

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

В задачах 1-10 найти первообразную функцию и упростить полученное выражение. Результат проверить дифференцированием.

1. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx,$ б) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}} dx,$

в) $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx,$ г) $\int \frac{2x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}} dx.$

2. а) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$ б) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx,$

в) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx,$ г) $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$

В задачах 11-20 вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница.

11. $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx.$

12. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}.$

13. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}.$

14. $\int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{x + 2}.$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

16. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

В задачах 21–30 построить чертеж и найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

21. $y^2 = x, y = 1, x = 8.$

22. $y = \operatorname{tg}x, \text{ ось абсцисс}, x = \pi/3.$

23. $y^2 = 2px, x^2 = 2py.$

24. $y = x^2, y = x^2 + 2, y = 2x.$

25. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x = 2a.$

В задачах 31–40 вычислить объем тел вращения.

31. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением параболы $y^2 = 4x$ вокруг своей оси, и плоскостью, перпендикулярной к его оси и отстоящей от вершины параболы на расстояние, равное единице.

32. Найти объем эллипсоида вращения, полученного в результате вращения эллипса с большой полуосью a и малой b вокруг большой оси.

33. Найти объем эллипсоида вращения, полученного в результате вращения эллипса с большой полуосью a и малой b вокруг малой оси.

34. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной следующими линиями: $x^2 - y^2 = a^2$ и $x = a + h$ ($h > 0$).

В задачах 41-50 найти несобственные интегралы или показать их расходимость.

41. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

42. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

43. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

44. $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$

45. $\int_0^1 x \ln x \, dx$

46. $\int_2^{\infty} x \ln x \, dx$

47. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx$

48. $\int_0^{\infty} e^{-2x} \, dx$

49. $\int_0^{\frac{1}{2}} x \ln^2 x \, dx$

50. $\int_2^{\infty} x \ln^2 x \, dx$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В задачах 51-60 решить дифференциальные уравнения.

51. $\operatorname{tg} x \sin^2 y \, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y \, dy = 0$

52. $xy' - y = y^2$

53. $xyy' = 1 - x^2$

54. $y - xy' = a(1 + x^2 y)$

55. $3e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$

56. $y' \operatorname{tg} x = y$

57. $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0$

58. $y' \sin x = y \ln y$

59. $y' = e^{\frac{1}{x}} + \frac{y}{x}$

60. $(x - y)y \, dx - x^2 \, dy = 0$

В задачах 61–70 найти частное или общее решение дифференциального уравнения.

61. $y' - \frac{y}{x} = x$ 62. $y' + 2\frac{y}{x} = x^3$ 63. $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$.

64. $xy' + y - e^x = 0$, $y = b$ при $x = a$. 65. $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$,
 $y = 0$ при $x = 0$.

66. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$, $y = 0$ при $x = 0$. 67. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

68. $2xyy' - y^2 + x = 0$.

69. $y dx + (x - 0,5x^3 y) dy = 0$.

70. $xy' - 3x^3 y = x^3 y^2$.

В задачах 71–80 найти общее решение дифференциальных уравнений.

71. $y'' = 1 - y^2$ 72. $xy'' + y' = 0$ 73. $yy'' + y'^2 = 0$.

74. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ 75. $y'(1 + y^2) = y''$.

76. $x^2 y'' + xy' = 1$ 77. $yy'' = y^2 y' + y'^2$ 78. $y'' = -x/y'$.

79. $xy'' = y' \ln(y'/x)$ 80. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

В задачах 81–90 найти общее решение дифференциальных уравнений.

81. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ 82. $y'' - y' + y = x^2 + 6$ 83. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

84. $y'' - 8y' + 7y = 14$ 85. $y'' - y = e^x$ 86. $y'' + y = \cos x$.

87. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ 88. $y'' + y' - 6y = xe$.

89. $y'' + y' = \sin^2 x$ 90. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

В задачах 91–100 систему линейных алгебраических уравнений решить методом Гаусса–Жордано

$$\begin{aligned} 91. \quad & 3X + 2Y - 4Z = 1 \\ & 2X + Y - Z = 2 \\ & X + 5Y - Z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 92. \quad & 3X + 2Y - 4Z = -2 \\ & X - Y - Z = -2 \\ & X + 2Y - 5Z = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 93. \quad & 3X + 2Y - 4Z = -1 \\ & X + 2Y - 4Z = -3 \\ & 2X + Y - 4Z = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 94. \quad & 3X + 2Y - 4Z = 5 \\ & X - 2Y - 4Z = -1 \\ & 2X + 3Y - 4Z = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 95. \quad & 3X + 2Y - 3Z = 9 \\ & 2X + Y - Z = 5 \\ & -X + Y - Z = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 96. \quad & 3X + 2Y - 4Z = -2 \\ & X - 2Y - 4Z = 2 \\ & X + Y + Z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 97. \quad & 3X + 2Y + 4Z = 2 \\ & -X + Y - 4Z = 8 \\ & 2X - Y - 3Z = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 98. \quad & 3X + 2Y - 4Z = 8 \\ & 2X + 2Y - 3Z = 5 \\ & 5X + 3Y - Z = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99. \quad & 3X + 2Y + 4Z = 5 \\ & X + Y - Z = 4 \\ & 2X + Y - Z = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100. \quad & 3X - 2Y - 4Z = 1 \\ & X + 2Y - 4Z = 3 \\ & -X + 2Y - 4Z = -3 \end{aligned}$$

В задачах 101–110, относящихся к пункту а), найти базисные решения, а в задачах, отнесенных к пункту б), найти опорные решения.

