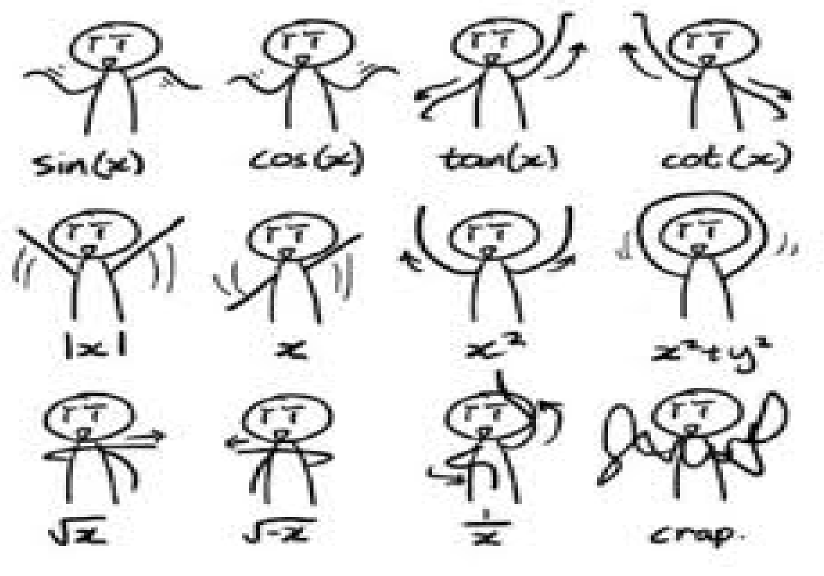
Типовые расчеты по высшей математике

1 семестр (2 модуль)

Предел и непрерывность функции.

Дифференцирование функции одной переменной

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Сильванович О.В., Тимофеева Г.В

Типовые расчеты по высшей математике

1 семестр (2 модуль)

Предел и непрерывность функции.

Дифференцирование функции одной переменной

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2012

Вариант типового расчета для 2 модуля

1. Найти пределы:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4\cdot 7}+\dfrac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)$ 1.2 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}$

1.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$ 1.4 $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

1.5 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x+19}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[5]{4x}-2}$ 1.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

1.7* а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$ в) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

2. Исследовать функции на непрерывность и построить их графики:

2.1 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x},\ x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le 2,\\ x-2,\ x>2\end{cases}$ 2.2 $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2+2x-15}$ 2.3* $f(x)=5^{\frac{9}{x^2-9}}$

3.1. Продифференцировать функцию $y=\arcsin e^x+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. Упростить полученное выражение.

3.2. Продифференцировать функции:

а) $y=\dfrac{(x-4)^7\cdot(5x+1)^3}{\left(5x^2+3\right)\cdot\left(\operatorname{tg}(0{,}1x)-4\right)^8}$ б) $y=x^{\operatorname{arcctg}(5x-2)}$

3.3*. Найти производную функции $f(x)=\sqrt[3]{5x-2}$, пользуясь непосредственно определением производной.

3.4. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{1+x^3}-\dfrac{5}{1+x^5}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$

3.5*. Записать формулу для производной $n-$го порядка функции $y=\dfrac{1}{x+5}$.

4. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ б*) $y=x\cos x$ в*) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$

5. а) Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 20. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?

б*) Определить наибольшее отклонение от нуля функции $y=x+\sin 2x$ на отрезке $[0;\pi]$.

в*) Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+2$ и отрезками прямых $x=1$; $x=5$; $y=0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Методические указания

Типовой расчет содержит пять заданий. Отмеченные “звездочкой” задачи сложнее остальных и выполняются по желанию.

Задача 1.1. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)$.

Решение. Представим дробь $\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$ в виде разности двух дробей $\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}$.

Тогда n-ый член последовательности можно переписать в виде

$$\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}.$$

Дробь $\frac{1}{3n+4}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Задача 1.2. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 при $x\to-\frac{1}{3}$, то есть получается неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, воспользовавшись информацией о том, что один корень уравнений $x=-\frac{1}{3}$ уже известен, тогда

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18x^3+21x^2+8x+1}{9x^3-3x^2-5x-1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{18\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2(x-1)}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+1}{x-1}=-\frac{1}{4}.$$

Задача 1.3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

Решение. Делением числителя дроби на знаменатель выделим целую часть $\frac{2x+3}{5x+7}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5x+7)}$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5x+7)}\right)^{x+1}$. Дробь $\frac{1}{5(5x+7)}$ является бесконечно малой при $x\to\pm\infty$, тогда при $x\to+\infty$ получим

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{+\infty}\right]=0$, при $x\to-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-\infty}\right]=+\infty$.

Задача 1.4. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. По формулам приведения $\operatorname{tg}2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}2x$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{\operatorname{tg}2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{-\operatorname{ctg}2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{\left(-\frac{1}{5x}\right)\cdot(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}$. Используя второй замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{-\frac{1}{5x}}=e$. Так как $y=e^{x}$ непрерывная на всей числовой оси функция, поменяем местами знаки вычисления предела и показательной функции и найдем, что $\lim\limits_{x\to 0}e^{(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-5x)\cdot(-\operatorname{ctg}2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{tg}2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x}}=e^{2,5}$. Здесь было использовано правило замены на эквивалентные бесконечно малые функции: $tg2x\sim 2x$ при $x\to 0$.

Задача 1.5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x+19}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[5]{4x}-2}$.

Решение. Для раскрытия неопределённости вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-8$, тогда $t\to 0$. Функцию преобразуем следующим образом

$$\frac{\sqrt[3]{t+8+19}-\sqrt{t+8+1}}{\sqrt[5]{4(t+8)}-2}=\frac{\left(\sqrt[3]{t+27}-3\right)-\left(\sqrt{t+9}-3\right)}{\sqrt[5]{4t+32}-2}=\frac{3\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1\right)-3\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1\right)}{2\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}.$$

Далее можно использовать эквивалентные бесконечно малые функции $\left(1+y\right)^{m}-1\sim ym$. Предел разности функций запишем в виде разности пределов и получим:

$$\lim_{t\to 0}\frac{3\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1\right)-3\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1\right)}{2\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{t}{27}}-1\right)}{\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-1\right)}{\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{t}{8}}-1\right)}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{27}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{t}{8}}-\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{9}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{t}{8}}=\frac{3}{2}\left(\frac{40}{81}-\frac{20}{9}\right)=-\frac{70}{27}.$$

Задача 1.6. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

Решение. Заметим, что при $x\to +\infty$ функции $\sin\sqrt{x+1}$ и $\sin\sqrt{x}$ не имеют предела, а принимают все возможные значения от -1 до 1. Воспользуемся формулой для разности синусов и получим: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$. Функция $\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ ограничена. Аргумент функции $\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$ преобразуем, домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$. Полученная функция $\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую будет бесконечно малым, а, значит, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0$.

Задача 1.7*. **а)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-1;\ t\to0$. Тогда $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1+t)^{100}-2(1+t)+1}{(1+t)^{50}-2(1+t)+1}$. Разложим по формуле бинома Ньютона

$$(1+t)^{100}=1+100t+\frac{100\cdot99}{2}t^2+...+t^{100},\ (1+t)^{50}=1+50t+\frac{50\cdot49}{2}t^2+...+t^{50}.$$

Для вычисления предела будем пренебрегать бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем t. Тогда найдем, что

$$\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{100}-2(1+t)+1}{(1+t)^{50}-2(1+t)+1}=\lim_{t\to0}\frac{1+100t-2(1+t)+1}{1+50t-2(1+t)+1}=\lim_{t\to0}\frac{98t}{48t}=\frac{49}{24}.$$

Задача 1.7*. **б)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ сделаем замену переменной $t=x-3;\ \ t\to0$, тогда

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{\sin x}{\sin3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin(t+3)}{\sin3}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t\cdot\cos3+\cos t\cdot\sin3}{\sin3}\right)^{\frac{1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\sin t\cdot\operatorname{ctg}3+\cos t\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\left(1+\left(\sin t\cdot\operatorname{ctg}3+\cos t-1\right)\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Здесь функция $\cos t-1$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\sin t\cdot\operatorname{ctg}3$, поэтому ею можно пренебречь. Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, найдем: $\lim\limits_{t\to0}\left(1+\sin t\cdot\operatorname{ctg}3\right)^{\frac{1}{\sin t\cdot\operatorname{ctg}3}\cdot\frac{\sin t\cdot\operatorname{ctg}3}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t\cdot\operatorname{ctg}3}{t}}=e^{\operatorname{ctg}3}$.

Задача 1.7*. **в)** Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Раскроем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, введя новую переменную $t=x+1;$ $t\to+0$. Далее домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и получим

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{t\to +0}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos(t-1)}}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to +0}\frac{\pi-\arccos(t-1)}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)}.$$

Бесконечно малую функцию $\pi-\arccos(t-1)$ при $t\to +0$ заменим на эквивалентную $\sin\left(\pi-\arccos(t-1)\right)=\sin\arccos(t-1)=\sqrt{1-(t-1)^2}=\sqrt{t}\cdot\sqrt{2-t}$. Тогда

$$\lim_{t\to +0}\frac{\pi-\arccos(t-1)}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)}=\lim_{t\to +0}\frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt{2-t}}{\sqrt{t}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos(t-1)}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Задача 2.1. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x},\ x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le 2,\\ x-2,\ x>2\end{cases}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, но не является на ней непрерывной, так как эта функция неэлементарная. Она задана тремя различными формулами для разных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрывы в точках $x=0$ и $x=2$, где меняется её аналитическое выражение. Исследуем поведение функции при приближении к точке $x=0$ слева и справа: $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\sqrt{1-x}=1$, а $f(+0)=\lim\limits_{x\to -0}0=0$. Значит, это точка разрыва 1 рода (или конечного разрыва). Далее $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}0=0$, $f(2+0)=$ $=\lim\limits_{x\to 2+0}x-2=0$, то есть в точке $x=2$ функция непрерывна. График функции представлен на рисунке 1.

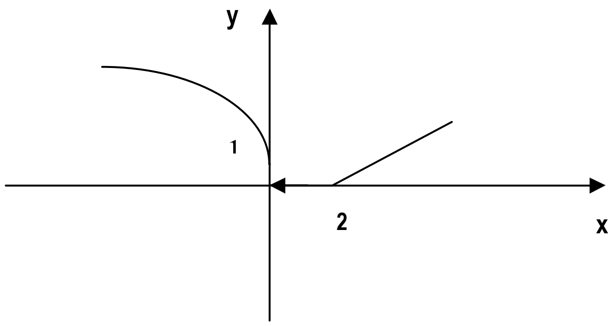


Рис.1

Задача 2.2. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2+2x-15}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Разложим знаменатель этой элементарной функции на множители и получим $f(x)=\dfrac{|x+5|}{(x+5)(x-3)}$. Эта функция определена и непрерывна во всех точках области определения: $-\infty<x<-5;\ -5<x<3;\ 3<x<+\infty$. В точках $x=-5$ и $x=3$ она не определена, поэтому имеет в них разрывы. Вычислим лево и правосторонние пределы функции в этих точках:

$$\lim_{x\to-5-0} f(x) = \lim_{x\to-5-0} \frac{-(x+5)}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to-5-0} \frac{-1}{x-3} = \frac{1}{8},$$

$$\lim_{x\to-5+0} f(x) = \lim_{x\to-5+0} \frac{x+5}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to-5+0} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, в точке $x=-5$ функция имеет конечный разрыв, её скачок

$$\lim_{x\to-5+0} f(x) - \lim_{x\to-5-0} f(x) = -\frac{1}{4}.$$

Далее $\lim\limits_{x\to3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to3-0} \dfrac{x+5}{(x+5)(x-3)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to3+0} \dfrac{x+5}{(x+5)(x-3)} = \infty$. Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет бесконечный разрыв (или разрыв 2 рода). График функции представлен на рисунке 2.

