

1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ.

Стержень принято называть материальный объект, один из геометрических размеров которого много больше двух других. Силы взаимодействия стержня с другими материальными телами или полями называются *внешними*, а силы взаимодействия между отдельными частями материального объекта называются *внутренними*.

Поскольку основные критерии работоспособности любой конструкции определяются величиной и характером внутренних усилий, возникающих в сечениях стержня, определение внутренних усилий является важнейшей задачей курса сопротивления материалов.

Для определения внутренних усилий в стержнях используется *метод сечений*. Суть метода состоит в том, что стержень, нагруженный системой внешних сил $\{F_i\}$ (рис. 1.1) и находящийся в равновесии, мысленно делится на 2 части плоскостью, перпендикулярной его оси (рис. 1.2) и одна из частей стержня мысленно отбрасывается.

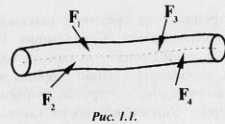


Рис. 1.1.

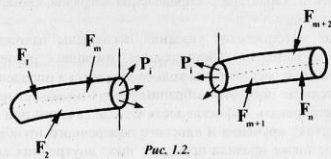


Рис. 1.2.

Внутренние силы, действующие на рассматриваемую часть со стороны отброшенной, могут быть определены из условия равновесия одной из частей стержня.

Для удобства анализа, система внутренних сил $\{P_i\}$ приводится к главному вектору R и главному моменту M с центром приведения в центре тяжести поперечного сечения стержня (рис. 1.3).

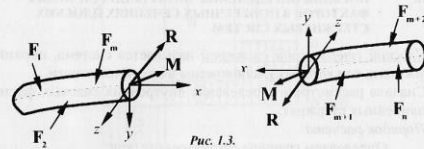


Рис. 1.3.

Проекция главного вектора и главного момента системы внутренних сил на оси координат называются *внутренними силовыми факторами*.

По третьему закону Ньютона силовые факторы в сечениях левой и правой части стержня равны по величине и противоположны по направлению. Чтобы знак силового фактора, определенного в правой и левой части стержня, был одинаков, вводится две системы координат (рис. 1.3). Ось x направляется в сторону внешней нормали к сечению, а оси y и z располагаются в плоскости сечения, образуя левую тройку для левой части и правую для правой. Положительные направления внутренних силовых факторов совпадают с положительными направлениями координатных осей (рис. 1.4).

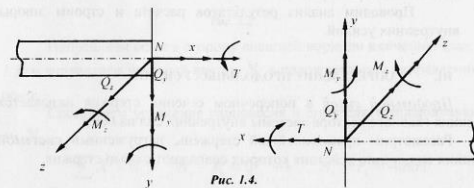


Рис. 1.4.

Величина и знак внутренних силовых факторов определяются из уравнений равновесия, составленных для системы сил, приложенной к

одной части стержня. График изменения величины внутреннего силового фактора по оси стержня называется *эпурой* внутренних усилий.

II. ПОРЯДОК ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.

Плоской стержневой системой называется система, образованная стержнями, оси которых расположены в одной плоскости.

Сначала рассмотрим определение внутренних силовых факторов в прямолинейных стержнях.

Порядок расчета:

- 2.1. Определяем границы грузовых участков. *Границей грузового участка* является сечение стержня, в котором приложен сосредоточенный внешний силовой фактор (сосредоточенная сила или пара сил) или находится начало (конец) внешнего распределенного силового фактора.
- 2.2. Проводим сечение внутри грузового участка и мысленно отбрасываем часть стержня, лежащую по одну сторону от проведенного сечения.
- 2.3. Выбираем систему координат с началом координат в центре тяжести сечения (см. рис. 1.4) и направляем векторы искомых силовых факторов в положительном направлении соответствующих координатных осей.
- 2.4. Составляем уравнения равновесия для системы сил, действующих на рассматриваемую часть стержня, и определяем искомые силовые факторы.
- 2.5. Проводим анализ результатов расчета и строим эпюры внутренних усилий.

III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ.

Продольной силой в поперечном сечении стержня называется проекция главного вектора системы внутренних сил на ось x .

Рассмотрим прямолинейный стержень, нагруженный системой внешних сил, линии действия которых совпадают с осью стержня.

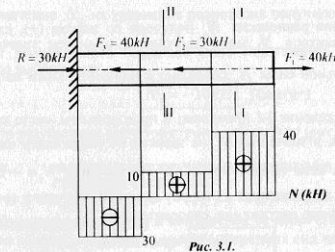


Рис. 3.1.

Проектируя внешние силы на ось стержня, находим реакцию в опоре.

$$\sum X = 0 \quad R + F_1 - F_2 - F_3 = 0 \quad R = 40 + 30 - 40 = 30 \text{ kH}$$

Проводим сечение I-I в произвольном месте I грузового участка и отбрасываем левую часть

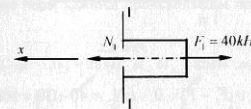


Рис. 3.2.

Направляем ось x в сторону внешней нормали к сечению (рис. 1.3) и направляем искомый вектор N_1 в положительном направлении оси x .

Составляем уравнение равновесия и определяем продольную силу N_1 .

$$\sum X = 0 \quad N_1 - F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = F_1 = 40 \text{ kH}$$

Проанализируем полученный результат.

Из уравнения равновесия N_1 получено со знаком (+), следовательно, истинное направление силы совпадает с выбранным, т.е. направление продольной силы N_1 совпадает с положительным направлением оси x .

Поскольку сечение I-I проведено в произвольном месте первого грузового участка, а значение N_1 не зависит от координаты сечения, следовательно, на всем первом грузовом участке сила $N_1 = +40 \text{ кН}$. Продольная сила, направленная в сторону внешней нормали к сечению, вызывает деформацию растяжения, следовательно,

$$N_1 = 40 \text{ кН} \quad (\text{растяжение})$$

Аналогично получаем значения N_2 и N_3 на втором и третьем грузовых участках.

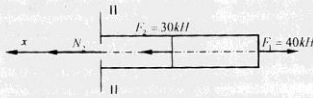


Рис. 3.3.

$$\sum X = 0 \quad N_2 + F_2 - F_1 = 0 \quad N_2 = 40 - 30 = 10 \text{ кН}$$

$$N_2 = 10 \text{ кН} \quad (\text{растяжение})$$

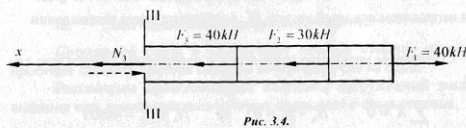


Рис. 3.4.

$$\sum X = 0 \quad N_3 + F_3 + F_2 - F_1 = 0 \quad N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = -30 \text{ кН}$$

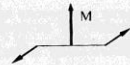


Рис. 4.2.

Поскольку скручивающие пары сил расположены в плоскостях, перпендикулярных оси стержня, следовательно, векторы моментов этих пар будут направлены по оси стержня (рис. 4.1). Определим крутящие моменты T_i в каждом сечении.

Сечение I-I: рассматриваем правую часть стержня.

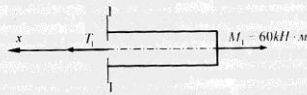


Рис. 4.3.

Составляем уравнение равновесия для рассматриваемой части стержня

$$\sum M_x = 0 \quad T_1 - M_1 = 0 \quad T_1 = M_1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Поскольку величина T_1 не зависит от координаты сечения I-I, следовательно, на первом участке крутящий момент постоянен и равен 60 кН·м.

$$T_1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Находим крутящие моменты на остальных участках.

Сечение II-II:

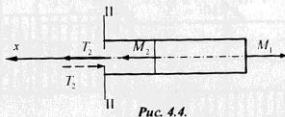


Рис. 4.4.

$$\sum M_x = 0 \quad T_2 + M_2 - M_1 = 0 \quad T_2 = M_1 - M_2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$T_2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Значение N_3 из уравнения равновесия получилось со знаком (-), что означает: истинное направление силы N_3 противоположно первоначально выбранному.

$$N_3 = -30 \text{ кН} \quad (\text{сжатие})$$

По результатам расчетов строим эпюру $N(x)$ (рис. 3.1).

IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ.

Крутящим моментом в поперечном сечении стержня называется проекция главного момента системы внутренних сил на ось x .

Рассмотрим прямолинейный стержень, нагруженный внешними парами сил, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Моменты таких пар называются **скручивающими моментами**.

Чтобы определить крутящие моменты в поперечных сечениях стержня и построить эпюру крутящих моментов, заменим пары сил M_i векторами их моментов. Как известно, вектор момента пары сил перпендикулярен плоскости действия пары сил и направлен в ту сторону, откуда вращение пары кажется происходящим против часовой стрелки (рис. 4.2).

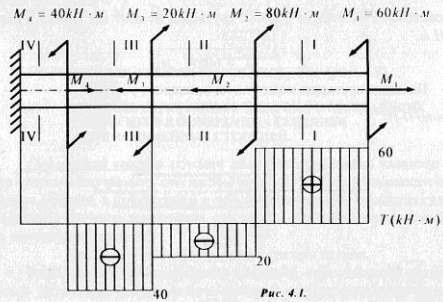


Рис. 4.1.

Сечение III-III:

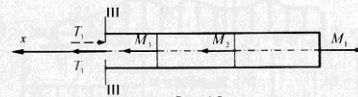


Рис. 4.5.

$$\sum M_x = 0 \quad T_3 + M_3 + M_2 - M_1 = 0 \quad T_3 = M_1 - M_2 - M_3 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$T_3 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Сечение IV-IV:

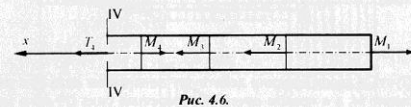


Рис. 4.6.

$$\sum M_x = 0 \quad T_4 - M_1 + M_2 - M_4 = 0$$

$$T_4 = 0$$

По результатам расчетов строим эпюру $T(x)$ (рис. 4.1).