101.

$$\begin{aligned} \text{а) } & 2X_1 + X_2 + 3X_3 - 3X_4 = 9 \\ & X_1 + X_2 + 2X_3 - 2X_4 = 8 \\ & X_1 + X_2 + X_3 + 4X_4 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & 3X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 3 \\ & -X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 2X_4 = -2 \\ & 4X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 4 \end{aligned}$$

102.

$$\begin{aligned} \text{а) } & X_1 + 2X_2 + X_3 = 3 \\ & X_1 - 2X_3 + X_4 = -4 \\ & 2X_1 + 6X_2 - 5X_3 = -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & X_1 - 2X_2 + X_3 = 3 \\ & -2X_1 + 4X_2 + X_4 = 36 \\ & 3X_1 - 3X_2 + X_3 = 5 \end{aligned}$$

Для задач 111–120 решить задачу линейного программирования

111.

$$\begin{aligned} -X_1 + 5X_2 + X_3 + X_4 + X_5 &= 10 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 &= 6 \\ 10X_2 + X_3 + 2X_4 + 3X_5 &= 25 \\ X_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$F_{\min} = X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 - 6$$

112.

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 - X_3 &= -1 \\ X_1 - 3X_2 - X_4 &= -13 \\ 4X_1 + X_2 + X_5 &= 26 \\ X_1 - 3X_2 + X_6 &= 0 \\ X_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned}$$

$$F_{\max} = -4X_1 + 3X_2 + X_4 - X_5$$

113.

$$\begin{aligned} 3X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 &= 2 \\ 4X_1 - X_2 + X_4 + X_5 &= 21 \\ 4X_1 - X_2 - X_4 + X_5 &= 13 \\ X_1 + X_2 - X_6 &= 3 \\ X_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$F_{\max} = -3X_1 + 2X_2 - 3X_4 - X_5$$

114.

$$\begin{aligned} 4X_1 - 3X_2 - X_3 + X_4 + X_5 &= 6 \\ X_1 + 4X_2 + X_3 + X_5 &= 15 \\ 2X_1 - 4X_2 - X_3 + X_4 &= -3 \\ X_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$F_{\max} = X_1 - X_2$$

✓ Для задач 121–130 решить транспортную задачу. В строках A_1 , A_2 , A_3 транспортной таблицы показано максимальное количество единиц продукции, которое могут принять магазины 1, 2, 3. В столбцах B_1 , B_2 , B_3 отражено количество единиц продукции, которое находится на 1, 2, 3 складах, соответственно. Стоимость перевозки единицы продукции со складов в магазины задается матрицей стоимости.

Задача состоит в том, чтобы составить план перевозок товара, находящегося на складах, который имел бы минимальную стоимость. При решении задачи привести ее к сбалансированной транспортной задаче. При выборе начального опорного плана можно использовать метод северо-западного угла, метод минимальной стоимости элементов или метод добротностей. Проверку на оптимальность и дальнейшее улучшение опорных планов можно проводить, используя распределительный метод или метод потенциалов.

121.

	B_1	B_2	B_3	
A_1				90
A_2				65
A_3				75
	40	120	170	

Матрица стоимости

5	6	8
6	9	10
4	7	5

Для задач 131–140 решить двойственную задачу линейного программирования. Исходную задачу решить, используя геометрический метод решения задачи линейного программирования. Для исходной задачи сформулировать сопряженную задачу. Решить сопряженную задачу любым из известных студенту методов. Сравнить полученные оптимальные значения целевых функций исходной и сопряженной задач.

131.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 5 \\ -X_1 + X_2 &\leq 4 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\geq 0 \\ f_{\min} &= X_1 + 2X_2 \end{aligned}$$

132.

$$\begin{aligned} -7X_1 - 3X_2 &\leq -21 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 8 \\ 3X_1 - X_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\geq 0 \\ F_{\max} &= 3X_1 + 2X_2 \end{aligned}$$

133.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\geq 4 \\ X_1 + X_2 &\leq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\geq 0 \\ F_{\max} &= X_1 + X_2 \end{aligned}$$

134.

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\leq 3 \\ 3X_1 + X_2 &\geq 1 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\geq 0 \\ f_{\min} &= X_1 + 2X_2 \end{aligned}$$

135

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 &\geq 3 \\ X_1 + X_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\geq 0 \\ f_{\min} &= X_1 + 3X_2 \end{aligned}$$

136.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 1 \\ 5X_1 - 3X_2 &\geq 20 \\ 3X_1 + 4X_2 &\leq 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\geq 0 \\ F_{\max} &= X_1 + 2X_2 \end{aligned}$$