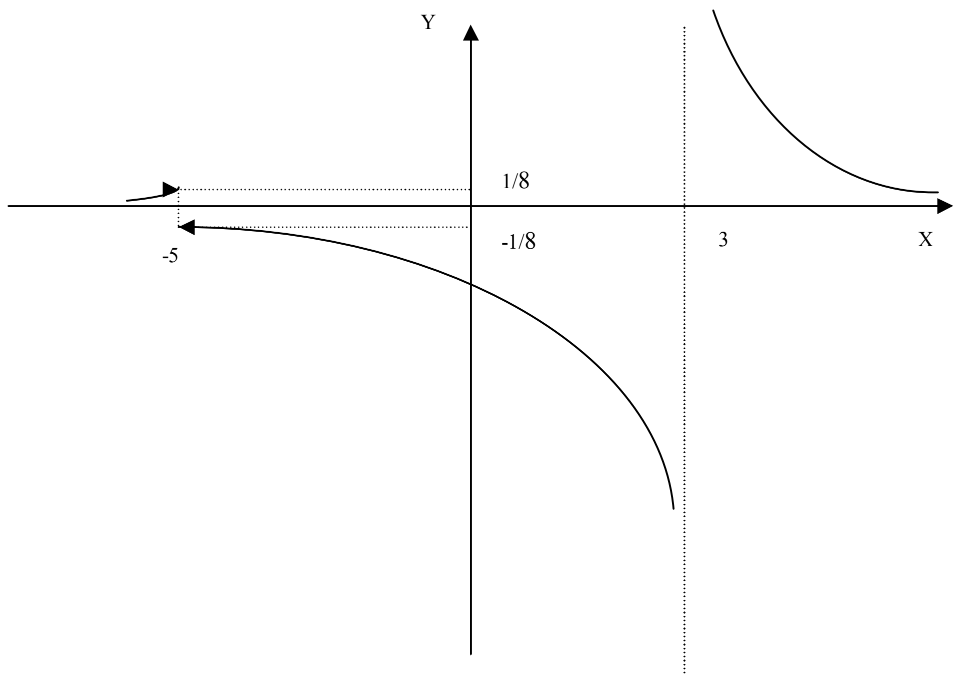


Рис.2

Задача 2.3*. Исследовать функцию $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$ на непрерывность и построить её график.

Решение. Элементарная функция $f(x) = 5^{\frac{9}{x^2-9}}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm 3$. Так как выполнено условие $f(x) = f(-x)$, то функция является четной, а, значит, можно исследовать на разрыв только одну точку, например, $x=3$. Вычислим односторонние пределы функции в этой точке. Так как $\lim\limits_{x\to3-0} \dfrac{9}{x^2-9} = -\infty$, то

$\lim\limits_{x\to3-0} 5^{\frac{9}{x^2-9}} = \left[5^{-\infty}\right] = 0$. Далее $\lim\limits_{x\to3+0} \dfrac{9}{x^2-9} = +\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to3+0} 5^{\frac{9}{x^2-9}} = \left[5^{+\infty}\right] = +\infty$.

Следовательно, точка $x=3$, как и точка $x=-3$, является точкой разрыва 2 рода. График функции представлен на рисунке 3:

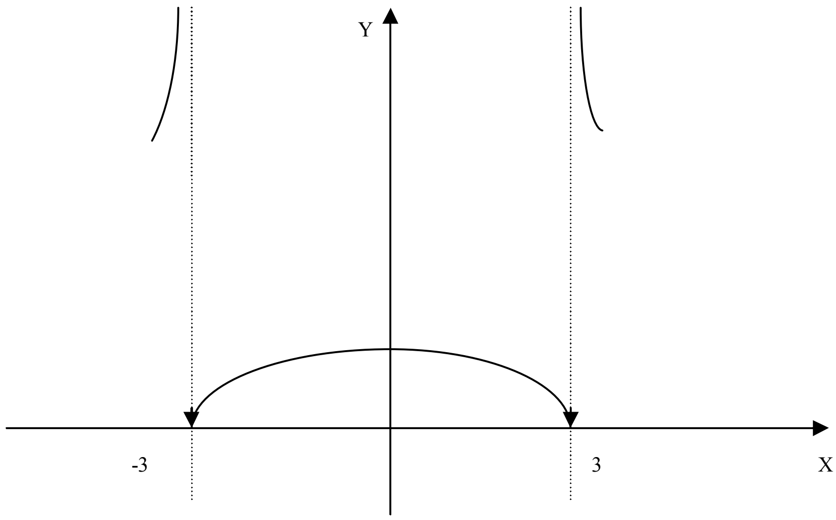


Рис.3

Задача 3.1. Продифференцировать функцию $y=\arcsin e^{x}+\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. Упростить полученное выражение.

Решение. Продифференцируем функцию как сумму двух функций и упростим результат:

$$y'=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-e^{2x}\right)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot\left(-2e^{2x}\right)=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\frac{e^{2x}}{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}=0.$$

Задача 3.2. а) Продифференцировать функцию $y=\dfrac{(x-4)^{7}\cdot(5x+1)^{3}}{\left(5x^{2}+3\right)\cdot\left(\operatorname{tg}(0{,}1x)-4\right)^{8}}$.

Решение. Вначале преобразуем функцию согласно свойствам логарифмов $\ln y=7\ln(x-4)+3\ln(5x+1)-\ln\left(5x^{2}+3\right)-8\ln\left(\operatorname{tg}(0{,}1x)-4\right)$, а затем применим логарифмическое дифференцирование и найдем:

$$\frac{y'}{y}=\frac{7}{x-4}+\frac{15}{5x+1}-\frac{10x}{5x^{2}+3}-\frac{8}{\operatorname{tg}(0{,}1x)-4}\cdot\frac{0{,}1}{\cos^{2}(0{,}1x)},$$

откуда $y'=\dfrac{(x-4)^{7}\cdot(5x+1)^{3}}{\left(5x^{2}+3\right)\cdot\left(\operatorname{tg}(0{,}1x)-4\right)^{8}}\cdot\left(\dfrac{7}{x-4}+\dfrac{15}{5x+1}-\dfrac{10x}{5x^{2}+3}-\dfrac{8}{\operatorname{tg}(0{,}1x)-4}\cdot\dfrac{0{,}1}{\cos^{2}(0{,}1x)}\right).$

Задача 3.2. б) Продифференцировать функцию $y=x^{\operatorname{arcctg}(5x-2)}$.

Решение. Запишем функцию в виде показательной $y=e^{\operatorname{arcctg}(5x-2)\cdot\ln x}$, а затем продифференцируем, используя теорему о производной произведения:

$$y'=e^{\operatorname{arcctg}(5x-2)\cdot\ln x}\left(-\frac{5}{1+(5x-2)^{2}}\cdot\ln x+\operatorname{arcctg}(5x-2)\cdot\frac{1}{x}\right).$$

Теперь вернемся к первоначальной форме записи функции и получим ответ

$$y'=x^{\operatorname{arcctg}(5x-2)}\left(-\frac{5\ln x}{1+(5x-2)^{2}}+\frac{\operatorname{arcctg}(5x-2)}{x}\right).$$

Задача 3.3*. Найти производную функции $y=\sqrt[3]{5x-2}$, пользуясь непосредственно определением производной.

Решение. Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy:

$y+\Delta y=\sqrt[3]{5(x+\Delta x)-2}$, откуда $\Delta y=\sqrt[3]{5(x+\Delta x)-2}-\sqrt[3]{5x-2}$. Исходя из определения производной, найдем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(5(x+\Delta x)-2\right)^{\frac{1}{3}}-(5x-2)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{5x-2+5\Delta x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{5\Delta x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{\Delta x}.$$ Заменим бесконечно малую функцию $\left(1+\frac{5\Delta x}{5x-2}\right)^{\frac{1}{3}}-1$

на эквивалентную $\frac{1}{3}\cdot\frac{5\Delta x}{5x-2}$ и получим $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{5\Delta x}{3(5x-2)}}{\Delta x}=\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-2)^2}}$.

Задача 3.4. а) Найти предел $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3}{1+x^3}-\frac{5}{1+x^5}\right)$, используя правило Лопиталя.

Решение. Предел представляет собой неопределённость вида $[\infty-\infty]$, поэтому преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к 0, а затем применим правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3\left(1+x^5\right)-5\left(1+x^3\right)}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(3\left(1+x^5\right)-5\left(1+x^3\right)\right)'}{\left(\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)\right)'}=\lim_{x\to -1}\frac{15x^4-15x^2}{3x^2\left(1+x^5\right)+\left(1+x^3\right)\cdot 5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{15x^2\left(x^2-1\right)}{x^2\left(3\left(1+x^5\right)+\left(1+x^3\right)\cdot 5x^2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(15\left(x^2-1\right)\right)'}{\left(3\left(1+x^5\right)+\left(1+x^3\right)\cdot 5x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{30x}{15x^4+3x^2\cdot 5x^2+\left(1+x^3\right)\cdot 10x}=\lim_{x\to -1}\frac{30x}{40x^4+10x}=-1.$$

Задача 3.4. б) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$, используя правило Лопиталя.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$. Обозначим искомый предел через a и прологарифмируем функцию, тогда $\ln a=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{3}{x}}$. Найдем предел её логарифма:

$$\ln a=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)\right)'}{(x)'}=3\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\frac{6}{\pi}.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции найдем предел самой функции: $a=e^{-\frac{6}{\pi}}$.

Задача 3.5*. Записать формулу для производной $n-$го порядка функции $y=\frac{1}{x+5}$.

Решение. Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, найдем: $y'=\frac{-1}{(x+5)^2}$,

$$y''=\frac{(-1)(-2)}{(x+5)^3},\ y'''=\frac{(-1)(-2)(-3)}{(x+5)^4},\ldots,y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+5)^{n+1}}.$$

Задача 4. Провести полное исследование функций и построить их графики. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и указать, как эти свойства влияют на вид графика функции.
3. Исследовать функцию с помощью первой производной: найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
4. Исследовать функцию с помощью второй производной: найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
5. Проверить наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найти значения функции в некоторых дополнительных точках.

а) Провести полное исследование функции $y=\frac{x^2-3}{x-2}$ и построить её график.

Решение.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точки $x=2$.
2. Функция не является периодической. Проверим чётность (нечётность):

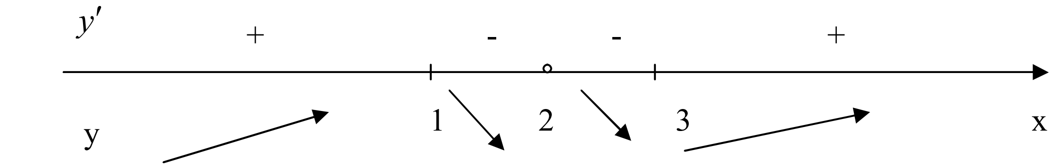
$f(-x)=\frac{(-x)^2-3}{-x-2}=\frac{x^2-3}{-x-2}$; $f(-x)\neq f(x)$; $f(-x)\neq -f(x)$. Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной – график функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра системы координат.

3. Найдём первую производную функции $y=\frac{x^2-3}{x-2}$:

$$y'=\left(\frac{x^2-3}{x-2}\right)'=\frac{(x^2-3)'(x-2)-(x^2-3)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2x\cdot(x-2)-x^2+3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=$$

$=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$. Тогда $y'=0$ при $x_1=1, x_2=3$.

Проверим знаки производной:

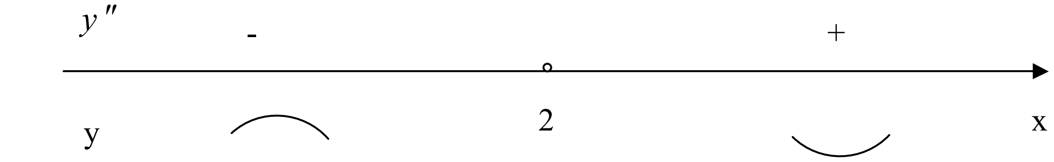


Значит, функция возрастает при $x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$ и убывает при $x \in (1;2) \cup (2;3)$. При переходе через стационарную точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, точка $x=1$ - точка максимума и $y_{\max} = y(1) = 2$. При переходе через стационарную точку $x=3$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x=3$ - точка минимума и $y_{\min} = y(3) = 6$.

4. Найдём вторую производную функции $y = \dfrac{x^2-3}{x-2}$:

$$y'' = \left(\frac{x^2-3}{x-2}\right)'' = \left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2 - \left(x^2-4x+3\right)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции:



Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty;2)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x \in (2;+\infty)$. Точка $x=2$ не принадлежит области определения функции, а значит, не является и точкой перегиба функции.