V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ.

Поперечной силой в сечении называется проекция главного вектора системы внутренних сил на ось, расположенную в плоскости поперечного сечения, а **изгибающим моментом** называется проекция главного момента системы внутренних сил на ось, расположенную в плоскости поперечного сечения.

5.1. Дифференциальные зависимости при изгибе.

Рассмотрим прямолинейный стержень, нагруженный распределенной нагрузкой, интенсивность которой есть непрерывная функция $q(x)$.

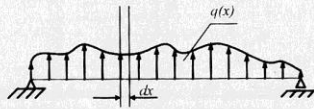


Рис. 5.1.

Выделим элементарный участок стержня длиной dx и рассмотрим условия равновесия этого элементарного участка.

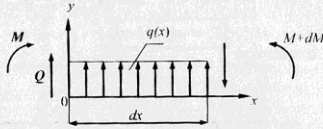


Рис. 5.2.

Пусть в левом сечении действуют поперечная сила Q и изгибающий момент M , а в правом сечении поперечная сила $Q+dQ$ и изгибающий момент $M+dM$.

Запишем уравнения равновесия выделенного участка

$$\sum Y = 0 \quad Q - Q - dQ + q(x)dx = 0$$

$$q(x) = \frac{dQ}{dx} \quad (5.1)$$

$$\sum M_0 = 0 \quad -M + M + dM - (Q + dQ)dx + q(x) \frac{dx^2}{2} = 0$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, получим:

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (5.2)$$

$$q(x) = \frac{d^2 M}{dx^2} \quad (5.3)$$

Соотношения 5.1 – 5.3 называются дифференциальными соотношениями при изгибе.

Рассмотрим прямолинейный стержень, подверженный плоскому поперечному изгибу (рис. 5.3).

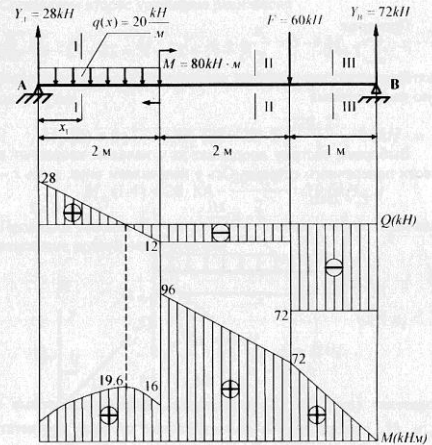


Рис. 5.3.

Требуется определить внутренние силы в поперечных сечениях стержня и построить эпюры внутренних силовых факторов.

Определим опорные реакции Y_A и Y_B , составив 2 уравнения равновесия

$$\sum M_A = 0 \quad -q \cdot 2 \cdot 1 - M - 4F + 5Y_B = 0$$

$$Y_B = \frac{40 + 80 + 240}{5} = 72 \text{ kH}$$

$$\sum M_B = 0 \quad q \cdot 2 \cdot 4 - M + F \cdot 1 - 5Y_A = 0$$

$$Y_A = \frac{160 - 80 + 60}{5} = 28 \text{ kH}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 \quad Y_A + Y_B - 2q - F = 28 + 72 - 40 - 60 = 0$$

Проведем сечение I-I на первом грузовом участке и рассмотрим левую часть стержня

Выбираем систему координат yz с началом координат в центре тяжести поперечного сечения. Ось y направляем вниз, а ось z – «на на-

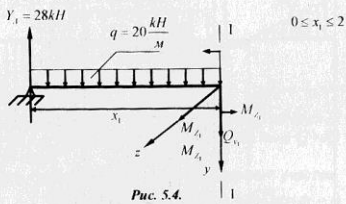


Рис. 5.4.

блюдателя» (рис. 1.4). Определяемые внутренние силовые факторы (Q_1 и M_{z1}) направляем в положительные стороны соответствующих осей и составляем 2 уравнения равновесия для системы сил, действующих на рассматриваемую часть стержня.

$$\sum Y = 0 \quad Q_1 - Y_A + q \cdot x_1 = 0 \rightarrow Q_1 = Y_A - q \cdot x_1$$

Поскольку функция $Q_1(x)$ – линейна, находим значения на границах грузового участка

$$Q_1(0) = Y_A = 28 \text{ kH} \quad Q_1(2) = 28 - 40 = -12 \text{ kH}$$

Функция $Q_1(x)$ есть производная от $M(x)$ (см. 5.2) и на границах участка меняет знак, следовательно, внутри промежутка $[0; 2]$ она обращается в ноль, а функция $M(x)$ в этой точке имеет экстремум.

Находим координату точки экстремума

$$Q_1 = 0 \quad Y_A - qx_1 = 0 \quad x_1 = \frac{Y_A}{q} = \frac{28}{20} = 1.4 \text{ м}$$

Составляем второе уравнение равновесия

$$\sum M_z = 0 \quad M_{z1} - Y_A \cdot x_1 + q \frac{x_1^2}{2} = 0 \rightarrow M_{z1} = Y_A \cdot x_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

Находим значения функции на границах грузового участка и в точке экстремума

$$M_{z1}(0) = 0; \quad M_{z1}(2) = 28 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^2}{2} = 16 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_{z1}(1.4) = 28 \cdot 1.4 - \frac{20 \cdot 1.4^2}{2} = 19.6 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

Проводим сечение II-II на втором грузовом участке и рассматриваем равновесие правой части стержня

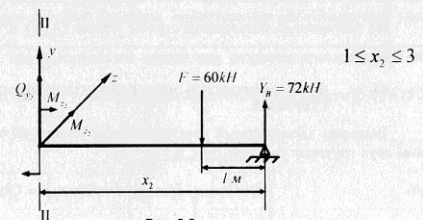


Рис. 5.5.

$$\sum Y = 0 \quad Q_2 - F + Y_B = 0 \quad Q_2 = F - Y_B = -12 \text{ kH}$$

$$\sum M_z = 0 \quad M_{z2} + F(x_2 - 1) - Y_B \cdot x_2 = 0$$

$$M_{z2} = Y_B x_2 - F(x_2 - 1) \quad M_{z2}(1) = 72 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

$$M_{z2}(3) = 96 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

Внутренние силовые факторы

Определяем внутренние усилия на III грузовом участке

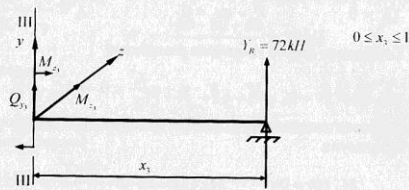


Рис. 5.6.

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 & \quad Q_1 + Y_B = 0 & \quad Q_1 = -Y_B = -72 \text{ kH} \\ \sum M_z = 0 & \quad M_1 - Y_B \cdot x_1 = 0 & \quad M_1 = Y_B \cdot x_1 \\ & \quad M_{z_1}(0) = 0 & \quad M_{z_1}(1) = 72 \text{ kH} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

По полученным результатам строим эпюры $Q_z(x)$ и $M_z(x)$ (см. рис. 5.3).

VI. ПРАВИЛА ПРОВЕРКИ ЭПЮР В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СТЕРЖНЯХ.

Выделим элементарный участок стержня длиной dx вблизи границы двух грузовых участков (рис. 6.1).

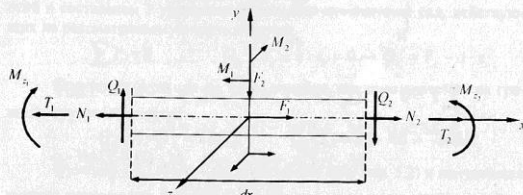


Рис. 6.1.

Внутренние силовые факторы

Пусть в левом сечении действуют внутренние силовые факторы N_1, Q_1, T_1, M_{z_1} , а в правом сечении N_2, Q_2, T_2, M_{z_2} . Пусть на границе участков приложены внешние сосредоточенные силовые факторы F_1, F_2, M_1, M_2 .

Составим уравнения равновесия для системы сил, действующих на рассматриваемый элементарный участок.

$$\sum X = 0 \quad N_2 - N_1 + F_1 = 0 \rightarrow [N_1 - N_2 = F_1] \quad (6.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad Q_1 - Q_2 - F_2 = 0 \rightarrow [Q_1 - Q_2 = F_2] \quad (6.2)$$

$$\sum M_z = 0 \quad T_2 - T_1 - M_2 = 0 \rightarrow [T_1 - T_2 = M_2] \quad (6.3)$$

$$\sum M_z = 0 \quad M_{z_2} - M_{z_1} + M_1 = 0 \rightarrow [M_{z_1} - M_{z_2} = M_1] \quad (6.4)$$

Из полученных результатов следует первое правило проверки:

Разность значений внутренних силовых факторов на соседних грузовых участках равна величине соответствующего внешнего сосредоточенного силового фактора, приложенного на границе двух участков.

На соответствующей эпюре эта разность проявляется в виде «скачка».

Рассмотрим теперь дифференциальные зависимости (5.1) и (5.2).

$$q(x) = \frac{dQ}{dx} \rightarrow dQ = q(x)dx$$

$$\int_{Q_1}^{Q_2} dQ = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx \rightarrow [Q_2 - Q_1 = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx] \quad (6.5)$$

Из соотношения (6.5) вытекает второе правило проверки эпюры $Q(x)$.

Разность значений поперечной силы Q_2 и Q_1 на участке стержня, ограниченном координатами x_1 и x_2 , равна площади, ограниченной графиком функции $q(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$.

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \rightarrow dM(x) = Q(x)dx \quad [M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} Q(x)dx] \quad (6.6)$$

Внутренние силовые факторы

Разность значений изгибающего момента M_2 и M_1 на участке стержня, ограниченном координатами x_1 и x_2 , равна площади, ограниченной графиком функции $Q(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$.

