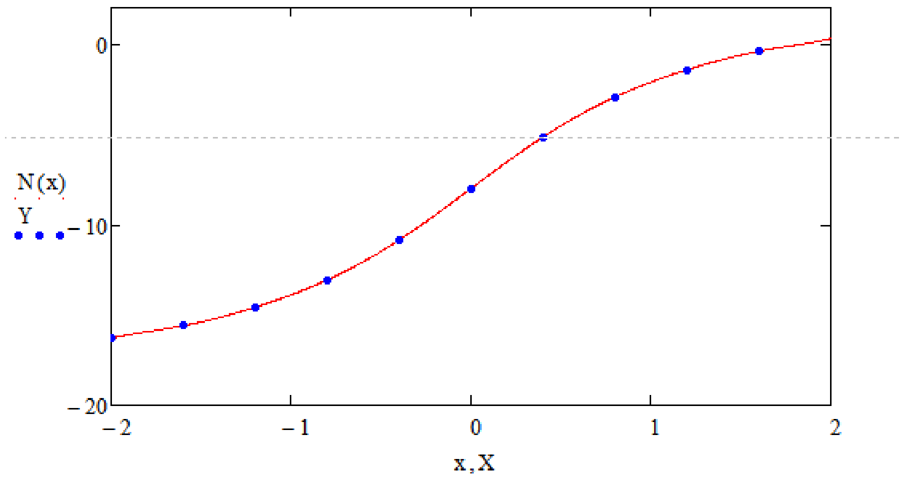
$$P(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad P_i \leftarrow \prod_{j=1}^{i} (x - X_j) \\ P \end{array} \right.$$

3. Зададим h как разность двух соседних значений X из таблицы и запишем получившийся многочлен

$$h := 0.4$$

$$N(x) := Y_1 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\Delta Y_{1,i} \cdot P(x)_i)}{i! \cdot h^i} \right]$$

4. Результат построения графика интерполяционной функции приведен ниже



Вычислим значения табличной функции в промежуточных точках, пользуясь многочленами Лагранжа и Ньютона.

$$j := 1..n-1$$

$$X1_j := \frac{(X_{j+1} + X_j)}{2}$$

$L(X1_j) =$

-15.924
-15.139
-13.886
-12.054
-9.475
-6.525
-3.946
-2.114
-0.861

$N(X1_j) =$

-15.924
-15.139
-13.886
-12.054
-9.475
-6.525
-3.946
-2.114
-0.861

Варианты заданий

1	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
	y	0,81	0,97	1,17	1,40	1,67	2,00	2,39	2,87	3,43	4,11
2	x	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
	y	12,50	10,00	8,00	6,40	5,12	4,10	3,28	2,62	2,10	1,68
3	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	-4,91	-2,83	-1,61	-0,75	-0,08	0,47	0,93	1,33	1,68	2,00

4	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	0,00	0,01	0,04	0,10	0,19	0,32	0,51	0,77	1,09	1,50
5	x	-3,00	-2,70	-2,40	-2,10	-1,80	-1,50	-1,20	-0,90	-0,60	-0,30
	y	47,00	38,45	30,80	24,05	18,20	13,25	9,20	6,05	3,80	2,45
6	x	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50
	y	143,00	86,13	48,00	24,88	13,00	8,63	8,00	7,38	3,00	-8,88
7	x	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80	2,05	2,30	2,55
	y	6,00	4,18	3,50	3,14	2,92	2,77	2,67	2,59	2,52	2,47
8	x	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
	y	2,24	1,50	1,01	0,67	0,45	0,30	0,20	0,14	0,09	0,06
9	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	0,72	1,29	2,30	4,11	7,36	13,17	23,55	42,13	75,37	134,82
10	x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
	y	-3,69	-2,83	-2,16	-1,61	-1,15	-0,75	-0,40	-0,08	0,21	0,47
11	x	0,08	0,20	0,32	0,44	0,56	0,68	0,80	0,92	1,04	1,16
	y	0,00	0,01	0,05	0,13	0,26	0,47	0,77	1,17	1,69	2,34
12	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85
	y	-36,29	-34,10	-30,64	-25,91	-19,91	-12,65	-4,11	5,68	16,75	29,08
13	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
	y	13,00	10,56	9,08	8,32	8,04	8,00	7,96	7,68	6,92	5,44
14	x	0,38	0,58	0,78	0,98	1,18	1,38	1,58	1,78	1,98	2,18
	y	-1,16	-0,07	0,46	0,78	0,98	1,13	1,24	1,33	1,39	1,45
15	x	2,00	2,60	3,20	3,80	4,40	5,00	5,60	6,20	6,80	7,40
	y	1,11	1,41	1,80	2,29	2,91	3,69	4,70	5,97	7,59	9,65
16	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	-0,85	-1,40	-2,30	-3,78	-6,21	-10,20	-16,77	-27,55	-45,27	-74,39