5. а) Так как функция не является непрерывной в точке $x=2$, проверим в этой точке наличие вертикальной асимптоты:

Так как $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^2-3}{x-2} = \left[\dfrac{1}{-0}\right] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^2-3}{x-2} = \left[\dfrac{1}{+0}\right] = +\infty$, то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

б) Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y=b$: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3}{x-2} = \pm\infty$. Значит, горизонтальной асимптоты нет.

в) Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx+b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{(x-2)} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3-x(x-2)}{(x-2)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) = 2,$$

а, значит, прямая $y = x+2$ - наклонная асимптота.

6. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

$$Ox:\ y=\frac{x^2-3}{x-2}=0 \text{ при } x=\pm\sqrt{3}, \quad Oy:\ y(0)=\frac{3}{2}.$$

Дополнительные точки: $y(4)=6,5$; $y(-4)\approx -2,17$.

График функции представлен на рис.4:

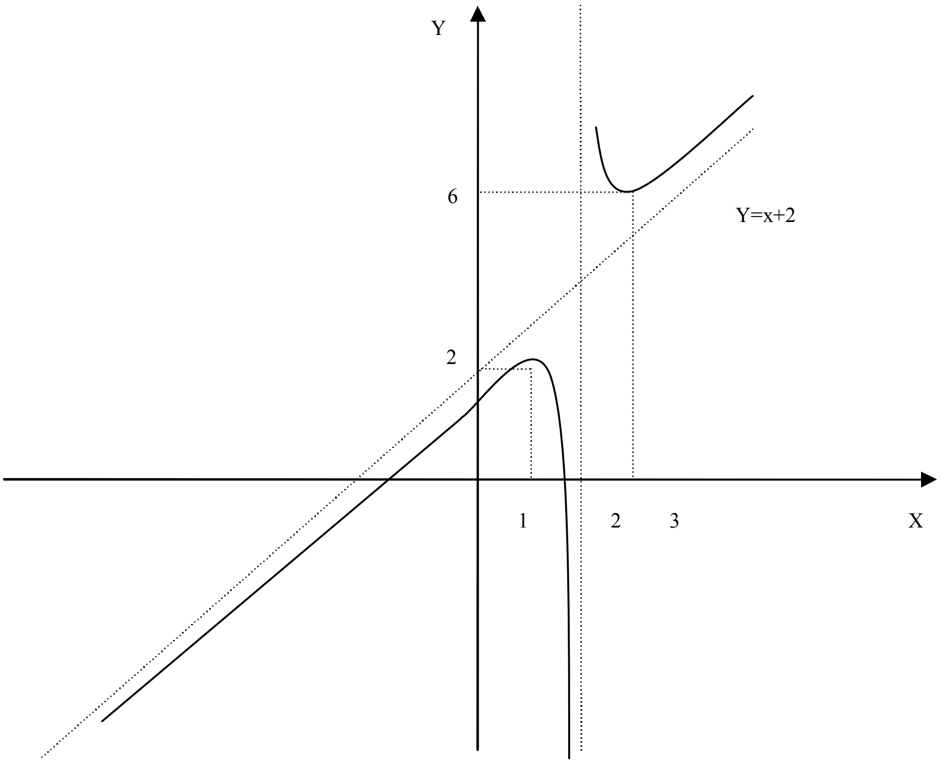


Рис.4

б*) Провести полное исследование функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ и построить её график.

Решение.

Областью определения функции является вся числовая ось, кроме точек x, удовлетворяющих уравнению: $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1 \quad \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

1. Функция является периодической, её период T=2π.

Проверим чётность (нечётность):

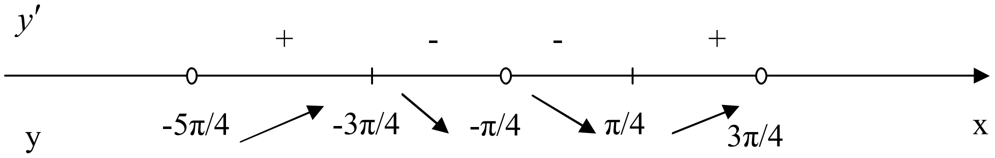
$f(-x)=\dfrac{1}{\sin(-x)+\cos(-x)}=\dfrac{1}{\cos x-\sin x}$; $f(-x)\neq f(x)$; $f(-x)\neq -f(x)$. Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной – график функции не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно центра координат.

2. Найдём первую производную функции $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$:

$$y'=\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)'=-\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

Тогда $y'=0$ при $\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Проверим знаки производной на интервале длины Т=2π $\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$

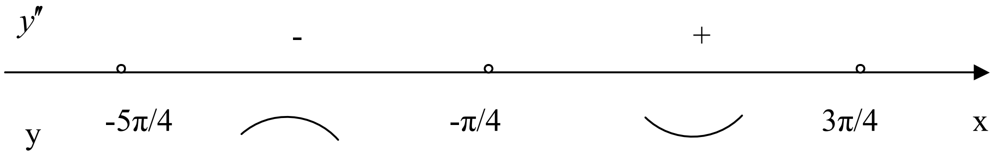


Значит, функция возрастает при $x \in \left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ и убывает при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$ $\cup\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. При переходе через стационарную точку $x=-\frac{3\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, точка $x=-\frac{3\pi}{4}$ - точка максимума и $y_{\max}=y(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. При переходе через стационарную точку $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x=\frac{\pi}{4}$ - точка минимума и $y_{\min}=y(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Найдём вторую производную функции $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$:

$$y''=\left(\frac{1}{\sin x+\cos x}\right)''=\left(\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}\right)'=\frac{3-2\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}=\frac{3-\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^3}.$$

Проверим знаки второй производной функции между точками разрыва (так как числитель второй производной в нуль не обращается ни при каких x):



Функция выпукла вверх при $x \in \left(-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

Точка $x=-\frac{\pi}{4}$ не принадлежит области определения функции, а значит, не является и точкой перегиба функции.

4. а) Так как функция не является непрерывной в точках $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, проверим в этих точках наличие вертикальных асимптот:

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}-0} \dfrac{1}{\sin x+\cos x} = \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}+0} \dfrac{1}{\sin x+\cos x} = \left(\dfrac{1}{+0}\right) = +\infty$. Значит, прямая $x = -\dfrac{\pi}{4}$ является вертикальной асимптотой;

б) Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$:

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ - не существует, значит, горизонтальной асимптоты нет.

в) Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x(\sin x+\cos x)} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{\sin x+\cos x}\right)$ - не существует, значит, наклонных асимптот нет.

5. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

$$Ox:\ y = \frac{1}{\sin x+\cos x} \neq 0 \text{ ни при каких } x,\quad Oy:\ y(0) = \frac{1}{\sin 0+\cos 0} = 1.$$

График функции представлен на рис. 5:

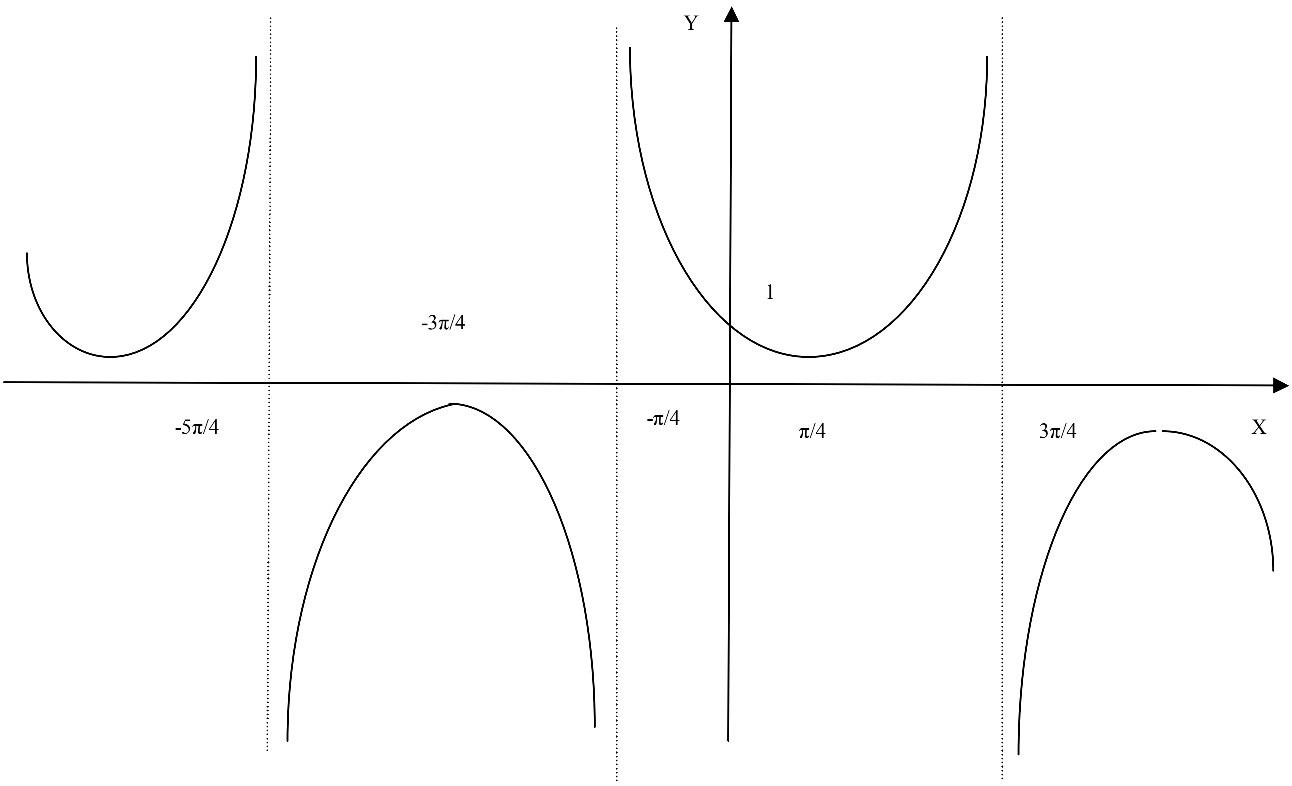


Рис.5

в*) Провести полное исследование функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ и построить её график.

Решение.

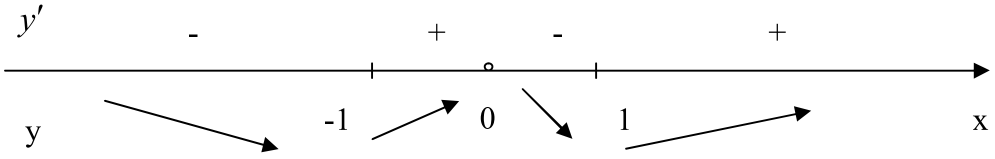
1. Областью определения функции является вся числовая ось.
2. Функция не является периодической.
3. Проверим чётность (нечётность): $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2-1} \Rightarrow f(-x) = f(x)$. Значит, функция является чётной (график функции симметричен относительно оси ординат).

4. Найдём первую производную функции $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$:

$$y'=\left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}}.$$

Тогда $y'=0$ при $x=0$ и разрывна при $x=\pm1$. Так как сама функция непрерывна в этих точках, то они являются критическими точками – при выполнении достаточного условия экстремума (смене знака производной при переходе через эти точки) в них может быть "острый" экстремум.

Проверим знаки производной :



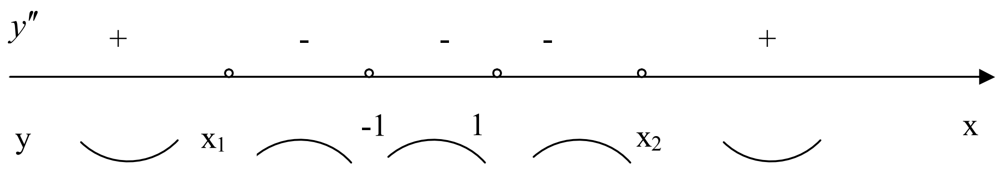
Значит, функция возрастает при $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$ и убывает при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$. При переходе через стационарную точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, точка $x=0$ - точка максимума и $y_{\max}=y(0)=1$. При переходе через критические точки $x=\pm1$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x=\pm1$ - точки острого минимума и $y_{\min}=y(\pm1)=0$.

