Типовой расчёт по теме «Функции нескольких переменных»

Задание 1

Дана функция $u(x, y, z)$ и уравнение в частных производных (e). Проверьте, является ли функция u решением уравнения (e).

1. $u = x^{z^3} y$, (e): $3x \ln x \dfrac{\partial u}{\partial x} = yz \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.

2. $u = z^{x^2+y,}$ (e): $2xz \ln^2 z \dfrac{\partial u}{\partial z} = (x^2+y) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

3. $u = \sin(x^3 y^2 z)$, (e): $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x^6 y^4 u = 0$.

4. $u = z \operatorname{tg}(x^2 y)$, (e): $z^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 (u^2 + z^2)$.

5. $u = z^{2y} \arcsin x$, (e): $2 \ln z \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

6. $u = x^{y^3 z}$, (e): $x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y^3 (zy^3 \ln x + 1) u$.

7. $u = x^2 y^z$, (e): $xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2zu$.

8. $u = y^{z^3} \operatorname{arctg} x$, (e): $3z^2 \ln y \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.

9. $u = z^4 e^{xy^3}$, (e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4y^3 u$.

10. $u = z^{x^5 y^3} - 1$,
 (e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 5x^4 y^3 (1 + x^5 y^3 \ln z)(u+1)$.

11. $u = (3z+1)^{(5x^2+y^3)} - 1$, (e):
 $(3z+1) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = ((150x^3 + 30xy^3) \ln(3z+1) + 30x)(u+1)$.

12. $u = z^{x^5 \cos y}$, (e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 5x^4 \cos y (1 + x^5 \cos y \ \ln z) u$.

13. $u = y^{x^3+1} \operatorname{ctg} z$, (e): $y \sin 2z \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2(x^3+1) u = 0$.

14. $u = x^{(y^z)}$,

(e): $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y^z \ln x(zy^z \ln x \ln y + z \ln y + 1)u.$

15. $u = xz^{y^4+3}$, (e): $xz\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = (y^4 + 3)u.$

16. $u = x^{z^3}y$, (e): $3z^2 \ln x \ u = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$

17. $u = z^{x^4+y}$, (e): $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4x^3 \ln^2 z \ u = 0.$

18. $u = \sin(x^3y^2z)$, (e): $z\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 3x^5y^4z^2u = \dfrac{\partial u}{\partial x}.$

19. $u = z \operatorname{tg}(x^2y)$, (e): $z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^4u(u^2 + z^2).$

20. $u = z^{2y} \arcsin x$, (e): $2y\dfrac{\partial u}{\partial x} = z\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$

21. $u = x^{y^3z}$, (e): $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = uy^6 \ln^2 x.$

22. $u = x^2y^z$, (e): $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (1 + z \ln y)u.$

23. $u = y^{z^3} \operatorname{arctg} x$, (e): $z^3\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$

24. $u = z^4e^{xy^2}$, (e): $z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 8uxy.$

25. $u = z^{x^5y^2} - 1$, (e):

$z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2x^5y(1 + x^5y^2 \ln z)(u + 1).$

26. $u = (3z + 1)^{5x^2+y^3}$, (e):

$(3z + 1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = ((45x^2y^2 + 9y^5)\ln(3z + 1) + 9y^2)u.$

27. $u = z^{x^5 \cos y}$, (e):

$z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + x^5 \sin y(1 + x^5 \cos y \ \ln z)u = 0.$

28. $u = y^{x^2+1} \operatorname{ctg} z$, (e): $\sin 2z \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4x \ln y \ u = 0.$

29. $u = x^{y^z}$, (e): $y \ln y \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = z\dfrac{\partial u}{\partial z}.$

30. $u = xz^{y^4+3}$, (e): $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4y^3 \ln z \ u.$

Задание 2

Для функции $u=u(x, y, z)$ найти градиент и производную по направлению $\vec{l}$ в точке M.

