

Изучение электростатических полей методом электролитической ванны.

ВВЕДЕНИЕ.

Метод электролитической ванны является наиболее практичным методом экспериментального исследования сложных электростатических полей. Такая задача возникает, например, при конструировании многоэлектродных электронных ламп или устройств, фокусирующих электроны в таких приборах как осциллограф, электронный микроскоп, электронно-оптический преобразователь изображений. Для построения траектории заряженных частиц в таких сложных полях должно быть известно распределение электростатического потенциала на всем пути движения заряженных частиц. Это распределение может быть получено или решением основного уравнения электростатики - уравнения Лапласа, или же экспериментальным методом.

Непосредственное решение уравнения Лапласа для большинства практических устройств представляет значительные математические трудности, или просто невозможно. Поэтому предпочитают применять экспериментальные методы. Известно несколько экспериментальных методов нахождения распределения потенциала в поле, созданном заряженными электродами. Наиболее простым и дающим в ряде случаев достаточную точность: является метод электролитической ванны.

МЕТОД ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЫ.

Пусть имеется электростатическое поле, созданное системой заряженных электродов. Представим себе, что мы заполнили пространство между ними однородной слабо проводящей средой, а потенциалы электродов поддерживаем постоянными и равными первоначальному. (Для того, чтобы поверхности электродов можно было считать эквивалентными необходимо, чтобы проводимость среды была много меньше проводимости материала электродов). Тогда в пространстве между электродами установится статическое электрическое поле напряженности \vec{E} и установившийся электрический ток плотности j . Причем в каждой точке пространства

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

где σ - проводимость среды (электролита). Для установившегося электрического тока в электролите

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Вследствие соотношения (1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} &= \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = \sigma \operatorname{div} \vec{E} = \\ \sigma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

(если σ - величина постоянная, т.е. проводимость электролита всюду одинакова)

Но

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Подставляя в (3) компоненты вектора \vec{E} , получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Лапласа для электростатического поля. По теореме единственности решение уравнения Лапласа однозначно определяется заданием потенциалов всех электродов. Поскольку потенциал электростатического поля также удовлетворяет уравнению Лапласа, то при одних и тех же потенциалах на электродах распределение потенциала в межэлектродном пространстве не зависит от среды, заполняющей это пространство. Поэтому распределение потенциала, полученное в электролитической ванне, может быть непосредственно перенесено на случай интересующих нас полей проводников в вакууме.

Как видно из вывода, полученный результат справедлив лишь, когда (σ не зависит от координат. Однако, эта зависимость возникает благодаря поляризации электролита вблизи электродов (появление избытков заряда одного знака). Чтобы избежать изменения σ вследствие поляризации, необходимо на электроды накладывать переменное электрическое поле. При этом переменное электрическое поле должно удовлетворять условию квазистационарности.

Обычно его сводят к требованию, чтобы длина электромагнитной волны

$\lambda = \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}$ в электролите была велика по сравнению с линейными размерами l самой

ванны, т. е. $\lambda \gg l$. Но существенна не только длина волны λ , но и глубина проникновения h электромагнитного поля в электролит (скин-эффект), а именно, линейные размеры ванны l должны быть малы как по сравнению с длиной волны λ , так и по сравнению с глубиной проникновения.

$$h = \frac{c}{2\pi\sqrt{v}}$$

Таким образом

$$l \ll h; \quad l \ll \lambda.$$

МЕТОД СЕЧЕНИЙ.