5. Найдём вторую производную функции $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$:

$$y''=\left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}\right)''=\left(\frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}}\right)'=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}-x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\left(x^2-1\right)-2x^2}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{x^2-3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}.$$

Проверим знаки второй производной функции при переходе через точки $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ и $x=\pm1$:



Функция выпукла вверх при $x\in\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup(-1;1)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$ и выпукла вниз (вогнута) при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. Точки $M_{1,2}\left(\pm\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right)$ являются и точками перегиба функции.

6. а) Так как функция является непрерывной везде на числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

б) Проверим наличие горизонтальной асимптоты $y = b$: $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = +\infty$. Значит, горизонтальной асимптоты нет.

в) проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{x} = 0,\ b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} \right) = +\infty,$$

Значит, наклонных асимптот нет.

7. Находим точки пересечения функции с координатными осями:

$$\text{Ox: } y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \text{ при } x = \pm 1, \quad \text{Oy: } y(0) = 1.$$

График функции представлен ниже на рис.6:

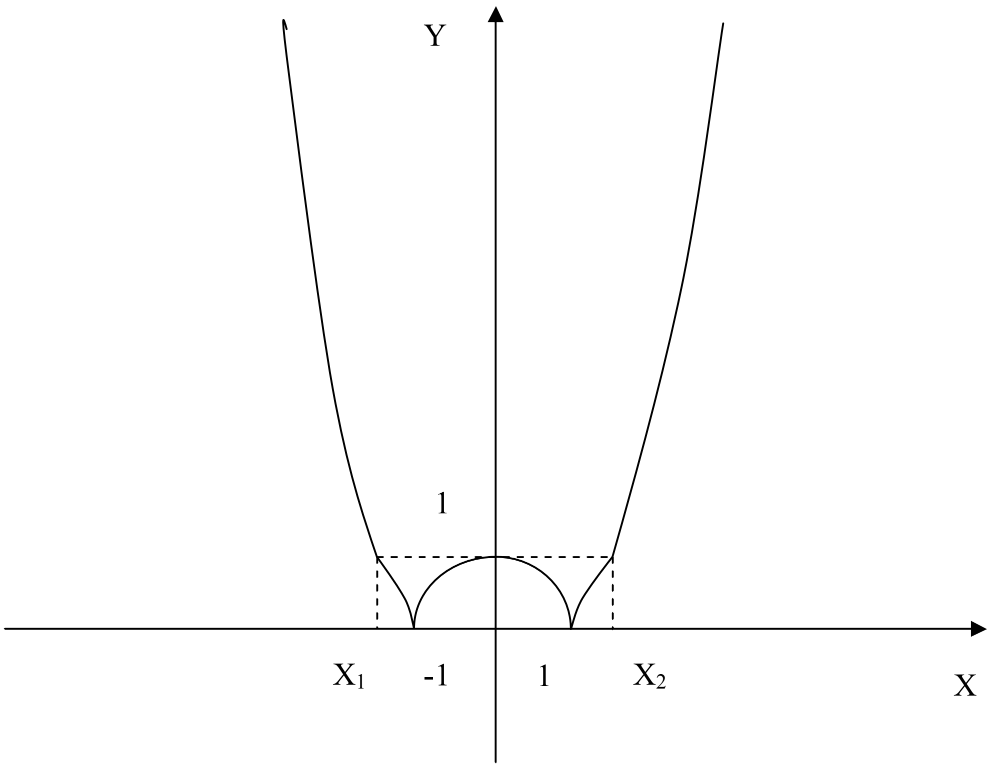


Рис.6

Задача 5. а) Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 20. При каких значениях x и y величина $x^3 y$ будет наибольшей?

Решение. По условию задачи $x + y = 20$, поэтому $y = 20 - x$ и можно составить функцию $f(x) = x^3 \cdot (20 - x)$, которую будем исследовать на экстремум. Найдём производную

$y'=\left(20x^3-x^4\right)'=60x^2-4x^3$. Приравняем эту производную к нулю и получим уравнение $4x^2\left(15-x\right)=0$. Корни этого уравнения $x=0$ и $x=15$ дадут подозрительные на экстремум точки функции. В точке $x=0$ экстремума нет, так как производная не меняет знак при переходе через эту точку, а в точке $x=15$ производная меняет знак с "+" на "-", значит, это точка максимума. Тогда искомые значения чисел $x=15$ и $y=5$.

Задача 5. б*) Определить наибольшее отклонение от нуля функции $y=x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0;\pi\right]$.

Решение. Для нахождения наибольшего отклонения от нуля функции на отрезке $\left[a;b\right]$ нужно из значений функции $f\left(x\right)$ на концах отрезка и в точках экстремума, принадлежащих отрезку, выбрать наибольшее по модулю. Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y\left(0\right)=0;\ y\left(\pi\right)=\pi.$$

Далее продифференцируем функцию $y'=1+2\cos 2x$ и приравняем полученную производную к нулю, откуда

$$1+2\cos 2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x=-0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\, n\in Z.$$

Отрезку $\left[0;\pi\right]$ принадлежат две точки из найденных, а именно, $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $x=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислим в них значения функции:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Среди четырех полученных значений функции выберем наибольшее по модулю $y\left(\pi\right)=\pi$.

Задача 5. в*) Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+2$ и отрезками прямых $x=1;\, x=5;\, y=0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Решение. Обозначим искомую точку через $x_\circ$ (см. Рис.7) и найдём значение функции в этой точке $y\left(x_\circ\right)=x_\circ^2+2$. Далее вычислим значение производной функции в этой точке:

$$y'=2x \text{ и } y'\left(x_\circ\right)=2x_\circ.$$

Уравнение касательной к графику функции в точке $x_\circ$ имеет вид $y=y\left(x_\circ\right)+y'\left(x_\circ\right)\left(x-x_\circ\right)$, тогда искомая касательная задаётся уравнением $y=x_\circ^2+2+2x_\circ\left(x-x_\circ\right)$. Основаниями трапеции служат отрезки $y\left(1\right)$ и $y\left(5\right)$, а высота равна 4. Вычислим $y\left(1\right)=2+2x_\circ-x_\circ^2$, $y\left(5\right)=2+10x_\circ-x_\circ^2$ и найдем площадь трапеции $S=\dfrac{y\left(1\right)+y\left(5\right)}{2}\cdot 4=2\left(4+12x_\circ-2x_\circ^2\right)$.

Точка максимума этой квадратичной функции получается из соотношений: $S'=24-8x_\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad 24-8x_\circ=0 \quad \Rightarrow x_\circ=3$.

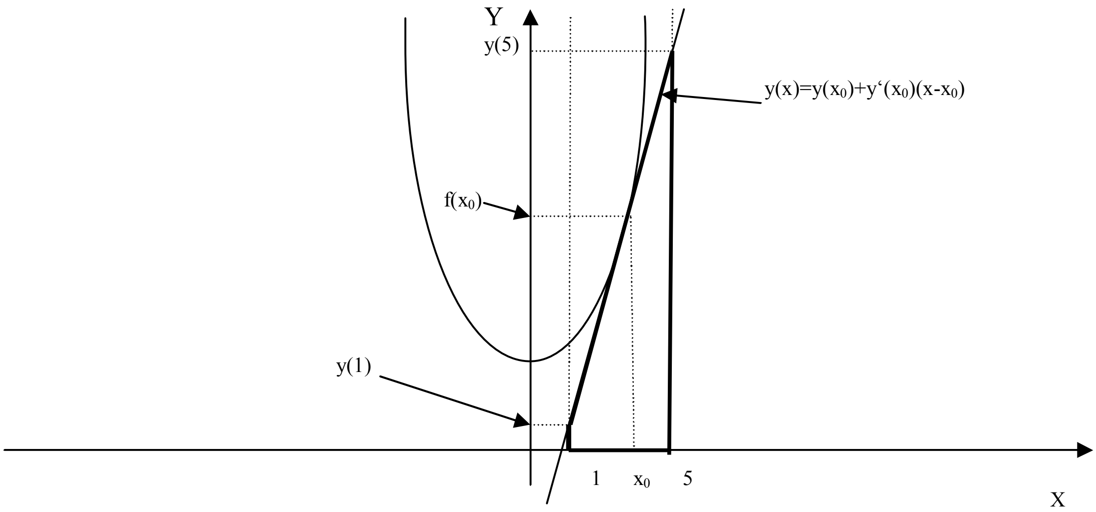


Рис.7

Расчетные задания

1

Найти пределы:

1\. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+5+...+(3n-1)}{n+5}-\dfrac{3}{2}n\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-1,5}\dfrac{2x^3+7x^2+4x-3}{2x^3-5x^2-32x-30}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{5x+2}\right)^{1-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0,3}\left(\dfrac{10x}{3}\right)^{\frac{1}{\arcsin(x-0,3)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32-x^2}-2}{(e^x-e^{2x})\cdot\operatorname{arctg}x}$ f) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{1-\cos\sqrt{x+1}}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin\left(0,5\sqrt{x^2-3}\right)-\arccos\left(0,5\sqrt{x+1}\right)}{2x^2-3x-2}$ h)* $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{\ln\left(\sqrt[3]{6-2x}+x\right)}{\sqrt{\sin\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi(1-x)}{4}}}$

2\. a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^5\cdot\left(\sqrt[3]{2n^9-3n}-\sqrt[3]{2n^9}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4-4x^2-2x}{3x^3+5x^2+x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{1+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to-2}\left(x+3\right)^{\frac{x}{\operatorname{arctg}(x+2)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(\sqrt[5]{1+x^2}-1)}{e^{\pi x}-3x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\ln\cos 2x}$

g)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-1}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{3x+1}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ h)* $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-...+(-1)^n\cdot\frac{2}{3^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-8x+5}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{1-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0,2}\left(\frac{5x+1}{2}\right)^{\frac{3x+2}{\sin(x-0,2)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{1-4x^2}{\sin^2(2x-1)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-x^2}-\sqrt[3]{1+2x}}{3x\sqrt{\sin 2x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\left(\sqrt{2+x}-1\right)\cdot\left(\arccos\frac{2+x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{10}-2^{10}-10\cdot 2^9(x-2)}{(x-2)^2}$

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+8+...+(3n+2)}{\sqrt{9n^4-n+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x^3+57x^2-41x+7}{36x^4-24x^3+22x^2-12x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0,4}\left(\frac{5x}{2}\right)^{\frac{2x}{\ln(5x-1)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 3x}{1+x\sin x-\cos 2x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(2\pi(x+0,5))}}{2-\sqrt[6]{3x+64}}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}\left(x^2-3\right)+\operatorname{arctg}\left(x^2-5\right)}{\ln(x-1)}$

h)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-4x\right)\right)^{\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)}$

5. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 12}+...\frac{3}{(5n-3)\cdot(5n+2)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{12x^4-12x^3+23x^2-20x+5}{4x^3-4x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-4)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin(0,5x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{3x}-8}{(2-x)^5-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{6}}{x^2+4x-5}$

h)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(20x+1)^{30}-(30x+1)^{20}}{\sqrt[20]{1-30x^2}-1}$

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 4^n-3^{n+2}}{4^{n+1}+3^{n-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x^3+5x^2+x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+7}\right)^{4x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\left(\cos\frac{\pi x}{6}\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin x - \cos x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 2x + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[4]{1+x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arccos\left(0{,}5\sqrt{2x+6}\right) - \arcsin\left(0{,}5\sqrt{-x}\right)}{\sqrt[5]{2x+5} - 1}$

h)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{2}{x} - \sin\dfrac{1}{x}\right)^{3\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^2+7}{5+8+\ldots+(3n+2)} - \dfrac{2}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12}{5x^3 - 16x^2 + 4x + 16}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \left(2 - \dfrac{x}{3}\right)^{\frac{5}{\sin(3-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos x - \sqrt{2}}{\arcsin(x - \pi/4)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt[4]{1+x^2}}{3\ln\left(1-2x^2\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(5x+2)\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{5x+2}{5x-2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

h)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt[5]{x^4} + 2\cdot\sqrt[10]{3x^3}\right)}{\ln\left(1 + \sqrt{x} - \sqrt[10]{5x}\right)}$