VII. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПЛОСКИХ РАМАХ.

Плоской рамой называется стержневая система, образованная прямолинейными стержнями, жестко соединенными между собой, оси которых лежат в одной плоскости.

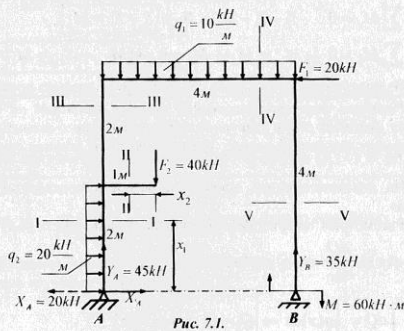


Рис. 7.1.

Определим внутренние усилия в плоской раме, изображенной на рис. 7.1.

7.1. Определяем реакции в опорах А и В из уравнений равновесия.

$$\sum X = 0 \quad X_A + q_2 \cdot 2 - F_1 = 0 \quad X_A = F_1 - q_2 \cdot 2 = 20 - 40 = -20 \text{ kH}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -q_2 \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 1 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - M + Y_B \cdot 4 = 0$$

$$Y_B = \frac{40 + 40 + 80 - 80 + 60}{4} = 35 \text{ kH}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -q_2 \cdot 2 \cdot 1 + F_2 \cdot 3 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - M - Y_A \cdot 4 = 0$$

Внутренние силовые факторы

$$Y_A = \frac{-40 + 120 + 80 + 80 - 60}{4} = 45 \text{ kH}$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0 \quad Y_A + Y_B - F_2 - q_1 \cdot 4 = 45 + 35 - 40 - 40 = 0$$

7.2. Рассматриваем первый грузовый участок (сечение I-II).

Чтобы определить направление координатных осей, будем рассматривать каждый грузовый участок «изнутри» контура, определяя, таким образом, левую и правую часть стержня.

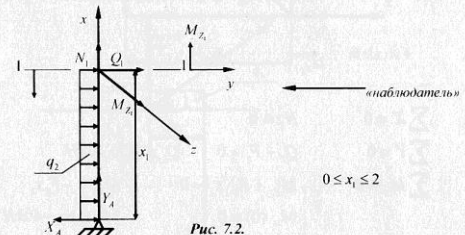


Рис. 7.2.

Из уравнений статики определяем искомые силовые факторы N_1, Q_1, M_{z_1} .

$$\sum X = 0 \quad N_1 + Y_A = 0 \quad N_1 = -Y_A = -45 \text{ kH (сжатие)}$$

$$\sum Y = 0 \quad Q_1 - X_A + q_2 \cdot x_1 = 0 \quad Q_1 = X_A - q_2 \cdot x_1$$

$$Q_1(0) = X_A = 20 \text{ kH}$$

$$Q_1(2) = 20 - 40 = -20 \text{ kH}$$

Поскольку на границах участка функция $Q(x)$ меняет знак, следовательно, внутри промежутка $[0 \div 2]$ функция $M(x)$ имеет экстремум. Находим координату точки экстремума.

$$X_A - q_2 \cdot x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{X_A}{q_2} = 1 \text{ м}$$

$$\sum M_z = 0 \quad M_{z_1} - X_A \cdot x_1 + q_2 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0 \quad M_{z_1} = X_A \cdot x_1 - q_2 \cdot \frac{x_1^2}{2}$$

$$M_{z_1}(0) = 0; M_{z_1}(2) = 40 - 40 = 0; M_{z_1}(1) = 20 - 10 = 10 \text{ kH} \cdot \text{м}$$

7.3. Определяем внутренние усилия на втором грузовом участке (сечение II-II).

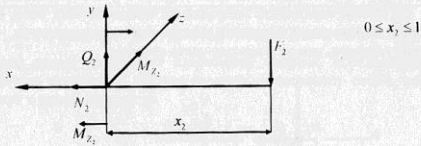


Рис. 7.3.

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad N_2 = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad Q_2 - F_2 = 0 \quad Q_2 = F_2 = 40 \text{ kH} \\ \sum M_z = 0 & \quad M_{z_2} + F_2 \cdot x_2 = 0 \quad M_{z_2} = -F_2 x_2 \\ & \quad M_{z_2}(0) = 0 \quad M_{z_2}(1) = -40 \text{ kH} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

7.4. Третий грузовой участок (сечение III-III).

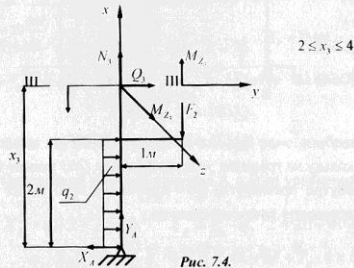


Рис. 7.4.

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad N_3 + Y_4 = 0 \quad N_3 = -Y_4 = -45 \text{ kH} \\ \sum Y = 0 & \quad Q_3 + q_2 \cdot 2 - X_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 & \quad M_{z_3} + M - Y_4 \cdot x_3 + q_2 \cdot \frac{x_3^2}{2} = 0 \\ & \quad M_{z_3} = Y_4 x_3 - M - q_2 \cdot \frac{x_3^2}{2} \\ & \quad M_{z_3}(0) = -M = -60 \text{ kH} \cdot \text{м} \\ & \quad M_{z_3}(4) = -60 - 80 + 140 = 0 \\ & \quad M_{z_3}(3.5) = 122 \cdot 5 - 60 - 61.25 = 1.25 \text{ kH} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

7.6. Пятый грузовой участок (сечение V-V).

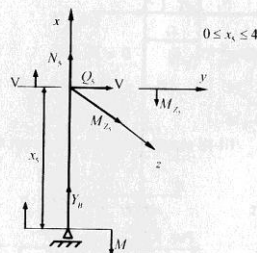


Рис. 7.6.

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad N_4 + Y_4 = 0 \quad N_4 = -Y_4 = -35 \text{ kH} \\ \sum Y = 0 & \quad Q_4 = 0 \\ \sum M_z = 0 & \quad M_{z_4} + M = 0 \quad M_{z_4} = -M = -60 \text{ kH} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= X_4 - q_2 \cdot 2 = 20 - 40 = -20 \text{ kH} \\ \sum M_z = 0 & \quad M_{z_3} - F_2 \cdot 1 + q_2 \cdot 2 \cdot (x_3 - 1) - X_4 \cdot x_3 = 0 \\ & \quad M_{z_3} = F_2 \cdot 1 + X_4 \cdot x_3 - q_2 \cdot 2 \cdot (x_3 - 1) \\ & \quad M_{z_3}(2) = 40 + 40 - 40 = 40 \text{ kH} \cdot \text{м} \\ & \quad M_{z_3}(4) = 40 + 80 - 120 = 0 \end{aligned}$$

7.5. Четвертый грузовой участок (сечение IV-IV).

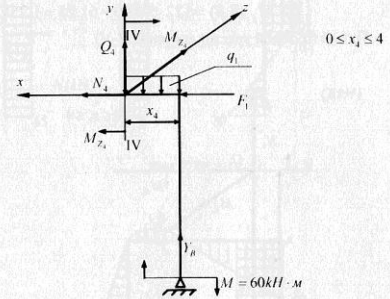


Рис. 7.5.

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad N_4 + F_1 = 0 \quad N_4 = -F_1 = -20 \text{ kH} \text{ (сжатие)} \\ \sum Y = 0 & \quad Q_4 + Y_4 - q_1 x_4 = 0 \quad Q_4 = q_1 x_4 - Y_4 \\ & \quad Q_4(0) = -Y_4 = -35 \text{ kH} \\ & \quad Q_4(4) = -35 + 40 = 5 \text{ kH} \end{aligned}$$

Находим координату точки экстремума функции $M(x)$.

$$-Y_4 + q_1 x_4 = 0 \quad x_4 = \frac{Y_4}{q_1} = \frac{35}{10} = 3.5 \text{ м}$$

7.7. Построение эпюр внутренних усилий. В отличие от стержневой эпюры внутренних усилий в рамах строится каждая на отдельном контуре.

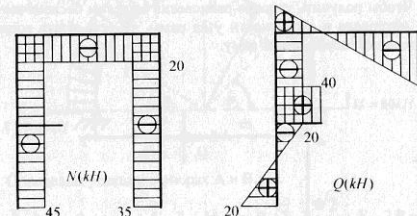


Рис. 7.7.

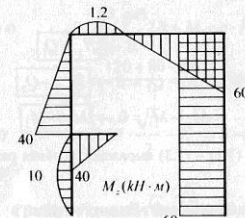


Рис. 7.8.

При выбранном направлении координатных осей эпюра изгибающих моментов строится на сжатом волокне, поэтому, как правило, знаки (+), (-) на эпюре изгибающих моментов не ставятся.

7.8. Правила проверки эпюр внутренних усилий в рамах.
 Кроме правил проверки эпюр, перечисленных в п. 6, при построении эпюр внутренних усилий в рамах необходимо убедиться в выполнении условий равновесия в узлах.
 Чтобы получить условия равновесия выделим бесконечно малый объем материала в окрестности узла рамы, то есть места соединения двух стержней, образующих раму.

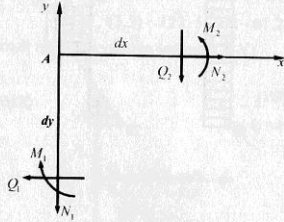


Рис. 7.9.

$$\sum X = 0 \quad N_2 - Q_1 = 0 \rightarrow N_2 = Q_1 \quad (7.1)$$

$$\sum Y = 0 \quad -N_1 - Q_2 = 0 \rightarrow N_1 = -Q_2 \quad (7.2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_2 - M_1 = 0 \rightarrow M_1 = M_2 \quad (7.3)$$

Соотношения (7.1) – (7.3) выражают условия равновесия в узлах рамы.