1. $u=2x^2+3xy+zy$, $\vec{l}=\{3, 4, 0\}$, $M(1, -1, 1)$.
2. $u=x^2+xy-2zy$, $\vec{l}=\{1, 2, 2\}$, $M(1, 2, 1)$.
3. $u=3x^2-4xy+3zy$, $\vec{l}=\{0, 3, 4\}$, $M(-2, 1, 1)$.
4. $u=2x^2-3yz+2zx$, $\vec{l}=\{2, 1, -2\}$, $M(-1, 1, 4)$.
5. $u=2xy+zy-5xz^2$, $\vec{l}=\{-4, 0, 3\}$, $M(0, 1, 5)$.
6. $u=3xy^2-2x^2-5zy$, $\vec{l}=\{2, -2, 1\}$, $M(1, -1, 0)$.
7. $u=x^2y^2+x^2z^2+z^2y^2$, $\vec{l}=\{1, 4, 0\}$, $M(0, 1, -5)$.
8. $u=x^2y-z^2+2zy^2$, $\vec{l}=\{-1, 2, 2\}$, $M(1, 3, -4)$.
9. $u=xy+2xz^2-zy$, $\vec{l}=\{-3, 4, -1\}$, $M(2, 1, 5)$.
10. $u=2x^2y-xz+z^2y$, $\vec{l}=\{-2, 4, -4\}$, $M(3, 1, -6)$.
11. $u=x^2-5xy^2+3zy$, $\vec{l}=\{4, 0, 3\}$, $M(2, 2, 1)$.
12. $u=4x^2y-3xy+xz^2$, $\vec{l}=\{-2, 2, 1\}$, $M(3, 2, 1)$.
13. $u=3xy^2+3yz^2-zy^2$, $\vec{l}=\{1, 2, 0\}$, $M(1, 2, 1)$.
14. $u=x^2y-4yz+5z^2x$, $\vec{l}=\{1, -2, 2\}$, $M(2, 1, 1)$.
15. $u=5xy-yz^2-zx^2$, $\vec{l}=\{0, 1, 2\}$, $M(2, 2, 1)$.
16. $u=x^2+5xy-zy^2$, $\vec{l}=\{2, -1, 2\}$, $M(1, 1, 1)$.
17. $u=3x-4yx^2+yz^2$, $\vec{l}=\{2, 2, 1\}$, $M(-3, 2, 1)$.
18. $u=5x^2+3xy^2-2yz$, $\vec{l}=\{2, -2, 1\}$, $M(2, 1, 1)$.
19. $u=2x-yx^2+5zy^2$, $\vec{l}=\{-1, 2, 0\}$, $M(1, 3, 1)$.
20. $u=xy^2-2xy+3zx^2$, $\vec{l}=\{1, 2, -1\}$, $M(3, 1, 1)$.
21. $u=x^2y+3yz-xz^2$, $\vec{l}=\{0, -1, 2\}$, $M(1, 1, 3)$.
22. $u=xz^2+2yz^2-3zx^2$, $\vec{l}=\{1, 2, -2\}$, $M(2, 1, 2)$.
23. $u=x^2z-5y^2z+yz^2$, $\vec{l}=\{-2, 0, 1\}$, $M(3, 1, 3)$.
24. $u=2xy+yz^2-2zy^2$, $\vec{l}=\{1, 2, -2\}$, $M(2, 2, 1)$.
25. $u=3xy^2-3yz^2-3zx^2$, $\vec{l}=\{1, -2, 0\}$, $M(1, 2, 2)$.
26. $u=5x^2y-yz^2+zx^2$, $\vec{l}=\{2, 1, -2\}$, $M(1, 3, 2)$.
27. $u=5xz^2+yx^2-xz^2$, $\vec{l}=\{0, 1, -2\}$, $M(1, 1, 2)$.
28. $u=3xz-2xy^2-2yz$, $\vec{l}=\{2, 2, 1\}$, $M(2, 2, 1)$.
29. $u=5xy+3yx^2+zy^2$, $\vec{l}=\{2, 0, -1\}$, $M(2, 3, 1)$.
30. $u=4xy+zx^2-3zy^2$, $\vec{l}=\{0, 3, -4\}$, $M(1, 1, 3)$.

Задание 3

Найти уравнения касательной плоскости и нормали в указанной точке.