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{4n^6 + 3n^5 - 1} - \sqrt[3]{4n^6 + 2}}{7n+2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - 16x - 20}{4 - 2x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 4x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-3}{x+11}\right)^{1+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{x}{5}\right)^{\frac{\operatorname{arctg}(x-5)}{(x-5)^2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(0{,}2(\pi - 3x)\right)}{1 - 2\cos x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\left(e^{\sqrt{x-2}} - 1\right)}{\sqrt[5]{22+5x} - (x^2 - 2)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\arcsin\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}} - 0{,}5\pi\right)\cdot\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{1-x^2}$

h)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)^{101} - 101x + 201}{3x^3 - 12x^2 + 12x}$

9. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}} - \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{4x^3 - 4x^2 - 7x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x+17}\right)^{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{4x}{\pi}\right)^{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{25 - 5(x-\pi)^2} - 5}{\ln(2 + \cos x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \dfrac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \dfrac{x}{4}}}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$

g)* $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2-13}}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x+7}}{3}}{3x^2+11x-4}$

h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(x\cdot 2^x\right) - \cos\left(x\cdot 2^{-x}\right)}{\ln\left(1+x^3\right)}$

10. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+7+\ldots+(6n-5)}{5n^2-\sqrt{3n}+2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-x^2-16x-20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x+19}{2x-1}\right)^{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{2(x-1)}-e^{3(x-1)}}{\sin \pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{1+7x}-(1-x^2)}{\sqrt{2x}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\arcsin\dfrac{\sqrt{2-x}}{2} - \dfrac{\pi}{3}}{\sin(x+1)}$

h)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{7\operatorname{ctg}(2x)}$

11. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4\cdot 10} + \dfrac{3}{10\cdot 16} + \ldots \dfrac{3}{(6n-2)\cdot(6n+4)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{2x^3-12x^2+24x-18}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{9x+12}\right)^{5x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3x-6}{\sin^2(2-x)}}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(\operatorname{tg} 4x + x - \pi)\cdot \ln\dfrac{x}{\pi}}{1+\cos 5x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27}-\sqrt[3]{27-x}}{6^{2x}-6^{5x}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\ln(x+4)}{\arcsin\sqrt{\dfrac{3}{10+2x}} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{x+7}}}$

h)* $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sin\dfrac{x+2}{5} + \sin\dfrac{\pi(2-x)}{4}}{\ln\left(\sqrt[5]{30-x}+0,5x\right)}$

12. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(0,5)^{n+2}-(0,3)^n}{(0,5)^{n-3}+2\cdot(0,3)^{n+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-5}{3x-14}\right)^{-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{4x}{\pi}\right)^{(2\operatorname{tg} x-2)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\ln(x+4)}{7^{x^2-8}-7}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-(1+x)}{\arcsin^2(\sqrt{x+1}-1)}$

g)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{8x^3-1}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2-7x}{2+7x} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

h)* $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{\cos 2}{\cos x}\right)^{(\ln(x+3))^{-1}}$

13. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+9+...+(4n+1)}{3n-1}-\dfrac{2n+1}{3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^4+6x^3+8x^2-6x-9}{2x^3+13x^2+24x+9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+13}{5x-3}\right)^{-4x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{x}{9}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{18}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}1}{\sin\pi x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1-2x-x^2}-(1+x^2)}{e^{3x}-e^{0,25x^2}}$

g)* $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sin\sqrt{x^2-9}\right)\cdot\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x^2-5}}-\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^7-3^7-7\cdot 3^6(x-3)}{(x-3)^2}$

14. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{27n^3-2n^2+1}-3n\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-9x+27}{2x^4-12x^3+19x^2-6x+9}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{5x-1}\right)^{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2-\dfrac{x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{\operatorname{tg}x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\ln\left((1-x)\cdot(1+x+x^2)\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x+3}}-1}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{9-x^2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{9-x^2}-1\right)}$ h)* $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{4}\right)\right)^{\frac{3}{\cos x}}$

15. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{48}+...+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 4^n}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{x^4+3x^3+2x^2+6x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+11}\right)^{6x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\frac{2}{\sin x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-0,3x}-1}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{10-3x}-2}{e^{0,5x}-e}$

g)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\dfrac{\pi}{6}-\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{4}}{\sqrt[3]{2x-7}-1}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x+1)^{20}-(20x+1)^5}{\sqrt[5]{1+20x^2}-1}$

16. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+7+...+(5n-3)}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{8n^6+n-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+13}{4x-1}\right)^{1-2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x+2}\right)^{(\ln(1+x))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\sin 4x}{\ln\cos(0,5x)}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(4-x^2\right)\cdot\left(\sqrt[5]{5+2x}-1\right)}{\left(e^{x^2-4}-e^{x+2}\right)\cdot\sin(2+x)}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arccos\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{4}\right)-\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{2}\right)}{x^3+1}$

h)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{2}{x}+\sin\dfrac{5}{x}\right)^{\left(3\sin\frac{1}{x}\right)^{-1}}$

17. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{2\cdot 9}+\dfrac{5}{9\cdot 16}+\ldots\dfrac{5}{(7n-5)\cdot(7n+2)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-8x^3+19x^2-24x+48}{x^3+7x^2-104x+240}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2-\dfrac{4x}{\pi}\right)^{(1-\sin 2x)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\ln(1+\cos 3x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt[4]{81-5x}}{\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+\sqrt{x^4-1}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3-2x}{3+2x}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

h)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^5}-2\cdot\sqrt[7]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[4]{7x}+2\cdot\sqrt[11]{x}\right)}$

18. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10\cdot 5^{n-1}-4^{n+2}}{13\cdot 4^{n-1}+6\cdot 5^{n+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+7x^2+8x-16}{x^4+8x^3+20x^2+32x+64}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{x+4}\right)^{4x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(x+2)^2}{4}\right)^{\left(\sqrt{1-3x}-1\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3^{x+1}-3}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-9\right)\cdot\operatorname{arctg}(x-3)}{\left(e^x-e^3\right)^2}$

g)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arccos\left(0,5\sqrt{x^2-2}\right)-0,25\pi}{2^{x+2}-x-3}$

h)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+3)^{99}+99x+197}{x^3+2x^2-x-2}$

19. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{1+5+\ldots+(4n-3)}+\dfrac{5}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{14x+5}\right)^{1-3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin(7x)\right)^{\left(\sqrt[5]{1-9x+x^2}-1\right)^{-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 2x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln\left(1+4x^2\right)}{\left(1-2x^3\right)^8-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{\operatorname{arctg}\sqrt{3x+6}+\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}}$

h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(x^2\cdot 5^x\right)-\cos\left(x^2\cdot 5^{-x}\right)}{\sqrt[3]{1-2x^5}-1}$

20. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(3n^2-1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(3n^2+1\right)^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}{x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{6x-11}{x+6}\right)^{2+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}x}$

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{\cos 2x}-1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+0{,}2x^2}-3}{\left(e-e^{7x+1}\right)\cdot\ln(1-0{,}2x)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 3} \left(x^2-9\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{3}-\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^{(3x\cdot(1-\cos 2x))^{-1}}$

21. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}+\dfrac{5}{2}+\ldots+\dfrac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+5x^2+x-3}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2-\dfrac{2x}{\pi}\right)^{\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{\cos x}}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\ln\cos 4x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\cos x}-1}{\left(3^{2x}-1\right)\cdot\operatorname{arctg}(0{,}3x)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\arccos\dfrac{\sqrt{3x-1}}{2}}$

h)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(\sqrt{4x+1}-x\right)}{\sin\dfrac{x-2}{3}-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$

22. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-n+3n^2}{2+6+\ldots+(4n-2)}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-x^2-16x-20}{x^3+9x^2+24x+20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right)^{-1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\sin\left(3x^2\right)\right)^{\frac{1}{x\cdot\operatorname{arctg}x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{25-x^2}-5}{\left(5^x-3^{2x}\right)\cdot\ln(1-\operatorname{tg}x)}$

g)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+4}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{6-x}{6+x}+\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 4}\right)^{(\sin(x-4))^{-1}}$

23. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{1\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 17}+\ldots\frac{4}{(8n-7)\cdot(8n+1)}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3-9x^2-27x+27}{x^3+10x^2+33x+36}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{3x+2}{2}\right)^{\frac{5x}{\operatorname{arctg}\left(x^2\right)}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 2x-\sin x}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x}\cdot\left(e^{\sqrt{x^3}}-1\right)}{\ln(1-2x)\cdot\left(\sqrt[7]{1+3x}-1\right)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin\left(x^2-3\right)-0,5\pi}{\sqrt{4-x^2}}$ h)* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^6-4^6-6\cdot 4^5(x-4)}{(x-4)^2}$

24. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8^{n+2}+(-7)^{n-1}}{5\cdot 8^n+(-7)^n}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}{x^4-6x^3+x^2+48x-72}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+11}\right)^{1-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\operatorname{tg}2x}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(e^{x-0,5\pi}-1\right)\cdot\operatorname{tg}x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x)-\ln(1-x))\cdot\ln(1-3x)}{\left(1+x^2\right)^5-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x+2}}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}\cdot\left(x^2-1\right)}$ h)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{16}}(\operatorname{tg}4x)^{\left(\sin\left(14x+\frac{\pi}{8}\right)\right)^{-1}}$

25. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+8+\ldots+(5n-2)}{4+7+\ldots+(3n+1)}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^3-3x^2-9x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(1+5x))^{(\ln(1-3x))^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5^{3x^2+1}-5}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{\sqrt{x-1}-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{6-x}}+\frac{\pi}{4}}{2x^2+5x+2}$ h)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(10x+1)^7-(7x+1)^{10}}{\sqrt[7]{1-10x^2}-1}$

26. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)}-\sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^4-13x^2-48}{(x+1)(2x-7)(x-3)-5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{3x^3+1}\right)^{x^3-3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^{\left(\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin 4x)}{4^{x+1}-4}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-4\right)}{(2x+5)^9-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[4]{5x+1}-2}{\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}}$

h)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1-\sin x}\right)^{\left(5x\cdot(\cos x-1)\right)^{-1}}$

27. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{25}-\ldots+3\cdot\dfrac{(-1)^n}{5^n}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(2x+1)(3x-1)+12}{x^3-3x^2+x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{x+4}{2}\right)^{\left(\arcsin\left(x^2-x\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln\left(1+2x^3\right)}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{x^2-9}-5^{2x-6}}{\sqrt{4-\sin^2(x-3)}-2}$

g)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{8x^4-2x+3}\cdot\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-2}{x^2+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

h)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1-\sqrt[9]{4x}+\sqrt{8x^3}\right)}{\ln\left(1+2\cdot\sqrt[15]{x}+\sqrt[3]{25x^2}\right)}$

28. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{7+9+\ldots+(2n+5)}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-4x^2-3x-10}{(x+1)(x-4)(3x-14)-6}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{3x+8}\right)^{4x^2+11}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}\left(3x^2\right)\right)^{\left(\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sin 2x}-\cos x}{7^{2x+1}-7}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+3)-\ln x}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt[5]{x+4}-1\right)\cdot\left(\arccos\dfrac{\sqrt{x^2-6}}{x+5}-\dfrac{\pi}{6}\right)^{-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)^{200}-200x+599}{2x^3-9x^2+27}$

29. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\ldots\dfrac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{(11-x)(0{,}1x+1)(2x-19)-2}{x^3-10x^2+2x-20}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+8}{10x-1}\right)^{x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\left(\sqrt{1-\cos 4x}\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{25-3x}-5}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2^{4+2x}-2^{x^2-4}}{\ln(-x)-\ln(x+4)}$

g)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}}{\ln(3-x)}$

h)* $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\cdot 3^x\right)-\cos\left(\sqrt{x}\cdot 3^{-x}\right)}{\sin\left(\pi-3x^2\right)}$

30. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n-1}+(-3)^{n+1}}{5^{n+2}+(-3)^n}$

b) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{3x^3+17x^2-27x+7}{(2x+13)(x+9)^2+4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\arcsin\dfrac{x^2}{3}\right)^{\left(\ln\left(1+3x^2\right)\right)^{-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{5^{x^3+1}-5}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(\sqrt{3x}-2\right)}{\sqrt[4]{13-4x}-1}$

g)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\arcsin\dfrac{\sqrt{x+5}}{2}-\dfrac{\pi}{4}}{\sqrt{2+x/3}-1}$

h)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(5^{2x}-x^3\right)}{\ln\left(7^{2+x}-x^3\right)}$

2

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и построить её график:

1.