VIII. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЯХ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ.

Криволинейными стержнями малой кривизны принято называть стержни, оси которых представляют собой некоторую кривую с радиусом кривизны много больше геометрических размеров поперечного сечения.

Определим внутренние усилия в стержне (рис. 8.1), ось которого представляет собой дугу окружности радиуса R.

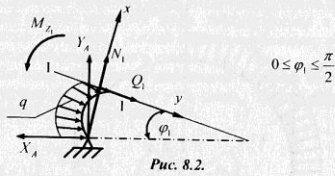


Рис. 8.2.

$$\sum X = 0 \quad N_1 + q \cdot 2R \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} - X_A \sin \varphi_1 + Y_A \cos \varphi_1 = 0$$

$$N_1 = X_A \sin \varphi_1 - Y_A \cos \varphi_1 - 2qR \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

$$N_1(0) = -Y_A = -70kH \quad N_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 40 - 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad Q_1 + q \cdot 2R \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2} - X_A \cos \varphi_1 - Y_A \sin \varphi_1 = 0$$

$$Q_1 = X_A \cos \varphi_1 + Y_A \sin \varphi_1 - qR \sin \varphi_1$$

$$Q_1(0) = X_A = 40kH \quad Q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 70 - 40 = 30kH$$

$$\sum M_z = 0$$

$$M_z - X_A R \sin \varphi_1 - Y_A R(1 - \cos \varphi_1) + 2qR \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot R \sin \frac{\varphi_1}{2} = 0$$

$$M_z = X_A R \sin \varphi_1 + Y_A R(1 - \cos \varphi_1) - qR^2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

$$M_z(0) = 0$$

$$M_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = X_A R + Y_A R - qR^2 = 80 + 140 - 80 = 140kH \cdot m$$

Рассматриваем второй участок (сечение II-II) (рис.8.3).

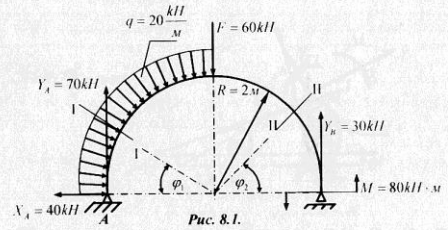


Рис. 8.1.

Определим реакции в опорах А и В.

$$\sum M_A = 0 \quad -F \cdot R + M - q \cdot R\sqrt{2} \cdot R \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_B \cdot 2R = 0$$

$$Y_B = \frac{60 \cdot 2 - 80 + 80}{4} = 30kH$$

$$\sum M_B = 0 \quad F \cdot R - Y_A \cdot 2R + M + q \cdot R\sqrt{2} \cdot R \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$Y_A = \frac{120 + 80 + 80}{4} = 70kH$$

$$\sum X = 0 \quad q \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - X_A = 0 \rightarrow X_A = 40kH$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 \quad Y_A + Y_B - F - q \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 70 + 30 - 60 - 40 = 0$$

Рассмотрим первый грузовой участок (сечение I-I). Координаты сечения будем рассматривать в полярной системе координат (R, phi) (рис. 8.2).

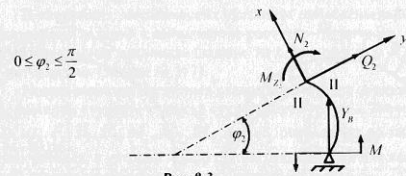


Рис. 8.3.

$$\sum X = 0 \quad N_2 + Y_B \cos \varphi_2 = 0 \quad N_2 = -Y_B \cos \varphi_2$$

$$N_2(0) = -Y_B = -30kH \quad N_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad Q_2 + Y_B \sin \varphi_2 = 0 \quad Q_2 = -Y_B \sin \varphi_2$$

$$Q_2(0) = 0 \quad Q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -30kH$$

$$\sum M_z = 0 \quad M_z - M - Y_B(R - R \cos \varphi_2) = 0$$

$$M_z = M + Y_B R(1 - \cos \varphi_2)$$

$$M_z(0) = M = 80kH \cdot m$$

$$M_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 80 + 60 = 140kH \cdot m$$

По результатам расчетов строим эпюры внутренних усилий.

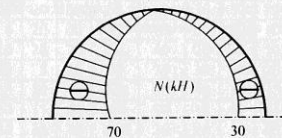


Рис. 8.4.

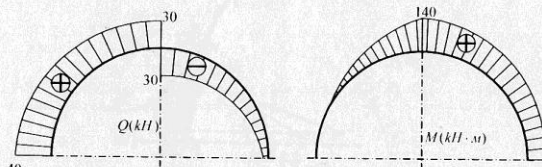


Рис. 8.5.

Рис. 8.6.

IX. ОФОРМЛЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

В оформленном виде расчетно-графическая работа состоит из пояснительной записки и графической части. В пояснительной записке приводятся все вычисления и построения по каждой из задач, входящих в задание. Кратко излагаются комментарии и пояснения к вычислениям. На титульном листе пояснительной записки необходимо указать название министерства, института, кафедры, тему расчетно-графической работы, номер варианта задания. Кроме того, здесь же приводятся фамилия и инициалы студента - автора работы и преподавателя, под руководством которого она выполнена.

Графическая часть представляет собой чертеж, выполненный на листе формата А2. На чертеже должны быть приведены расчетные схемы стержней и стержневых систем с обязательным указанием численных значений и направления заданных внешних нагрузок и опорных реакций. Под схемой каждого стержня приводятся эпюры соответствующих внутренних силовых факторов. Графические построения необходимо выполнять с соблюдением масштаба.

X. ПРИЛОЖЕНИЕ.

В настоящих методических указаниях приведены варианты индивидуальных заданий к выполнению расчетно-графических работ по курсу «Прикладная механика» (задачи № 1-5) и по курсу «Сопротивление материалов» (задачи № 1-7).

Номер варианта расчетных схем соответствует порядковому номеру фамилии студента в списке студенческой группы. Значения $q_1, q_2, q_3, F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, I_1, I_2, I_3$ определяют по таблице исходных данных, в которой номер строки (одинаковый для всей студенческой группы) выбирается по указанию преподавателя.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Номер варианта исходных данных	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$q_3, \text{кН/м}$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$M_1, \text{кН·м}$	$M_2, \text{кН·м}$	$M_3, \text{кН·м}$	$I_1, \text{м}$	$I_2, \text{м}$	$I_3, \text{м}$
1	5	10	20	10	20	40	50	80	40	1	2	2
2	10	15	30	20	10	50	40	30	40	0,5	2,5	2
3	20	20	15	30	20	70	10	40	10	1,5	2	1
4	30	10	20	40	5	60	30	40	20	2	3	1,5
5	40	25	25	20	30	80	60	10	70	1	2	1
6	10	20	8	30	80	20	20	40	50	1	3	2
7	10	6	20	10	30	10	20	30	40	1	2	1
8	10	20	8	20	40	40	30	20	30	1	4	2
9	6	10	20	20	50	10	10	60	20	2	3	1
10	4	10	20	30	70	70	20	70	10	1,5	2	1
11	5	10	20	10	20	30	30	10	50	1	2	1,5
12	8	10	20	20	30	40	10	15	20	1	2	1,8
13	10	20	10	10	20	30	20	30	10	2	1,5	1,5
14	6	20	20	30	50	60	30	10	20	2	1,5	2,5
15	12	8	20	40	50	10	30	20	10	1	2	1
16	5	10	20	20	50	40	20	5	10	2	4	2
17	10	20	5	20	90	70	30	15	20	3	3	2
18	20	15	20	40	100	80	40	20	5	2	4	3
19	40	30	15	60	100	50	10	40	15	3	2	3
20	50	40	10	40	50	30	20	30	40	2	3	1
21	12	20	30	10	30	40	10	20	30	0,5	4	1
22	15	30	40	20	40	50	20	30	20	0,6	3	2
23	20	24	20	30	20	30	30	10	10	0,8	5	1,5

Номер варианта исходных данных	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$q_3, \text{кН/м}$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$M_1, \text{кН·м}$	$M_2, \text{кН·м}$	$M_3, \text{кН·м}$	$I_1, \text{м}$	$I_2, \text{м}$	$I_3, \text{м}$
24	8	10	10	20	30	40	20	20	10	1	6	1
25	10	20	10	10	10	20	10	10	20	1	4	1
26	4	20	30	40	70	10	30	10	50	1	2	1
27	6	10	20	50	60	20	10	20	30	1	1	0,5
28	8	10	30	10	20	10	20	20	30	1	1	1
29	10	20	24	20	30	40	10	10	20	2	2,5	2
30	6	10	20	20	40	30	10	20	10	1	1	1
31	20	15	10	40	30	10	50	10	70	3	4	1
32	20	30	15	30	40	20	10	40	80	2	2,5	0,5
33	30	20	35	30	50	40	10	15	25	2	3	2
34	25	40	30	30	60	50	15	10	30	2	3	2,5
35	5	15	25	30	50	40	30	60	50	2	4	2
36	10	5	15	30	70	50	50	30	20	3	3	3
37	15	40	20	40	50	30	40	50	30	4	4	1,5
38	20	30	15	50	80	40	50	80	60	1,5	3	2
39	15	20	30	10	40	50	70	60	40	2,5	3	2
40	30	10	40	40	50	80	20	30	10	1	2	1
41	20	25	30	30	20	60	50	40	30	3	4,5	3
42	40	30	20	80	40	30	30	50	40	3	4	1
43	20	40	20	20	30	40	20	40	30	2	3	1
44	10	20	30	10	40	60	30	60	10	1	3	1
45	5	10	40	30	10	50	10	30	40	2	4	0,5
46	5	20	5	10	30	50	20	40	50	2	3	1,5
47	10	30	10	20	40	70	80	50	40	3	3	2
48	20	15	25	40	30	80	50	60	20	2	4	2,5
49	5	25	20	30	40	90	70	90	30	2	4	3
50	5	10	20	30	40	20	25	30	3	4	2	2
51	10	20	40	10	20	30	40	50	10	2	2	1
52	20	5	10	30	40	20	30	40	20	2,5	4	3
53	25	30	5	5	15	10	50	60	15	1	2	1,5
54	30	15	20	40	60	5	60	70	20	2	6	3
55	10	20	15	50	40	30	40	20	30	1	3	2
56	30	20	10	30	10	40	30	10	40	3	3	3
57	20	40	30	20	50	10	40	30	50	1	4	1