Пусть система заряженных электродов обладает осевой симметрией (все эквипотенциальные поверхности являются поверхностями вращения) и целиком погружена в электролит. Вообразим горизонтальную плоскость, содержащую ось симметрии. В силу симметрии электрическое поле не может иметь нормальной к этой плоскости компоненты. Допустим теперь, что вся система электродов разрезана вдоль указанной плоскости на две симметричные части (верхнюю и нижнюю). Удалим верхнюю часть электролита вместе с находящимися в нем электродами, заполнив верхнее полупространство каким-либо диэлектриком, например, воздухом. Если при этом потенциалы электродов в нижнем полупространстве сохранить прежними, то и электрическое поле там останется без изменения. Для

доказательства заметим, что нормальная компонента плотности тока \vec{j} в электролите на границе раздела должна обращаться в нуль, поскольку электролит граничит с диэлектриком. В противном случае, на границе происходило бы накопление зарядов. Согласно закону Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ должна обращаться в нуль и нормальная компонента электрического поля \vec{E} . Из электростатики известно, что задавая потенциалы всех проводников, а также нормальную компоненту вектора \vec{E} на границе, определяем однозначно электрическое поле. Из теоремы единственности решения вытекает, что электрическое поле во всем нижнем полупространстве остается без изменения. На этом и основано применение метода сечений, где исследуют не всю модель электродов, обладающих осевой симметрией, а только половину, полученную путем разрезания всей системы вдоль плоскости, проходящей через ось симметрии. Эту половину системы погружают в ванну с сохранением взаимного расположения электродов так, чтобы плоскость разреза совместилась с поверхностью электролита, и при помощи зонда получают распределение потенциала на поверхности электролита.

Ясно, что такое распределение будет совпадать с распределением потенциала в любой плоскости, проходящей через ось симметрии системы электродов. При этом получается то практическое преимущество, что

1. Поля, создаваемые подводными проводами к электродам и зонду, не вносят больших помех.
2. Очень удобно коротким зондом измерять распределение потенциала на поверхности электролита.

Пусть теперь имеется система электродов, расположение которых не зависит от одной из координат (например, z). Тогда и поле такой системы зависит только от двух других координат x и y . (Такие электрические поля называются плоскими). Для исследования таких полей, очевидно, достаточно осуществить в ванне лишь слой поля небольшой протяженности вдоль оси z , ограниченный сверху и снизу плоскими поверхностями из диэлектрика. Такими поверхностями могут служить дно ванны и граница электролита с воздухом. Электролитическую ванну, образованную тонким плоскопараллельным слоем электролита, называют плоской ванной.

Развивая дальше метод сечения, можно доказать, что для исследования полей, обладающих осевой симметрией, не обязательно осуществлять в ванне всю нижнюю половину поля. Так как для любой плоскости, проходящей через ось симметрии системы, нормальная составляющая вектора \vec{E} равна нулю, то достаточно осуществить в ванне лишь небольшой сектор поля, ограниченный плоскостями из диэлектрика, проходящими через ось симметрии под углом α друг к другу.

Для этого у ванны имеется подъемное дно, которое устанавливается под углом к поверхности электролита. На образовавшееся таким образом дно ванны кладут нужные электроды.

Замечание. Все сказанное справедливо, если проводящая среда заполняет безгранично ту область пространства, которая занята исследуемым полем (в первом случае - это полупространство, во втором - горизонтальный слой полупространства, в третьем - сектор полупространства), что имеет место лишь в ванне, размеры которой достаточно велики. На самом деле ванна имеет конечные размеры, поэтому стенки ванны (а в первом случае и дно ванны) искажают исследуемое поле, т.к. граничные условия на стенках ванны $E_n=0$ не совпадают с граничными условиями в отсутствии стенок ванны.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ.

Установка состоит из электролитической ванны, сделанной из материала с

хорошими изолирующими свойствами (органическое стекло), наполненной водопроводной водой. Ванна имеет подъемное дно и 4 клеммы для подключения электродов. Зонд представляет собой тонкую проволоку, один конец которой опускается примерно на 1 мм в воду, движется по поверхности воды и его положение фиксируется двумя взаимно-перпендикулярными линейками.