а)
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<1,\\ x^3+1, & |x|\le 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

в)*
$$f(x)=3^{\frac{3}{x^2-4}}$$

2.

а)
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le -1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1<x\le 0,\\ 2x+3, & x>0.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=x-\frac{2|x+3|}{x+3}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$$

3.

а)
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x}, & x\le 2,\\ 2-x, & 2<x\le 5,\\ 2e^x, & x>5.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{|x-2|}$$

в)*
$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}$$

4.

а)
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+1, & x<0, \\ -x^3, & 0\le x\le 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1. \end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2+5x-6}{|x+6|}$$

в)*
$$f(x)=\sin\frac{x}{x-2}$$

5.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\le -1, \\ x+3, & |x|<1, \\ \dfrac{1}{x-3}, & x\ge 1. \end{cases}$$

б)
$$f(x)=2x-\frac{|1-x|}{x-1}$$

в)*
$$f(x)=\cos\frac{x}{x-1}$$

6.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4, \\ \lg(x+4), & -4<x<2, \\ x+4, & x\ge 2. \end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-x-6}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-9}}$$

7.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 2x^{-2}, & x<0 \\ 2x+5, & 0\le x\le 3, \\ 2+x^2, & x>3. \end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$$

в)*
$$f(x)=2^{\frac{1}{4-x^2}}$$

8.

а)
$$f(x)=\begin{cases} \sin 0{,}5x, & x\le 0, \\ \cos 0{,}5x, & 0<x\le 0{,}5\pi, \\ \dfrac{1}{x-0{,}5\pi}, & x>0{,}5\pi. \end{cases}$$

б)
$$f(x)=3x+\frac{2|x+1|}{x+1}$$

в)*
$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+2}$$

9.

а)
$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x\le -2, \\ -x^2, & -2<x\le -1, \\ \dfrac{1}{x+1}, & x>-1. \end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$$

в)*
$$f(x)=\sin\frac{x-2}{x}$$

10.

а)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x<-2,\\ |x-1|, & |x|\le 2,\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{2x^2+x-3}{|x-1|}$$

в)*

$$f(x)=\cos\frac{x+1}{x}$$

11.

а)

$$f(x)=\begin{cases}x+0{,}5\pi, & x\le -0{,}5\pi,\\ \operatorname{tg}x, & |x|<0{,}5\pi,\\ x-0{,}5\pi, & x\ge 0{,}5\pi.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=x-\frac{3|x+2|}{x+2}$$

в)*

$$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$$

12.

а)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ \lg(3x+1) & 0<x\le 3,\\ 10-x^2, & x>3.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{|x+2|}{2x^2+3x-2}$$

в)*

$$f(x)=2^{\frac{2}{1-x^2}}$$

13.

а)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3, & x\le -1,\\ 3^{-x}, & -1<x\le 0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-5}{|x+1|}$$

в)*

$$f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{x-2}$$

14.

а)

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le -1,\\ |x-1|, & |x|<1,\\ x^2+1, & x\ge 1.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=2x+\frac{|x+3|}{x+3}$$

в)*

$$f(x)=\sin\frac{x}{x+1}$$

15.

а)

$$f(x)=\begin{cases}x\ \ -1, & x\le 0,\\ -x^2-2x+4, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1.\end{cases}$$

б)

$$f(x)=\frac{|1-x|}{3x-x^2-2}$$

в)*

$$f(x)=\cos\frac{x}{x+2}$$

16.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & |x|\le\frac{\pi}{2},\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{1-x^2}}$$

17.

а)
$$f(x)=\begin{cases}3x^{-1}, & x\le-3\\ 3^{x+3}, & -3<x<0,\\ |x+3|, & x\ge 0.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x}{|x|}-3x+2$$

в)*
$$f(x)=2^{\frac{3}{x^2-2}}$$

18.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & -\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & x>\frac{\pi}{4}, x\le-\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|2-x|}{3x^2-4x-4}$$

в)*
$$f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x-2}{x}$$

19.

а)
$$f(x)=\begin{cases}3x^3-1, & x\le-1,\\ x^2-3x+2, & -1<x\le 2,\\ 3^{\frac{1}{x-2}}, & x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{|x+1|}$$

в)*
$$f(x)=\sin\frac{2x}{2x-1}$$

20.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+2}}, & x<-2,\\ 4x+2, & -2\le x\le 2,\\ \frac{2}{2-x}, & x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=2x-\frac{|2x+1|}{2x+1}$$

в)*
$$f(x)=\cos\frac{3x}{1-3x}$$

21.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x+\pi}, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ |x|, & |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{2x+\pi}, & x<-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x-4|}{x^2-3x-4}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x^2-3}}$$

22.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1,\\ |x-1|, & |x|\le 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{3x^2-x-2}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=3^{\frac{2}{x^2-2}}$$

23.

а)
$$f(x)=\begin{cases}e^x-e, & x<0,\\ \ln(3x+1), & 0\le x\le 1,\\ e^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=x-\frac{3(x+1)}{|x+1|}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1-x^2}}$$

24.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2x^2+3x-1, & x\le 0,\\ |x+1|, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{4}{2-x}, & x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x+2|}{2x^2+x-6}$$

в)*
$$f(x)=4^{\frac{1}{4-x^2}}$$

25.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x+0,5\pi}}, & x<-0,5\pi,\\ \cos 2x, & |x|\le 0,5\pi,\\ 2^{\frac{1}{x-0,5\pi}}, & x>0,5\pi.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{x+1}$$

26.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2^{x+0,5\pi}, & x<-0,5\pi,\\ \sin 2x, & |x|\le 0,5\pi,\\ 2^{x-0,5\pi}, & x>0,5\pi.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=3x+\frac{|x-1|}{x-1}$$

в)*
$$f(x)=\sin\frac{x-1}{x}$$

27.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\ge 3,\\ \dfrac{1}{x-3}, & 0\le x<3,\\ 3x^2+1, & x<0.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x-3|}{x^2-4x+3}$$

в)*
$$f(x)=\cos\frac{x-2}{x}$$

28.

а)
$$f(x)=\begin{cases}\ln(x+2), & -1\le x\le 2,\\ 3x^2+2x-1, & x<-1,\\ 4x-8, & x>2.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{|x-1|}$$

в)*
$$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{x^2-5}}$$

29.

а)
$$f(x)=\begin{cases}x+\pi, & x\le -\pi,\\ \mathrm{tg}(x-0,5\pi), & |x|<\pi,\\ x-\pi, & x\ge \pi.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=2x-\frac{|x+3|}{x+3}$$

в)*
$$f(x)=5^{\frac{1}{5-x^2}}$$

30.

а)
$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3x-5, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x^2}, & -1\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\frac{|x+3|}{x^2+3x}$$

в)*
$$f(x)=\sin\frac{x+2}{4-x}$$

3.1

Продифференцировать указанную функцию. Упростить полученное выражение:

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right)$

2. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3x}}{1-x}$

3. $y = x - \ln\left(1+e^x\right) - \dfrac{2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}} - \left(\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}\right)^2$

4. $y = \dfrac{1}{3}\left(\arcsin\dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{x\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\right)$

5. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3}\cdot x}$

6. $y = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x} + \ln\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}}{x}$

7. $y = \dfrac{x\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{3x^2+2}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3x^2+2}$

8. $y = \ln\dfrac{(x-3)^2}{x^2-5x+7} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-5}{\sqrt{3}}$

9. $y = x\cdot\arccos\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

10. $y = \dfrac{\arccos\left(x\sqrt{x}\right)}{3\left(1-x^3\right)} + \dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}$

11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x - \sin x}$

12. $y = \ln\dfrac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}$

13. $y = \sqrt{1+\cos^2 x} - \cos x\cdot\ln\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right)$

14. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}$

15. $y = \dfrac{1}{14}\ln\dfrac{(x+1)^2}{9x^2+6x+4} + \dfrac{2}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x+1}{\sqrt{3}}$

16. $y = \sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sin^2 x\right)$

17. $y = (x-1)\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)$

18. $y = \dfrac{1}{10\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\arcsin x}{10\left(1+5x^2\right)}$

19. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+2x^4}+x}{\sqrt[4]{1+2x^4}-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}$

20. $y = x - e^{-x}\cdot\arcsin e^x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$

21. $y=\ln\left(1+x\right)-3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x}\right)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{1+x}$

22. $y=\frac{1}{8}\ln\left(2x^2-x+2\right)+\frac{\sqrt{15}}{12}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{15}}+\frac{3}{2}\ln\left(x-2\right)+\frac{x}{2}$

23. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\arcsin e^x+\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$

24. $y=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{1-x}-2\arcsin\frac{1}{x-2}$

25. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}$

26. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x}$

27. $y=x-\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+e^x\right)\sqrt{1+e^{2x}}\right)-\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}e^x$

28. $y=\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln\left(2+e^x+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right)-\arcsin\frac{2-e^{-x}}{\sqrt{5}}$

29. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\cdot x}$

30. $y=e^x\cdot\arcsin e^x+\sqrt{1-e^{2x}}$

3.2.a

Продифференцировать функцию:

1. $y=\frac{\left(2x+3\right)^5\cdot\left(\sin(3x)+1\right)^7}{\left(3x^3-2\right)\cdot\left(7x-1\right)^6}$

2. $y=\sqrt[10]{\frac{\left(2x-1\right)^9\cdot\left(x+3\right)^3}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sin^7(x+1)}}$

3. $y=\frac{\left(\cos^3(5x)-2x\right)^4\cdot\left(x^2+2\right)^3}{\arcsin^2x\cdot\left(3x^3+2x+1\right)^5}$

4. $y=\sqrt[11]{\frac{\arccos^5(3x+1)\cdot\left(2x+1\right)^2}{\left(x^4+x^3\right)\cdot(7x+3)^2}}$

16. $y=\frac{\sqrt[7]{\left(x^2+3\right)^2\cdot\sin^5(2x+1)}}{(4x+1)^3\cdot\left(3x^2+2\sqrt{x}+1\right)^4}$

17. $y=\frac{\left(3^{5x}+1\right)^4\cdot\left(x^3+2\right)^2}{\arccos^3(2x+1)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)^5}$

18. $y=\sqrt[19]{\frac{\left(2x+1\right)^5\cdot\left(3x^2+2\right)^7}{\operatorname{arctg}^5(0.3x)\cdot(\sqrt[4]{x}+1)^2}}$

19. $y=\frac{\operatorname{tg}^3(0.5x)\cdot\left(3\sqrt[5]{x}+2\right)^2}{\left(2x^7+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(3^x+x^2\right)}$

5. $y=\dfrac{\left(x^2+3\right)^5\cdot\left(\operatorname{arctg}(3x)+1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\cdot\left(5x-2\right)^4}$

6. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\left(2x^3+3\right)^5}\cdot\cos^7(3x-2)}{\left(3x-1\right)^5\cdot\left(6x^2+3x+1\right)^3}$

7. $y=\dfrac{\left(e^{2x}+1\right)^3\cdot\left(x^5+3x\right)^4}{\arcsin^3\left(2x\right)\cdot\left(2x^3+x^2\right)^5}$

8. $y=\sqrt[12]{\dfrac{\arcsin^5(3x)\cdot\left(x^2+5\right)^7}{\left(6x^3-2\right)^3\cdot(2^x+1)^2}}$

9. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3(0,2x)\cdot\left(4\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(x^2+\sqrt{10}\right)^7\cdot\left(3x^5+4x^2+1\right)^4}$

10. $y=\sqrt[15]{\dfrac{\sin^6(3x-4)\cdot\cos^2(2x-1)}{\left(\sqrt{x}-3\right)^4\cdot(3x^6+2)^3}}$

11. $y=\dfrac{\left(7x+2\right)^5\cdot\left(3x^2-1\right)^3}{\left(\cos^2(5x)+1\right)\cdot\left(2\sqrt[5]{x}-1\right)^2}$