Номер варианта исходных данных	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$q_3, \text{кН/м}$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$M_1, \text{кН·м}$	$M_2, \text{кН·м}$	$M_3, \text{кН·м}$	$I_1, \text{м}$	$I_2, \text{м}$	$I_3, \text{м}$
58	10	30	20	40	60	20	50	20	40	2,5	3,5	2
59	40	20	20	10	50	20	30	20	20	2	3	1
60	10	40	6	10	50	60	20	30	60	4	4	2
61	6	10	20	30	45	100	20	10	50	3	3	2
62	15	20	40	15	20	40	30	20	20	2	4	3
63	50	5	60	40	10	80	40	20	40	1	6	2,5
64	10	20	30	10	5	20	10	60	50	2	2	0,5
65	5	40	20	20	15	30	20	40	30	3	4	2
66	15	20	10	25	40	40	20	30	10	4	4	4
67	20	30	25	30	50	60	20	10	20	2,5	6	1
68	15	30	20	20	60	40	20	10	30	2	3	1
69	20	10	50	30	20	60	30	40	60	1	3,5	3
70	40	30	20	50	10	80	60	10	50	1	3	2
71	40	30	20	10	30	20	20	40	60	2,5	3	1,5
72	20	10	30	40	20	30	30	50	20	1	2	1
73	20	30	20	40	30	20	30	50	10	3	4	2
74	40	20	20	60	50	30	20	40	30	3	5	3
75	30	40	20	50	30	60	20	50	10	2	4	2
76	30	50	20	20	40	60	40	20	40	2	4	1
77	30	50	40	40	20	40	20	20	40	2	5	2
78	30	50	10	60	40	20	40	20	20	2	5	1
79	30	50	5	60	20	60	20	40	20	2	4	2
80	30	50	20	40	20	60	10	20	40	2	5	2