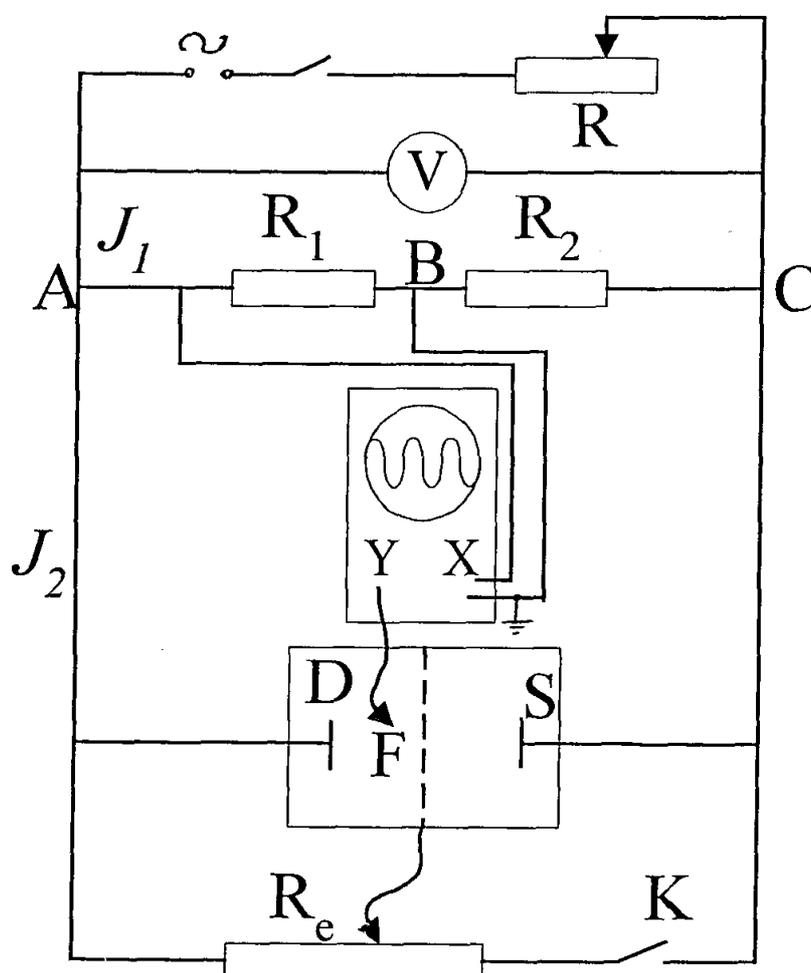


Рис. 1 Схема установки.

К ванне прилагается набор электродов, необходимых для решения поставленных в работе задач. В работе снимаются эквипотенциальные поверхности системы электродов. Для этого собирается схема (см. рис.1).

Схема представляет собой обычный мостик, плечами AB и BC служат магазины сопротивлений R_1 и R_2 , а плечами AF и FC -участки электролита между электродами D и S и зондом F .

Существование переходного слоя между электродами и электролитом приводит к тому, что в плечи DF и FS мостика оказываются включенными некоторые емкости C_1 и C_2 . Это приводит к тому, что между напряжениями U_{AB} и U_{DF} существует сдвиг по фазе.

Перемещая зонд F по поверхности электролита, можно найти такую точку, что U_{AB} будет равно по амплитуде U_{DF} , но т. к. между этими напряжениями существует сдвиг фаз, то между точками B и F будет существовать напряжение U_{BF} (см. рис. 2).

На этом рисунке изображена векторная диаграмма напряжений для схемы рис.1. Здесь вектор DM изображает падение напряжения на емкости переходного

слоя между электродом D и электролитом; MF - падение напряжения на омическом сопротивлении электролита между электродом D и зондом F , FN - между зондом F и электродом S ; NS - падение напряжения на емкости переходного слоя между электролитом и электродом S ; DB - падение напряжения на магазине R_1 ; BC - магазине R_2 (см. рис. 1).

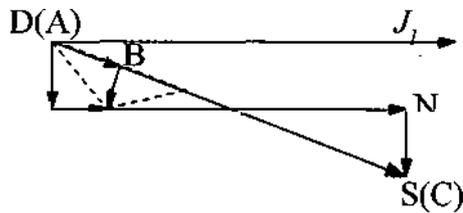


Рис. 2.