12. $y=\sqrt[11]{\dfrac{\left(5x+2\right)^2\cdot\left(x-7\right)^3}{\sqrt[3]{x}\cdot\arcsin^5(2x+1)}}$

13. $y=\dfrac{\left(\sin^2\left(7x\right)+2\right)^3\cdot\left(x^4-1\right)^2}{\operatorname{arctg}^7\left(6x-1\right)\cdot\left(x^3+2x+1\right)^4}$

14. $y=\sqrt[17]{\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}+2x\right)\cdot\left(2x-3\right)^3}{\operatorname{tg}^6(7x+1)\cdot(x+1)^2}}$

15. $y=\dfrac{\left(2x^5-3\right)^2\cdot\left(\operatorname{arcctg}(5x)-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3x+2\right)^2\cdot\left(x-2\right)^5}$

20. $y=\sqrt[17]{\dfrac{\cos^7(0.2x)\cdot\operatorname{tg}^2(3x)}{\left(\sqrt[5]{x}+2\right)^3\cdot(x^8+3)^2}}$

21. $y=\dfrac{\left(3x+1\right)^5\cdot\left(2x^3+5\right)^7}{\left(\sin^3(5x)+2\right)\cdot\left(3\sqrt[7]{x}+2\right)^4}$

22. $y=\sqrt[9]{\dfrac{\left(7x^2+3\right)^2\cdot\left(x+\sqrt{5}\right)^4}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\arccos^2(3x-2)}}$

23. $y=\dfrac{\left(\cos^3(5x)+2\right)^2\cdot\left(x^5+2\right)^3}{\operatorname{arcctg}\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\left(x^4+3\sqrt[4]{x}\right)^2}$

24. $y=\sqrt[7]{\dfrac{\left(6x+5\right)^3\cdot\left(\sqrt[4]{x}+3\right)^2}{\sin^5(0,3x)\cdot(2x-\sqrt{7})^2}}$

25. $y=\dfrac{\left(3x^4-2\right)^{11}\cdot\left(\operatorname{arctg}^3(2x)+1\right)^5}{\left(5x-1\right)^3\cdot\left(x+3\right)^6}$

26. $y=\dfrac{\sqrt[9]{\left(x^3+3\right)^2}\cdot\cos^7(2x-1)}{\left(3\sqrt{x}-1\right)^2\cdot\left(5x^3+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}\right)^2}$

27. $y=\dfrac{\left(5^{\sqrt{x}}+2\right)^3\cdot\left(x^4-\sqrt{5}\right)^2}{\arcsin^5\left(\sqrt{2x}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}+2\right)^4}$

28. $y=\sqrt[5]{\dfrac{\left(3x+1\right)^3\cdot\left(2\sqrt{x}+5\right)^4}{\operatorname{arcctg}^3(0,1x)\cdot(\sqrt[5]{x}+1)^3}}$

29. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^5\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\left(7\sqrt[4]{x^3}+2\right)^2}{\left(3x^5+2\right)^2\cdot\left(7^x-2x\right)^3}$

30. $y=\sqrt[7]{\dfrac{\sin^5(2x+3)\cdot\operatorname{ctg}^2(x+1)}{\left(x^9+3\right)^2\cdot\left(\sqrt[7]{x^3}-\sqrt{3}\right)^3}}$

3.2.б

Продифференцировать функцию:

1. $y=x^{\mathrm{tg}(2x+1)}$
2. $y=\sqrt[x]{3x^7-2}$
3. $y=\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)^x$
4. $y=(2x+1)^{2^x}$
5. $y=x^{(3^x+x)}$
6. $y=\left(\sin(2x)\right)^{0,5x}$
7. $y=2\cdot x^{x^3-x}$
8. $y=\left(\ln(x^2+2)\right)^x$
9. $y=(5x+1)^{\frac{1}{3x+2}}$
10. $y=\left(\sin(x^2)\right)^{\cos(2x)}$
11. $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\sin(2x)}$
12. $y=\left(\cos(x^2)\right)^{\frac{1}{x+2}}$
13. $y=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{\cos(3x)}}$
14. $y=(7x+1)^{\arcsin(\sqrt{2}x)}$
15. $y=(4x-3)^{\arccos(\sqrt{3}x)}$
16. $y=(2x)^{\mathrm{ctg}(3x)}$
17. $y=\sqrt[2x]{x^5+2}$
18. $y=(2x)^{2^x}$
19. $y=(x^3+x)^{3x}$
20. $y=(3x+1)^{\mathrm{arcctg}(\sqrt{5}x)}$
21. $y=\left(\ln(x+2)\right)^{3^x}$
22. $y=(x^3)^{\mathrm{arctg}(2\sqrt{x})}$
23. $y=(3x)^{e^{x^3}}$
24. $y=(2x-1)^{\sin x^5}$
25. $y=(\sqrt{x}+2)^{(\sqrt{3}x-1)}$
26. $y=(\sqrt[3]{x})^{\mathrm{ctg}(3x)}$
27. $y=(4x^5-5)^{\mathrm{tg}(\sqrt{x})}$
28. $y=\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^{\sqrt{x-2}}$
29. $y=\left(\mathrm{tg}(5x)\right)^{5^x}$
30. $y=(6x)^{\cos x^6}$

3.3*

Найти производную функции, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y=\sqrt{5x^2-x}$
2. $y=e^{3x-2}$
3. $y=\sin\left(4x+3\right)$
4. $y=\log_2\left(5x+2\right)$
16. $y=\dfrac{1}{4\left(4x+3\right)}$
17. $y=\left(3x+1\right)^3$
18. $y=e^{\cos\left(4x+1\right)}$
19. $y=\mathrm{ctg}\dfrac{4x}{5}$

5. $y = 7^{2x-1}$

6. $y = \dfrac{1}{3(3x-7)}$

7. $y = (2x-5)^3$

8. $y = e^{\sin(2x-1)}$

9. $y = \operatorname{tg}\dfrac{3x}{4}$

10. $y = 3\cdot(x-2)^{-2}$

11. $y = \sqrt{6x - x^2}$

12. $y = e^{7-2x}$

13. $y = \cos(0{,}5x-3)$

14. $y = \log_5(2x-1)$

15. $y = 9^{3-2x}$

20. $y = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

21. $y = \sqrt{2x^2+5x}$

22. $y = e^{0{,}5x+9}$

23. $y = \sin(7-3x)$

24. $y = \log_3(4-3x)$

25. $y = 8^{6x+1}$

26. $y = \dfrac{1}{7(5-7x)}$

27. $y = (3-2x)^3$

28. $y = e^{\sin(3-2x)}$

29. $y = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{7}$

30. $y = \dfrac{4}{(x-4)^2}$

3.4 а

Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{\ln(x+2)}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{6}{1-x^3} - \dfrac{10}{1-x^5}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{e^x}{e^x-e} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{\operatorname{arctg}(x-1)} - \dfrac{2}{x-1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x^7+1} - \dfrac{3}{x^{21}+1}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{\ln(x-2)} - \dfrac{x}{x-3}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x}{x-2} - \dfrac{3}{\ln(x-1)}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4}{1-x^4} - \dfrac{10}{x^{10}-1}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x}{2^x-x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(x+1)} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{7}{x^7+1} - \dfrac{3}{x^3+1}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{2}{\ln(x+5)} - \dfrac{2x}{x+4}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+\sin^2 x}-\dfrac{1}{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{3}{x^3+3x}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^9-1}-\dfrac{4}{x^{12}-1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{x^2-\dfrac{\pi}{4}}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^x}{x^2-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^5}-\dfrac{6}{x^{15}-1}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{4}{\ln(x+4)}-\dfrac{4x}{x+3}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{5}{x^5+1}-\dfrac{7}{x^7+1}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 2x}-\dfrac{1}{x^2-\dfrac{\pi}{16}}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{e^x-1}-\dfrac{2}{x^2+x}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{x^4-1}-\dfrac{9}{1-x^6}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin x^2}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x}{2x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{11}{x^{11}+1}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{2}{\ln(x-2)}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^{10}-1}-\dfrac{3}{x^{15}-1}\right)$

3.4б

Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{(e^x-1-5x)^{-1}}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\sin(2x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x\right)^{\operatorname{tg}(2x)}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{-x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\operatorname{arctg} x\right)^{2x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\right)^{\sin x}$

17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{10}{\sqrt{x^2+x}}\right)^{x-10}$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-5\right)^{\frac{5}{\ln x}}$

19. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\sin x\right)^{\frac{x}{x+1}}$

20. $\lim\limits_{x\to -1}\left(2+x\right)^{\sin^{-1}(\pi x)}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{(3e^x-3+5x)^{-1}}$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2^x+2^{-x}\right)^{(3x+2)^{-1}}$

8. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\operatorname{arctg}2x\right)^{3x}$

10. $\lim\limits_{x\to1}\left(2-x\right)^{\left(\cos\left(0{,}5x\right)\right)^{-1}}$

11. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2x\right)^{\left(2e^{x}-2+3x\right)^{-1}}$

12. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{x}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\left(2^{x}-1\right)^{x}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\operatorname{tg}^{-1}x}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^{-x}+3x\right)^{\frac{2}{3x}}$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{2x}$

24. $\lim\limits_{x\to0}\left(2-2^{x}+3x\right)^{\frac{1}{2x}}$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^{-x}+3x\right)^{\frac{2}{5x}}$

26. $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{2}\right)^{\frac{x}{x+1}}$

27. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arcsin x\right)^{(x^{2}+3x)^{-1}}$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+2\right)^{\frac{4}{\ln x}}$

29. $\lim\limits_{x\to-1}\left(3+2x\right)^{\frac{2}{3\sin(\pi x)}}$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4^{x}+2^{-x}\right)^{3\cdot(2x-5)^{-1}}$

3.5*

Записать формулу для производной $n-$го порядка указанной функции:

1. $y=\sqrt[7]{e^{3x+1}}$
2. $y=\log_{3}\left(4x-1\right)$
3. $y=\dfrac{7x}{2x^{2}-5x-3}$
4. $y=5^{6x+7}$
5. $y=\dfrac{4x-1}{11\left(3x+2\right)}$
6. $y=\cos\left(2x-1\right)+\sin\left(3x+1\right)$
7. $y=\dfrac{-x^{2}}{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^{2}}$
8. $y=\left(x-2\right)^{3}\cdot\ln\left(x-2\right)$
9. $y=\left(x+3\right)e^{x-3}$

16. $y=\cos\left(0{,}5x+1\right)-\sin\left(4x-1\right)$
17. $y=\dfrac{x^{2}}{\left(3-2x\right)\left(x-3\right)^{2}}$
18. $y=\left(x+3\right)^{3}\cdot\ln\left(x+3\right)$
19. $y=\left(x-2\right)e^{x+2}$
20. $y=\dfrac{11x-1}{3x^{2}-5x-2}$
21. $y=\sqrt[3]{e^{7x-1}}$
22. $y=\log_{4}\left(2x-3\right)$
23. $y=\dfrac{5x}{2x^{2}+9x-18}$
24. $y=3^{4x+5}$

10. $y=\dfrac{4x-7}{2x^2+3x-2}$

11. $y=\sqrt[5]{e^{2-3x}}$

12. $y=\log_2(5x+3)$

13. $y=\dfrac{-14x}{3x^2+16x+5}$

14. $y=7^{3x-2}$

15. $y=\dfrac{9x+1}{23(5x-2)}$

25. $y=\dfrac{7x-2}{15(4x+1)}$

26. $y=\sin(0{,}2x+1)-\cos(3x-1)$

27. $y=\dfrac{x^2}{(1-2x)(x-1)^2}$

28. $y=(x+1)^3\cdot\ln(x+1)$

29. $y=(x+1)e^{x-1}$

30. $y=\dfrac{x+2}{2x^2-7x+5}$

4а

Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$

2. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3. $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$

4. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

5. $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

6. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

7. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$

8. $y=\dfrac{2x^3-3x+1}{x^3}$

9. $y=\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2}$

10. $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$

11. $y=\dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$

16. $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$

17. $y=\dfrac{13-4x-x^2}{4x+3}$

18. $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$

19. $y=\dfrac{2x^2+4x+2}{2-x}$

20. $y=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$

21. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$

22. $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$

23. $y=\dfrac{(x^2-4)x}{3x^2-4}$

24. $y=\dfrac{(x^2-5)x}{5-3x^2}$

25. $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$

26. $y=\dfrac{2x^3-2x}{x^4-1}$

12. $y=\frac{5x}{4-x^2}$

13. $y=\frac{4-2x}{1-x^2}$

14. $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$

15. $y=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^3$

27. $y=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$

28. $y=\frac{x^3}{9(x-3)^2}$

29. $y=\frac{4x^3}{(1-2x)^2}$

30. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

4б*

Провести полное исследование функции и построить её график:

1. $y=5x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$
2. $y=\cos x+\frac{1}{\cos x}$
3. $y=2x+4-3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}$
4. $y=0{,}5e^{\sqrt{2}\cos x}$
5. $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$
6. $y=\sqrt[3]{1+\sin x}$
7. $y=2\cdot\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$
8. $y=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$
9. $y=\sqrt[3]{8-x^3}$
10. $y=\ln\left(2\cos^2 x\right)$
11. $y=(x+2)\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}$
12. $y=2x-\sin\frac{x}{2}$
13. $y=3\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}-2x$
14. $y=\sqrt[3]{1+\cos x}$
16. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$
17. $y=\sqrt[3]{\left(x^2+5x\right)^2}$
18. $y=\sin x(1-\cos x)$
19. $y=-\sqrt[3]{\left(x^2-6x+5\right)^2}$
20. $y=\frac{10\sin x}{2+\cos x}$
21. $y=\frac{(x+2)^{\frac{2}{3}}}{x-1}$
22. $y=(2+\sin x)\cdot\cos x$
23. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-2)^3$
24. $y=\sqrt[3]{1-\cos x}$
25. $y=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}$
26. $y=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{2}}$
27. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{8-x^2}}$
28. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$
29. $y=(4-x)\cdot\sqrt[3]{x}$

15. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-3)^2}$

30. $y=\ln(\sin x)+\sin x$

5а

1. Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 15. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?
2. Известно, что произведение двух положительных чисел x и y равно 16. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?
3. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=18$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
4. Известно, что сумма двух положительных чисел $2x$ и y равна 15. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
5. Известно, что удвоенное произведение двух положительных чисел x и y равно 18. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?
6. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=50$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
7. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x+3y=12$. При каких значениях x и y величина xy^3 будет наибольшей?
8. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y=2$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2+4)$ будет наименьшей?
9. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=27$. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
10. Для двух положительных чисел x и y известно, что $3x+y=15$. При каких значениях x и y величина x^4y будет наибольшей?
11. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y=3$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2+9)$ будет наименьшей?
12. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=48$. При каких значениях x и y величина $x\ y^2$ будет наибольшей?
13. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x+2y=3$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?
14. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x\ \cdot y^2=5$. При каких значениях x и y величина $y^2(x^2+25)$ будет наименьшей?
15. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=32$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?
16. Известно, что сумма двух положительных чисел x и y равна 21. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
17. Известно, что произведение двух положительных чисел x и y равно 25. При каких значениях x и y их сумма будет наименьшей?

18. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=72$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
19. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x+2y=36$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?
20. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y=1$. При каких значениях x и y величина x^2+9y будет наименьшей?
21. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=8$. При каких значениях x и y их произведение будет наибольшим?
22. Для двух положительных чисел x и y известно, что $3x+y=18$. При каких значениях x и y величина x^2y будет наибольшей?
23. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^3\cdot y=4$. При каких значениях x и y величина $y(x^4+12)$ будет наименьшей?
24. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=48$. При каких значениях x и y величина xy^2 будет наибольшей?
25. Для двух положительных чисел x и y известно, что $6x+y=8$. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?
26. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^3\cdot y^2=4$. При каких значениях x и y величина $x^2(y^2+1)$ будет наименьшей?
27. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=15$. При каких значениях x и y величина x^3y^2 будет наибольшей?
28. Для двух положительных чисел x и y известно, что $5x+y=60$. При каких значениях x и y величина x^3y будет наибольшей?
29. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2\cdot y^3=16$. При каких значениях x и y величина $y^2(x^2+4)$ будет наименьшей?
30. Для двух положительных чисел x и y известно, что $x^2+y^2=96$. При каких значениях x и y величина xy будет наибольшей?

5 б*

Определить наибольшее отклонение от нуля функции на отрезке:

1. $y=x+\sin(2x)$, $[\pi;2\pi]$
2. $y=\operatorname{tg}x-2x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$
3. $y=e^x\cos x$, $[0;\pi]$
4. $y=e^{4x}\operatorname{tg}x$, $\left[-\dfrac{\pi}{3};0\right]$

16. $y=\operatorname{ctg}x-x$, $\left[-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{\pi}{6}\right]$
17. $y=e^{-x}\sin x$, $[0;\pi]$
18. $y=\sqrt{3}x+\cos(2x)$, $[0;\pi]$
19. $y=\operatorname{tg}(2x)-4x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

5. $y=\operatorname{tg}(4x)-16x$, $\left[\frac{\pi}{24};\frac{\pi}{6}\right]$

6. $y=x+\cos(2x)$, $[0;\pi]$

7. $y=\operatorname{ctg}x+2x$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$

8. $y=e^{x}\sin x$, $[0;\pi]$

9. $y=x-\cos(2x)$, $[0;\pi]$

10. $y=\operatorname{tg}x-x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

11. $y=e^{-x}\cos x$, $[0;\pi]$

12. $y=\sqrt{3}x+\sin(2x)$, $[\pi;2\pi]$

13. $y=e^{2x}\operatorname{tg}x$, $\left[-\frac{\pi}{3};0\right]$

14. $y=e^{2x}\sin^{2}x$, $[0;\pi]$

15. $y=\operatorname{tg}(3x)+4x$, $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$

20. $y=e^{2x}\sin(2x)$, $[0;\pi]$

21. $y=\sqrt{3}x-\cos(2x)$, $[-\pi;0]$

22. $y=4x-\operatorname{tg}(2x)$, $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$

23. $y=e^{2x}\cos^{2}x$, $[0;\pi]$

24. $y=\operatorname{tg}x+8\sin x$, $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

25. $y=\operatorname{ctg}(2x)+4x$, $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$

26. $y=-e^{4x}\operatorname{tg}x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

27. $y=\operatorname{ctg}x+8\cos x$, $\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{3}\right]$

28. $y=\operatorname{tg}(3x)-4x$, $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

29. $y=-e^{2x}\operatorname{tg}x$, $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

30. $y=e^{2x}\cos(2x)$, $\left[\frac{\pi}{16};\frac{\pi}{6}\right]$

5в*

1. В прямой круговой конус с углом 30° в осевом сечении и радиусом основания r вписан цилиндр. Определить радиус основания и высоту цилиндра, при которых его полная поверхность будет наибольшей.

2. Найти наибольшее значение площади прямоугольного треугольника *ABC,* в котором угол C прямой, если одной вершиной является точка *A(0;0)*, вершина *B* лежит на графике функции $y=5x^{3}e^{4-3x}+\frac{8}{x}$, а вершина *C* расположена на оси абсцисс и её абсцисса удовлетворяет соотношению $0{,}5\le x\le 10$.

3. Определить радиус цилиндра, вписанного в шар радиуса R, который имеет наиболь-

шую боковую поверхность. Указать значение площади полной поверхности такого цилиндра.

4. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\dfrac{t}{t+m}$-ую часть курса, а забывает at-ую часть. Сколько дней надо затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса, если $m=0,5$ и $a=\dfrac{2}{49}$?

5. Найти радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности S, который имеет наибольший объём.

6. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=e^{-x}$ и отрезками прямых $x=0$; $x=1$; $y=0$. В какой точке кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Указать значение этой площади.

7. Найти радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в конус с высотой h и радиусом r, боковая поверхность которого будет наибольшей.

8. В пространстве задана стандартная прямоугольная система координат $Oxyz$. Нужно пройти кратчайшим путем от точки $C(-1;-1;1)$ до точки $D(2;-2;0)$, обязательно заходя по пути на ось Oz. Определить длину такого кратчайшего пути.

9. Найти размеры правильной треугольной пирамиды заданного объёма V, которая имеет наименьшую сумму рёбер.

10. Провести через заданную точку $A(a;b)$, лежащую внутри некоторого угла φ, прямую, которая отсечёт от этого угла треугольник наименьшей площади. Указать значение этой площади.

11. По двум прямолинейным дорогам, составляющим угол в 60°, в направлении их пересечения одновременно начинают двигаться два пешехода: один со скоростью v_1 км/ч, а другой - v_2 км/ч. В начальный момент первый пешеход находится на расстоянии a км от перекрестка, а другой на расстоянии b км. Через какое время после начала движения расстояние между ними будет наименьшим? Определить это расстояние.

12. Найти наибольшее возможное значение отношения объёма конуса, вписанного в шар радиуса R, к объёму шара. Определить расстояние от центра шара до основания конуса.

13. В прямоугольник $ABCD$ со сторонами 24 и 27 см вписаны две касающиеся друг друга окружности. Одна окружность касается сторон AB и AD, а другая – сторон BC и CD. Найти наименьшее значение суммы площадей, ограниченных этими окружностями.

14. Проволокой длины L необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Найти радиус круга, при котором площадь клумбы будет наибольшей.

15. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяты точки D и E соответственно так, что прямая DE параллельна стороне AB. Точка P делит сторону AB на части так, что $BP=8AP$. Площадь треугольника ABC равна 1. Определить значение $k=BD:CE$, чтобы площадь трапеции $APDE$ была наибольшей.

16. Найти радиус и высоту цилиндра, имеющего наибольший объём, который вписан в куб с ребром a так, что его ось совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба.

17. Вершинами треугольника ABC являются точки $A(3;0)$ и $B(0;5)$, а третья вершина C лежит на параболе $y=3x^2-48x+200$. Найти наименьшее возможное значение площади такого треугольника.

18. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R, который имеет наибольшую площадь полной поверхности. Указать значение площади полной поверхности такого конуса.

19. В какой точке с абсциссой $x_\circ$ графика функции $y=-x^4+x$ следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком, касательной и прямой $x=x_\circ+2$ была наименьшей?

20. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса R с центральным углом φ.

21. В прямоугольном круговом конусе произведение высоты и радиуса основания равны a. Какое наименьшее значение может принимать радиус шара, описанного вокруг этого конуса?

22. Найти наибольший объём правильного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид вращения $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

23. Определить высоту конуса, описанного около полушара радиуса R, который имеет наименьший объём, если его основание и основание полушара лежат в одной плоскости и концентричны.

24. На координатной плоскости Oxy задано множество всех равносторонних треугольников, две вершины которых лежат на прямой $y=-3x+3$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству $\dfrac{1}{2}\cdot x^2 \le y \le -3x+3$. Найти наибольшее возможное значение площади таких треугольников.

25. В сферу вписаны правильная треугольная пирамида со стороной основания 9 и правильная четырехугольная призма, нижние плоскости оснований которых совпадают. Центр сферы делит высоту призмы в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины. Найти наибольшее возможное значение объёма призмы.

26. Провести через заданную точку $A(a;b)$, лежащую внутри некоторого угла α, прямую, которая отсечёт от этого угла два отрезка, суммарная длина которых будет наименьшей. Указать значение этой суммы.

27. Из фигуры, ограниченной кривой $y=3\sqrt{x}$ и прямыми $x=4$ и $y=0$ нужно вырезать прямоугольник наибольшей площади. Определить стороны этого прямоугольника.

28. Найти кратчайшее расстояние между кривыми $y=\mathrm{e}^{ax}$ и $y=\dfrac{\ln x}{a}$, $a>0$.

29. В треугольной пирамиде $SABC$ расстояние от каждой из вершин до середины ребра AB равны a см. При какой величине двугранного угла при ребре SC объём пирамиды будет наибольшим? Найти этот объём.

30. В какой точке с абсциссой $x_\circ$ графика функции $y=x^4+2x^2$ следует провести касательную, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиком, касательной и прямой $x=x_\circ-1$ была наименьшей?

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения косми-