$R = I_2$

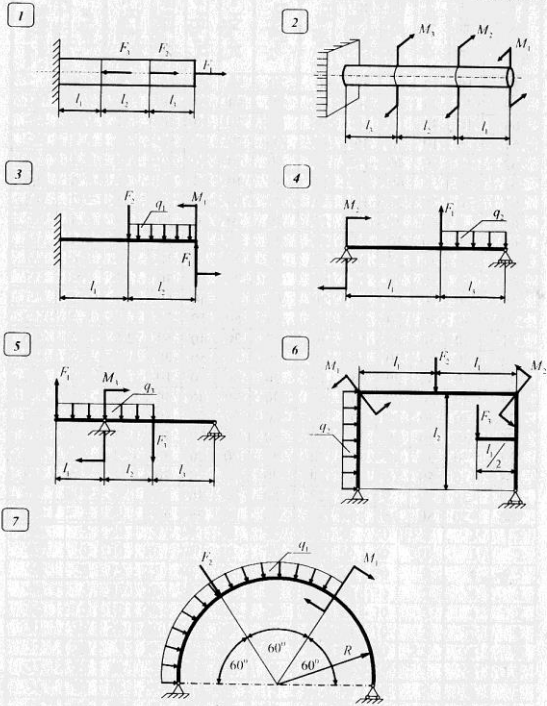


Рис. 1

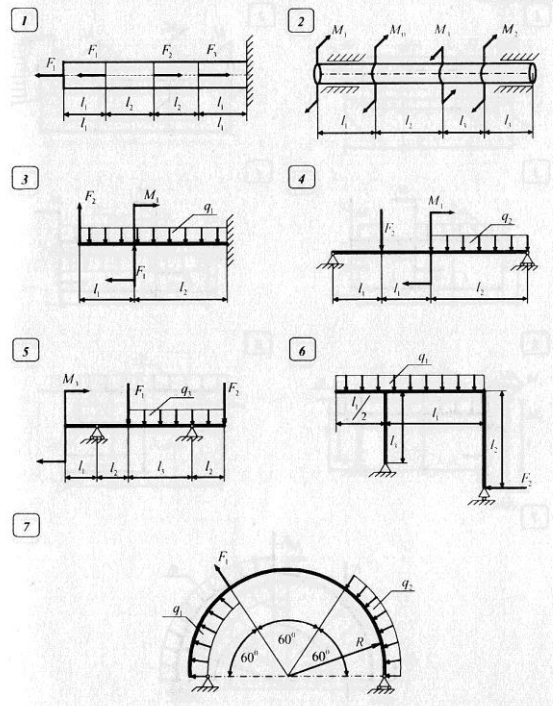


Рис. 2

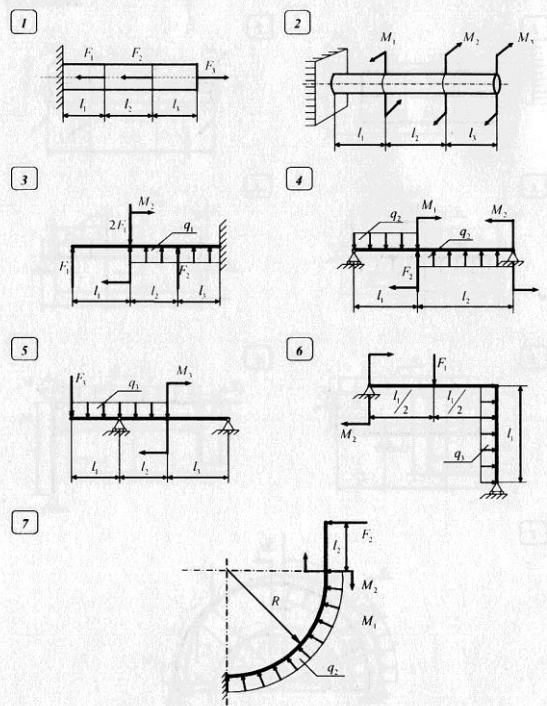


Рис. 5

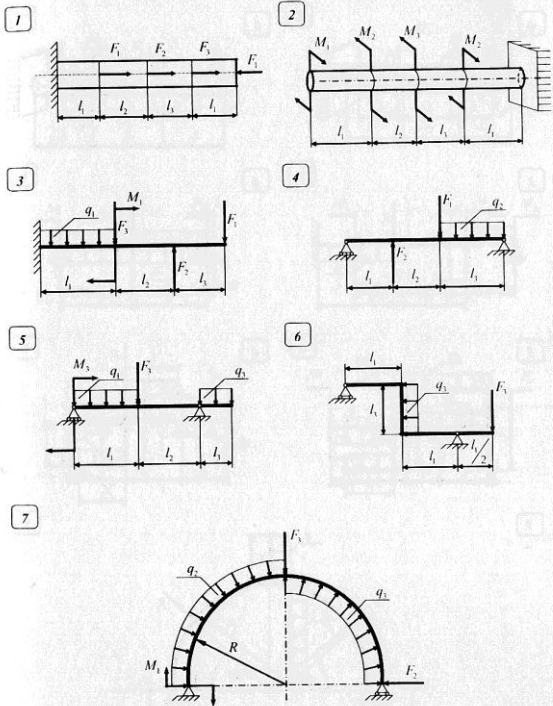


Рис. 6

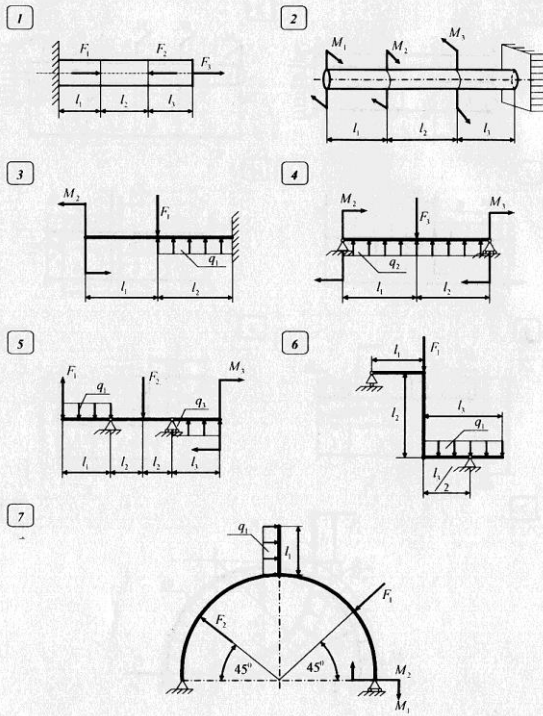


Рис. 7

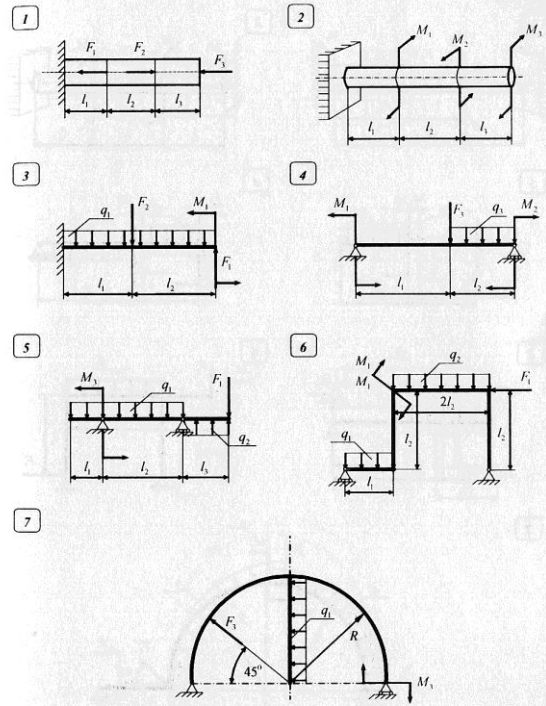


Рис. 8

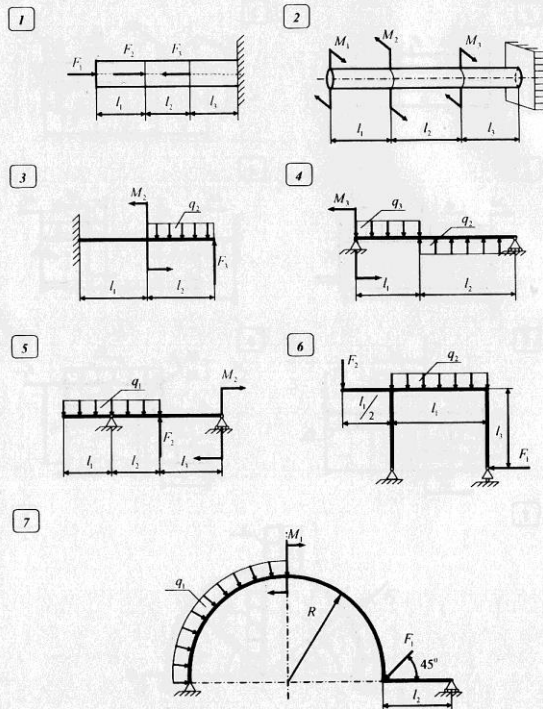


Рис. 9

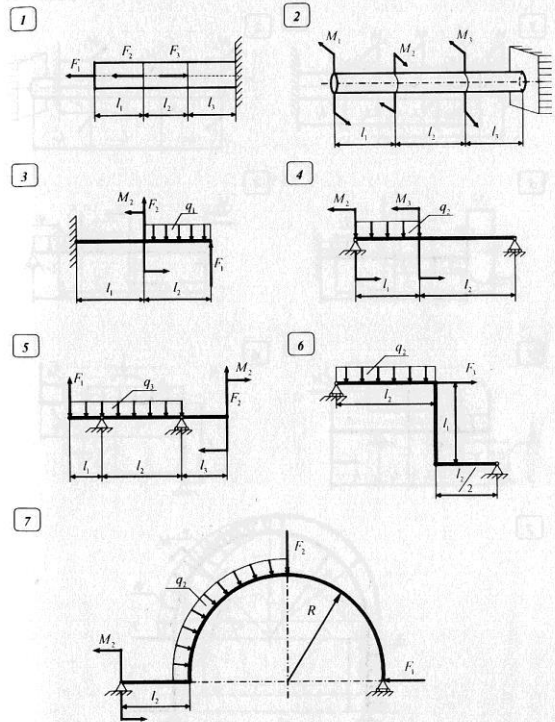


Рис. 10

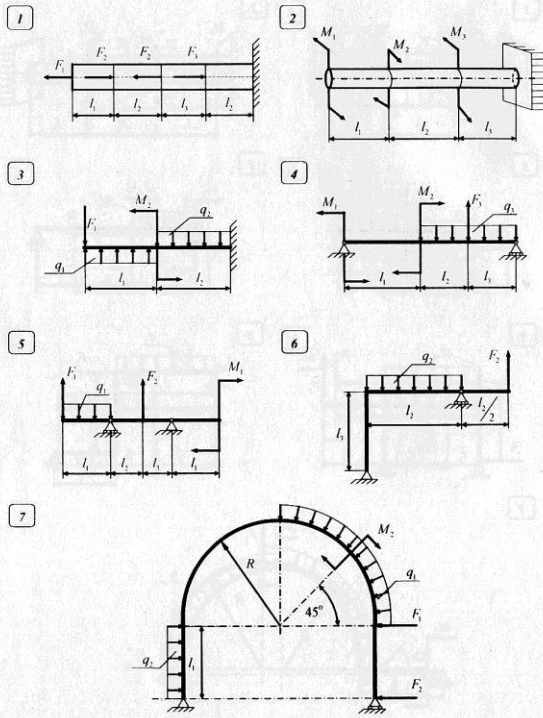


Рис. 11

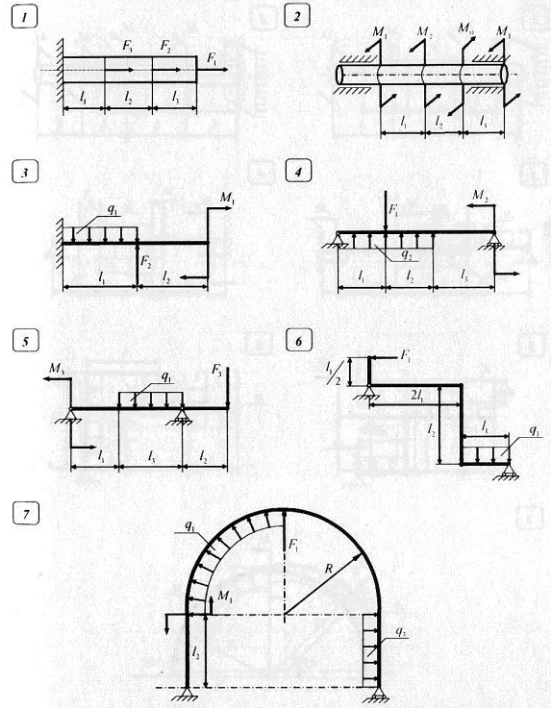


Рис. 12

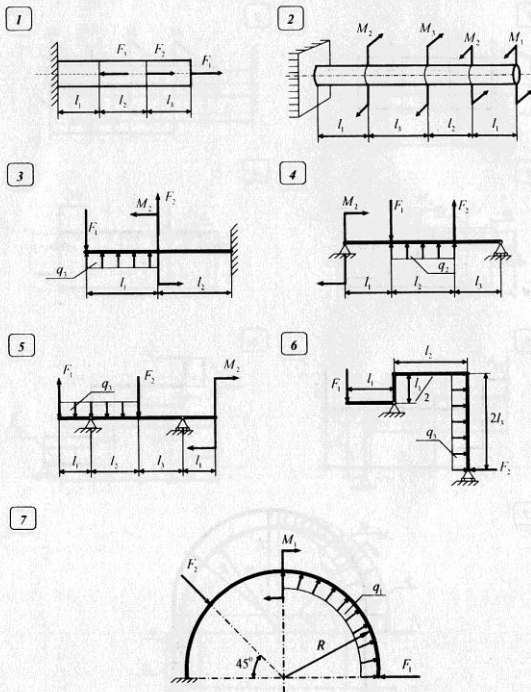


Рис. 13

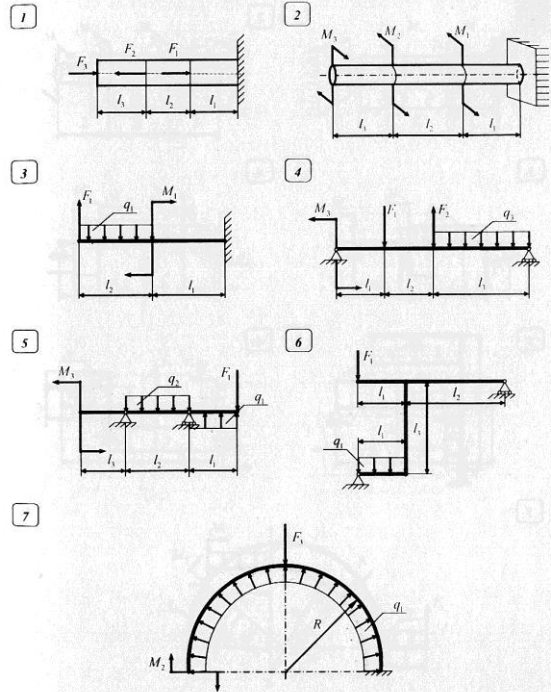


Рис. 14

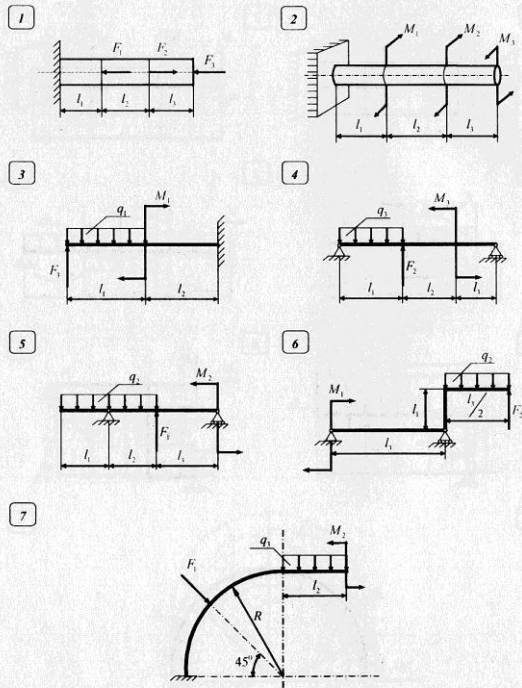


Рис. 15

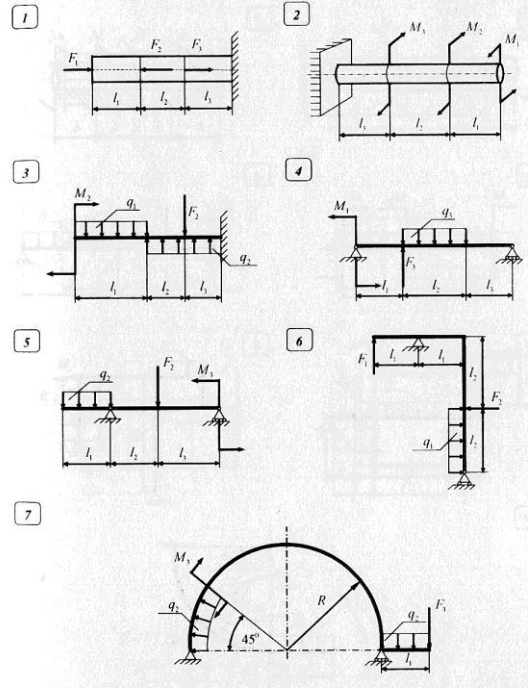


Рис. 16