1. $x^2+y^2+z^2=9$, $M(2, 1, 2)$.
2. $x^2+2x+y^2-z^2=15$, $M(2, 1, 2)$.
3. $2x^2-y^2-z^2=16$, $M(4, 0, 4)$.
4. $x^2+2y^2-3z^2=0$, $M(1, 1, 1)$.
5. $2x^2+y^2-2z=0$, $M(-2, 2, 6)$.
6. $x^2+y^2-2y+z^2=15$, $M(0, 1, 4)$.
7. $x^2+4x+y^2-z^2+2z=33$, $M(-2, 6, 1)$.
8. $x^2-2y^2-z^2=28$, $M(6, 4, 0)$.
9. $3x^2+2y^2-z^2=0$, $M(-1, 1, 1)$.
10. $x^2+2x+y^2+z^2=8$, $M(-1, 0, 3)$.
11. $x^2+y^2-2z=0$, $M(-2, 2, 4)$.
12. $x^2+y^2-z^2+2z=5$, $M(0, 2, 1)$.
13. $3x^2-y^2-z^2=28$, $M(-4, 2, 4)$.
14. $2x^2+y^2-3z^2=0$, $M(-1, 1, 1)$.
15. $x^2+2y^2-2z=0$, $M(-2, 1, 3)$.
16. $x^2+y^2+z^2-2z=3$, $M(-2, 0, 1)$.
17. $x^2+y^2+2y-z^2=8$, $M(3, -1, 0)$.
18. $x^2-y^2-2z^2=18$, $M(6, 0, 3)$.
19. $2x^2+2y^2-z^2=0$, $M(-2, 2, 4)$.
20. $x^2+4y^2-6z=0$, $M(-6, 0, 6)$.
21. $x^2-2x+y^2-2y+z^2=7$, $M(1, 1, -3)$.
22. $x^2+y^2-z^2=36$, $M(4, 6, -4)$.
23. $x^2-y^2-z^2=11$, $M(6, -5, 0)$.
24. $2x^2+2y^2-z^2=0$, $M(2, -2, 4)$.
25. $x^2+y^2-z^2=0$, $M(-1, 0, 1)$.
26. $2x^2+3y^2-4z=0$, $M(2, -2, 5)$.
27. $2x^2-y^2-4z=0$, $M(2, 2, 1)$.
28. $x^2-3y^2-3z^2=21$, $M(-6, 2, 1)$.
29. $x^2-y^2-2z^2=0$, $M(2, 4, -6)$.
30. $x^2+2y^2+2z^2=4$, $M(0, 1, -1)$.

Задание 4

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $z(x, y)$ на множестве D.

1. $z = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 3$, область D задана неравенствами $-2 \leq x \leq 0$ и $0 \leq y \leq 3$.

2. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4$, область D задана неравенствами $0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 3$.

3. $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$, область D задана неравенствами $0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 3$.

4. $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 2y + 8$, область D задана неравенствами $0 \leq y \leq 4x - x^2 - 1$.

5. $z = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$, область D задана неравенствами $x^2 - 2x - 3 \leq y \leq 0$.

6. $z = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 4$, область D задана неравенствами $-4 \leq x \leq 0$ и $0 \leq y \leq 2$.

7. $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4$, область D задана неравенствами $1 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 2$.

8. $z = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 6$, область D задана неравенствами $-2 \leq x \leq 0$ и $-4 \leq y \leq 0$.

9. $z = -x^2 - 4x - 3y^2 + 6y + 8$, область D задана неравенствами $-4 \leq x \leq 0$ и $0 \leq y \leq 2$.

10. $z = 4x^2 + 8x + y^2 + 4y + 7$, область D задана неравенствами $-4 \leq x \leq 0$ и $0 \leq y \leq 2$.

11. $z = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1$, область D задана неравенствами $0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 3$.

12. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$, область D задана неравенствами $0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 1$.

13. $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$, область D задана неравенствами $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$.

14. $z = x^2 + 6x + 2y^2 - 4y + 8$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

15. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$, область D задана неравенством $x^2 + 2x + 1 \le y \le 4$.

16. $z = -x^2 + 6x - y^2 - 6y - 17$, область D задана неравенством $(x-3)^2 + (y+3)^2 \le 4$.

17. $z = x^2 + 6x + y^2 - 2y + 9$, область D задана неравенствами $-4 \le -2x \le 2$ и $0 \le y \le 2$.

18. $z = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $-4 \le y \le -1$.

19. $z = -x^2 - 2x - y^2 + 6y + 8$, область D задана неравенствами $x + 1^2 + (y-3)^2 \le 1$.

20. $z = 4x^2 + 8x + y^2 + 4y + 8$, область D задана неравенством $(x+1)^2 + \dfrac{y+2^2}{4} \le 1$.

21. $z = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 3$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 1$.

22. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 3$.

23. $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $1 \le y \le 3$.

24. $z = 4x^2 - 16x + y^2 - 2y + 16$, область D задана неравенством $(x-2)^2 + \dfrac{y-1^2}{4} \le 1$.

25. $z = -x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$, область D задана неравенствами $x^2 - 2x - 3 \le y \le 0$.

26. $z = x^2 - 6x - y^2 + 2y - 9$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

27. $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

28. $z = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 6$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $-4 \le y \le 0$.

29. $z = -x^2 - 6x - y^2 + 2y + 8$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

30. $z = 2x^2 + 8x + 2y^2 + 4y + 9$, область D задана неравенством $(x+2)^2 + (y+1)^2 \le 1$.