Из рис. 2 видно, что при равенстве потенциалов точек B и F напряжение U_{BF} сдвинуто по фазе по отношению к напряжению U_{AB} на $\pi/2$.

Если напряжение U_{BF} подать на горизонтальные пластины осциллографа¹, а напряжение U_{AB} на вертикальные пластины (рис.1), то на экране осциллографа при равенстве потенциалов точек B и F (по амплитуде) будет виден эллипс, оси которого ориентированы по горизонтальному и вертикальному направлениям.

В общем случае, когда потенциалы точек B и F различны, напряжение U_{BF} сдвинуто по фазе на произвольный угол относительно напряжения U_{AB} (на рис. 2 этот случай показан пунктиром) и на экране появляется произвольно ориентированный эллипс или прямая.

Для поддержания постоянной разности потенциалов на электродах D и S сопротивление $R_1 + R_2$ должно оставаться постоянным, равным сопротивлению одного из магазинов.

Задавая потенциал точки B в схеме рис. 1 $\varphi_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V$ (V - показание

вольтметра), перемещением зонда F находят точки на поверхности электролита, имеющие такой же потенциал, каждый раз фиксируя координаты этих точек. Совокупность этих точек образует эквипотенциальную линию исследуемого поля. Эквипотенциальная поверхность образуется вращением этой линии вокруг оси симметрии. Изменяя ступенями потенциал точки B , находят все семейство эквипотенциальных линий, вычерчивают их на листе миллиметровой бумаги, указывая на каждой линии соответствующее ей значение потенциала.

Начинают снятие эквипотенциальных линий со значения $\varphi = 0$. Таким потенциалом будет, очевидно, обладать один из электродов, поэтому нужно обвести поверхность электрода, чтобы нарисовать эквипотенциальную поверхность $\varphi = 0$.

Так как потенциал точки B пропорционален отношению $\frac{R_1}{R_1 + R_2}$, то

потенциал линии можно задавать этим отношением. Зная полное напряжение на электродах V всегда можно вычислить значение потенциала.

В некоторых задачах между основными электродами D и S нужно помещать дополнительные электроды (на рис.1 они обозначены пунктиром). Для этого служит потенциометр R_e , подвижный контакт которого соединяется с электродом. Перемещая подвижный контакт, можно менять потенциал дополнительного электрода φ_3 . Если добавочные электроды не требуются, то ключ K замыкают.

¹ С принципом действия и правилами работы с осциллографом ознакомьтесь по "Руководству к лабораторным работам" Соловьева В. А. (ч. II).

ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ.

I

1. Снять эквипотенциальные поверхности двух разноименно заряженных шариков.
2. Поместить между шариками дополнительный электрод - проводящую плоскость. Снять эквипотенциальные линии при различных значениях потенциала плоскости:

$$\varphi_3 = \varphi_{cp}; \varphi_{33} > \varphi_{cp}; \varphi_{33} < \varphi_{cp};$$

φ_{cp} — потенциал, который возникает в месте расположения плоскости при ее отсутствии.

3. Отсоединить шарик *Д*. При тех же значениях потенциалов плоскости снять эквипотенциальные линии поля заряженного шарика, помещенного возле заряженной плоскости. Сделайте вывод.

II

1. Снять эквипотенциальные линии двух одноименно заряженных шариков. Для этого в ванну помещают по стенкам проводящий экран и подают на него потенциал точки *С*. Оба шарика соединяют проводником и подают на них потенциал точки *А*.
2. Отсоединить один из шариков, поместить возле оставшегося изолирующую плоскость и снять эквипотенциальные линии поля заряженного шарика, помещенного возле изолированной плоскости. Сравните полученную картину с полем одноименно заряженных шариков. Сделайте вывод.

III

1. Снять эквипотенциальные линии поле плоского конденсатора. Обратит внимание на искривление поля на краях.
2. Поместить между пластинами плоского конденсатора металлическое цилиндрическое кольцо и снять эквипотенциальные линии в этих условиях (рис. 3).