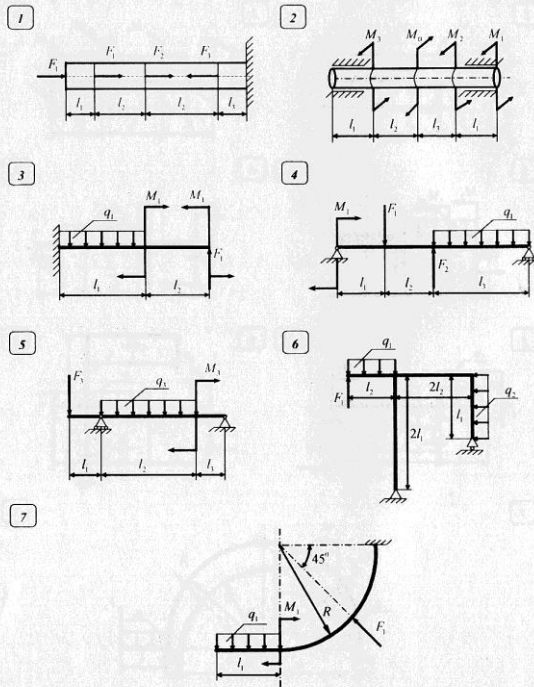


Рис. 17

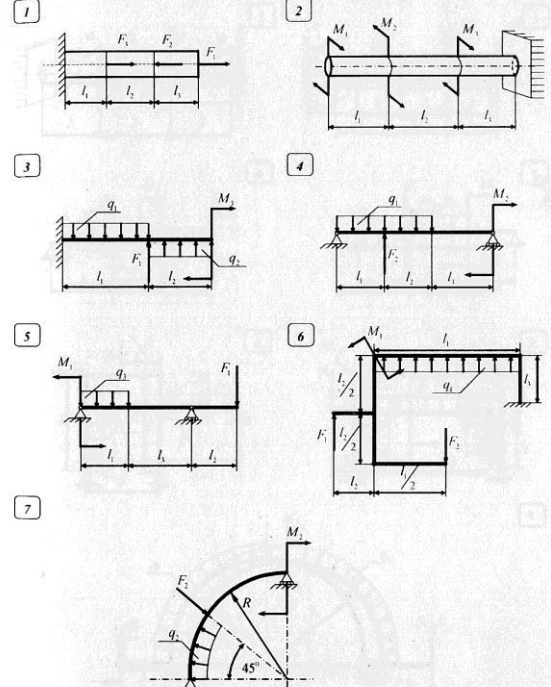


Рис. 18

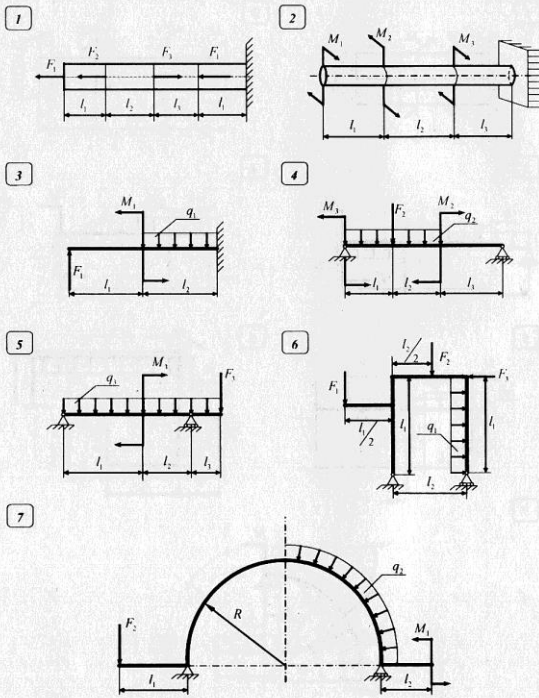


Рис. 19

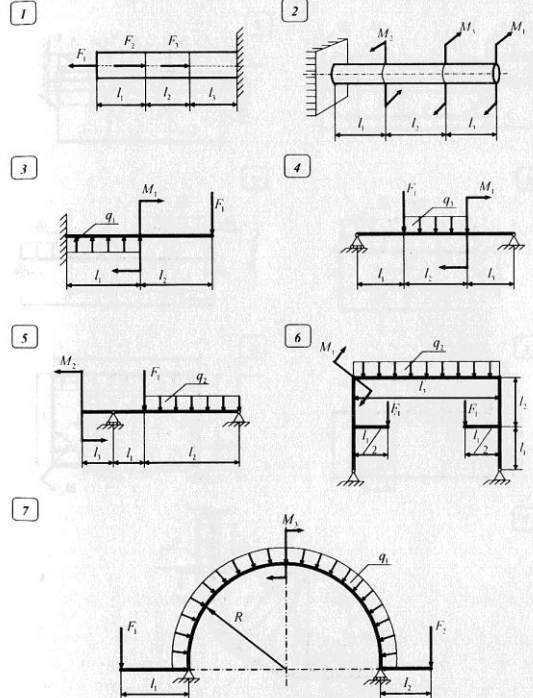


Рис. 20

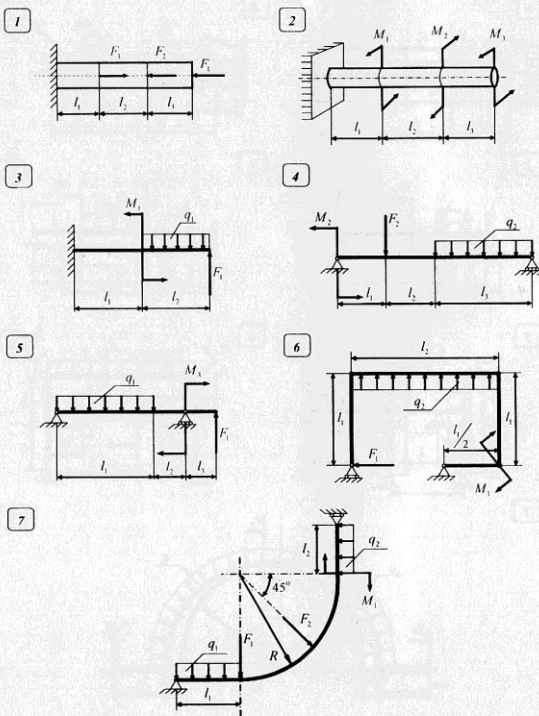


Рис. 21

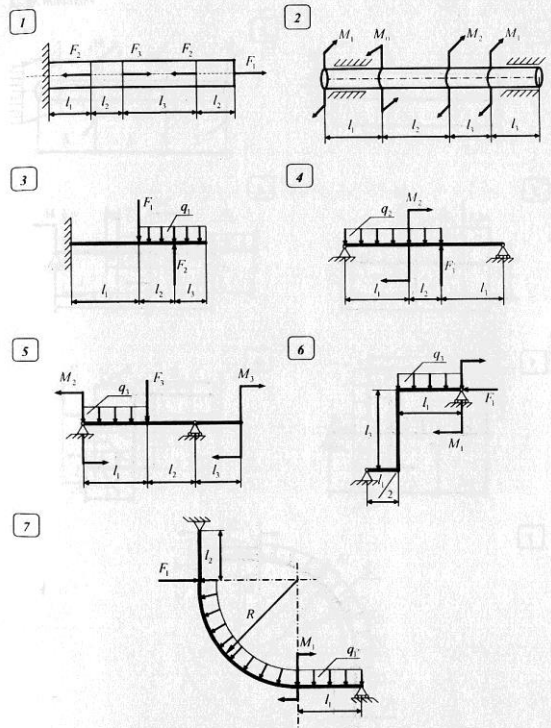


Рис. 22

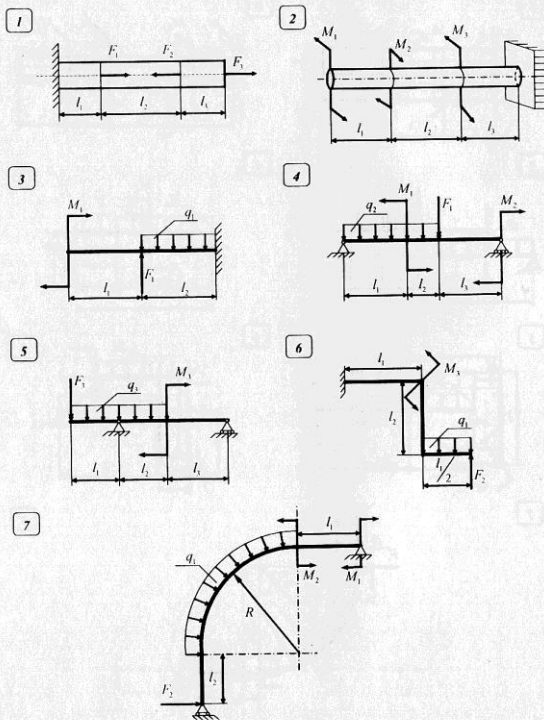


Рис. 23

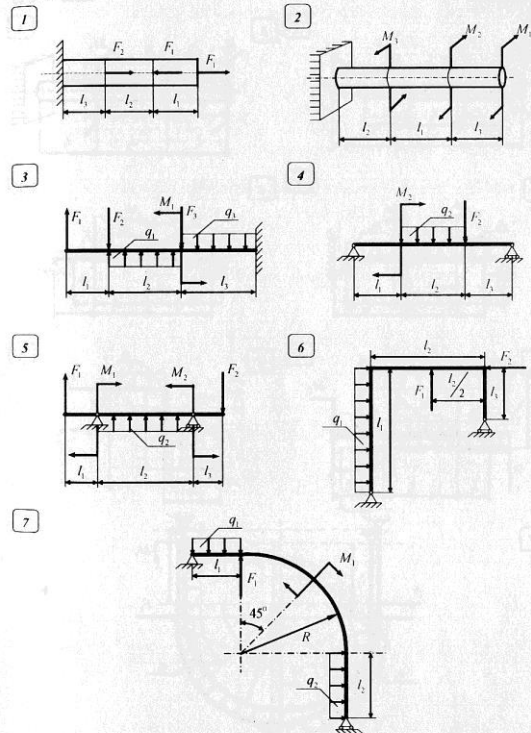


Рис. 24

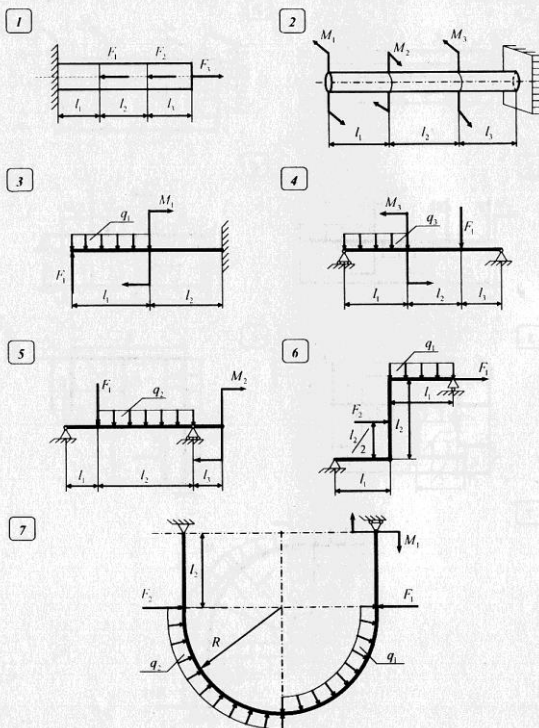


Рис. 25

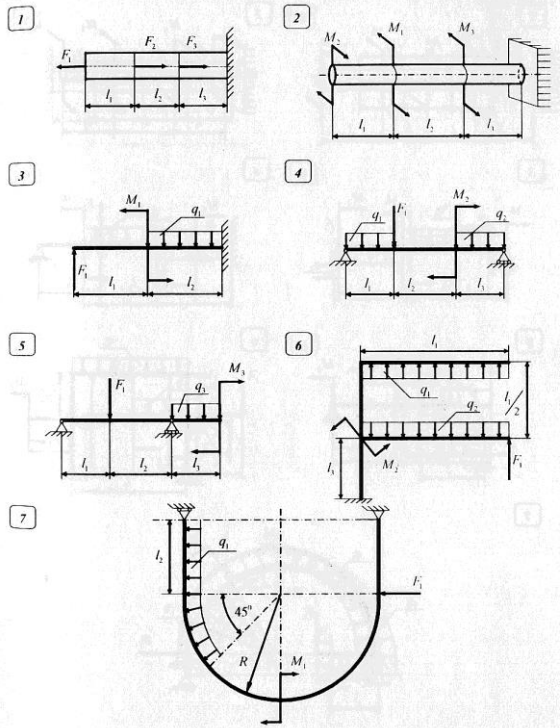


Рис. 26

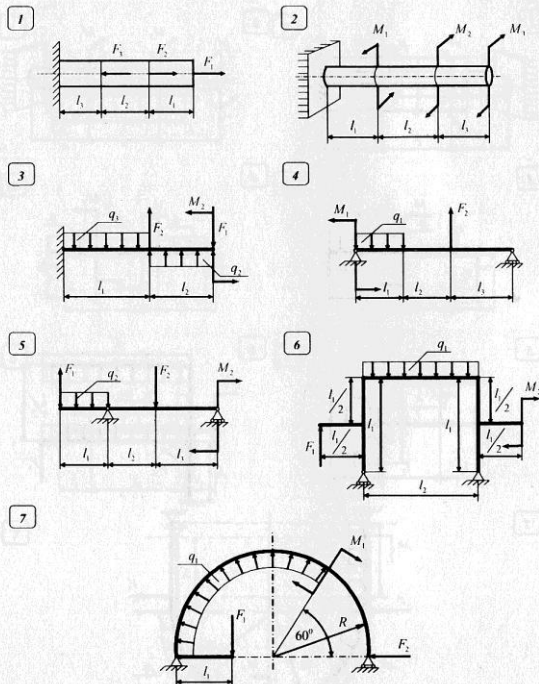


Рис. 27

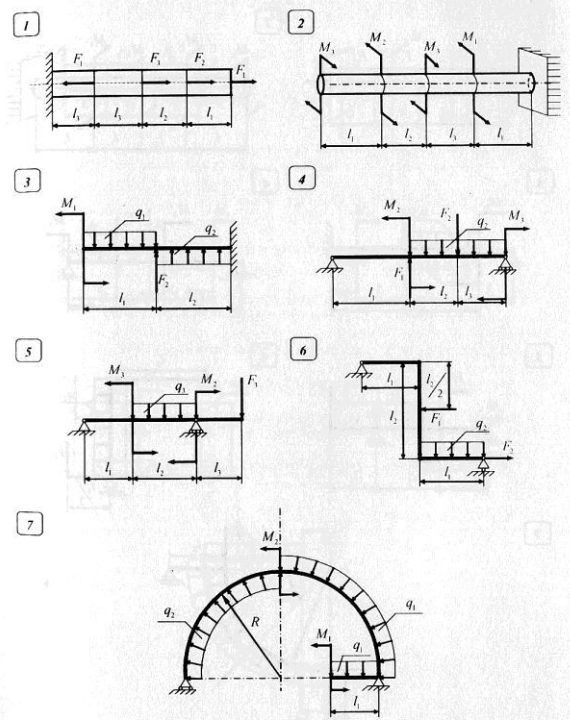


Рис. 28

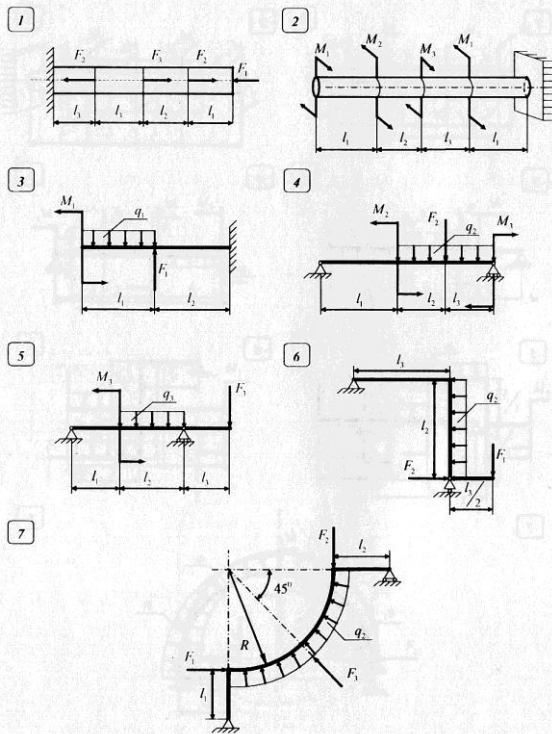


Рис. 29

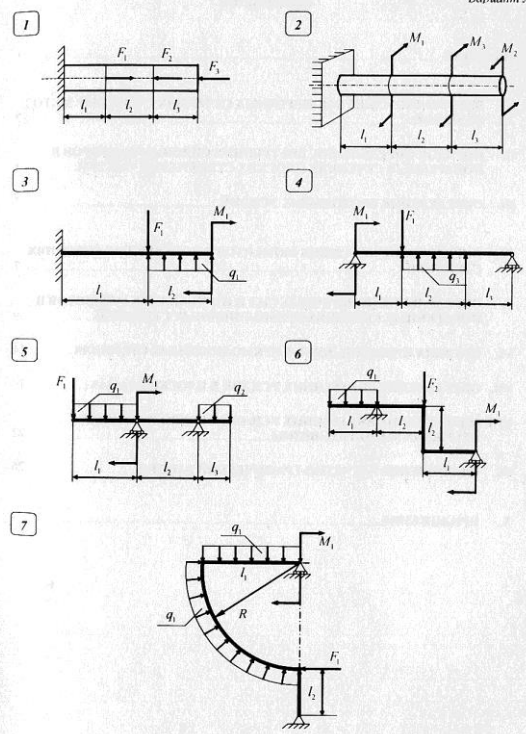


Рис. 30

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	1
I. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ.	2
II. ПОРЯДОК ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.	4
III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ.	4
IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ.	7
V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ.	9
VI. ПРАВИЛА ПРОВЕРКИ ЭПЮР В ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЯХ.	14
VII. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПЛОСКИХ РАМАХ.	16
VIII. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЯХ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ.	22
IX. ОФОРМЛЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.	26
X. ПРИЛОЖЕНИЕ.	27