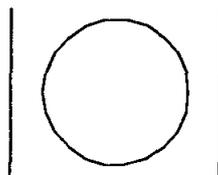


Рис. 3.

IV

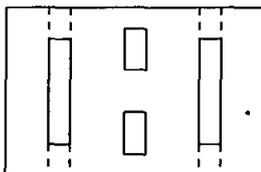


Рис. 4.

Исследовать распределение поля для случаев, когда потенциал средних пластин

$$\varphi_3 = \varphi_{cp}; \varphi_{33} > \varphi_{cp}; \varphi_{33} < \varphi_{cp};$$

φ_{cp} - потенциал, который возникает в месте расположения дополнительных

электродов в их отсутствии.

V

Снять эквипотенциальные линии двух пластинок с круглыми отверстиями (рис. 5). На рис. 5 изображена только одна половина электродов, которая будет погружаться в электролит. Пунктиром показан весь электрод. Такая система электродов является моделью электростатической линзы, применяющейся в фокусирующем устройстве осциллографа (См. "Руководство к лабораторным работам" ч. II Соловьев В.А.).

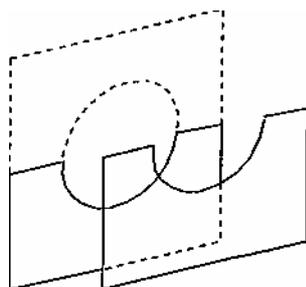


Рис. 5.

VI

Снять эквипотенциальные линии электростатической линзы, состоящей из двух полых цилиндров 1 и 2, расположенных на общей оси $a - a'$. Такая линза также используется в фокусирующем устройстве осциллографа (См. "Руководство к лабораторным работам" ч. II Соловьев В.А.).

Исследовать два случая:

1. Диаметры цилиндров одинаковые (рис. 6)

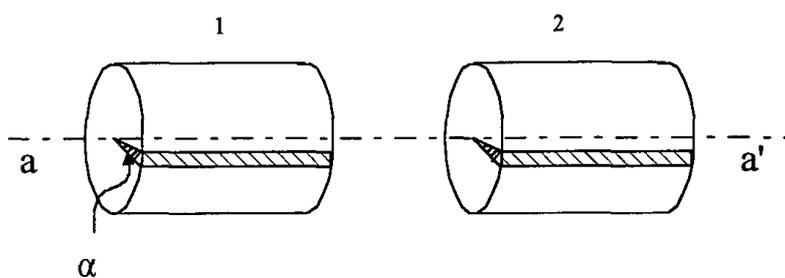


Рис. 6.

2. Диаметры цилиндров разные (рис. 7)

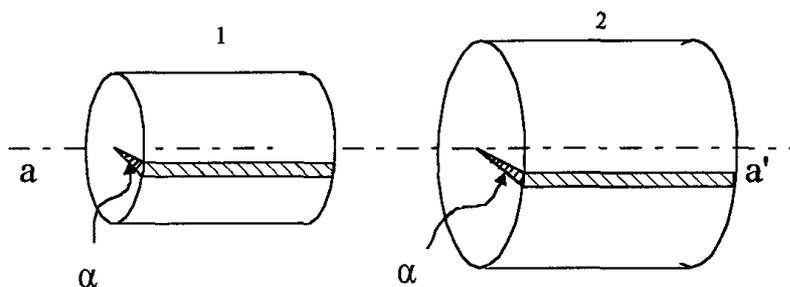


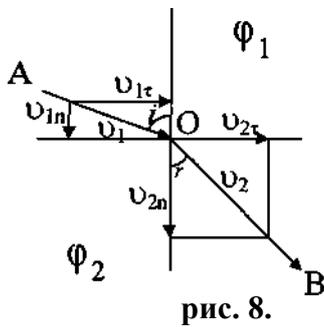
Рис. 7.

Так как такое поле обладает осевой симметрией (ось $a - a'$), то в ванне

достаточно осуществить лишь сектор такого поля, указанный на рис. 6 и 7 пунктиром. Для этого с помощью подъемного дна ванны образуют клин с углом α . В качестве электродов берут плоские проводящие пластинки. Поскольку в работе применяются плоские, а не цилиндрические электроды, угол клина α , образованный дном ванны и поверхностью электролита должен быть не слишком велик.

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.

В задачах IV, V, VI по полученной системе эквипотенциальных поверхностей надо уметь построить траекторию движения заряженной частицы. Траектория заряженной частицы, движущейся в вакууме, как правило, не совпадает с направлением нормали к эквипотенциальной поверхности. Существует аналогия между световой и электронной геометрической оптикой. Можно говорить о преломлении траектории аналогично преломлению лучей света.



Рассмотрим плоскую поверхность, которая разделяет две области (рис. 8).

Пусть потенциал над поверхностью будет φ_1 , под поверхностью φ_2 и $\varphi_1 < \varphi_2$.

Выше и ниже области скачка потенциала электрон движется по инерции прямолинейно и равномерно. На поверхности, благодаря скачку потенциала, на электрон начнет действовать сила, направленная нормально к границе раздела. Эта сила будет изменять лишь нормальную компоненту скорости v_n . Если электрон вступает в область скачка потенциала в направлении AO со скоростью v_1 , то после того, как он пройдет через поверхность, направление его движение изменится (направление OB), изменится и величина скорости v_2 . Тангенциальная компонента скорости v_τ останется неизменной, поэтому

$$v_1 \sin i = v_2 \sin r$$

Где i - угол падения

r - угол преломления

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_2}{v_1} \quad (5)$$

Эта зависимость между i и r по форме совпадает с известным законом преломления света и поэтому называется законом преломления в электронной оптике.

Этой формуле можно предать другой вид. Работа совершаемая электрическим полем при прохождении электрона из среды 1 в среду 2, равна $e(\varphi_2 - \varphi_1)$. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + e(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Отсюда

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{e(\varphi_2 - \varphi_1)}{1/2 m v_1^2}}$$

Если пренебречь начальной скоростью частицы и считать, что ее скорость определяется потенциалом среды 1, т.е.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = e\varphi_1, \text{ то}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}$$

И закон преломления (5) запишется в виде

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}} \quad (6)$$

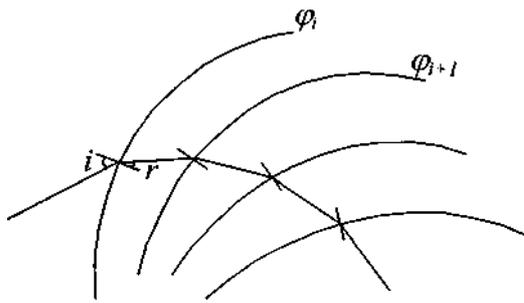


Рис. 9.

Для приближенного построения траектории заряженной частицы в электрическом поле, его разбивают на эквипотенциальные слои, разделенные эквипотенциальными поверхностями. Чем уже слои, тем точнее будет построение. От одной линии равного потенциала до другой (внутри слоя) движение частицы будем считать прямолинейным и равномерным, а на линиях равного потенциала будет происходить преломление хода частицы по закону

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \sqrt{\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}}$$

Измеряют угол падения i (рис. 9), вычисляется угол преломления r .

Проводят короткую прямую линию до пересечения ее со следующей линией равного потенциала. Этим методом можно получить достаточно точную траекторию движения частицы, если иметь большое число линий равного потенциала. Существуют другие более точные методы построения траектории заряженных частиц по системе эквипотенциальных линий.

ПОРЯДОК РАБОТЫ.

1. Получить задание у преподавателя.
2. Собрать схему согласно рис. 1 и снять эквипотенциальные линии заданной системы электродов.
3. Построить распределение эквипотенциальных линий заданной системы электродов.
4. По найденному распределению поля построить траекторию частицы через заданную фокусирующую систему электродов (задания IV, V, VI).

ЛИТЕРАТУРА.

1. Калашников С. Г. "Электричество".
2. Тамм И. Е. "Теория электричества".