Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Тема 4.2. Интегральное исчисление функций одной переменной

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Санкт-Петербург
2006

Справочный материал

Задания данного типового расчета делятся на три типа: нахождение неопределенных интегралов, вычисление определенных интегралов и применение интегралов к решению геометрических задач.

Перечислим основные методы нахождения неопределенного интеграла.

Метод 1. Непосредственное интегрирование. В этом случае необходимо с помощью элементарных преобразований привести интеграл к табличному виду. Ниже приводятся первообразные для основных элементарных функций. При решении задач мы будем ссылаться на эту таблицу, указывая соответствующий номер формулы.

Таблица 1.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$	(1)
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$	(2)
$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(3)
$\int e^x dx = e^x + C$	(4)
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	(5)
$\int \cos x dx = \sin x + C$	(6)

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	(7)
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	(8)
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	(9)
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$	(10)
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	(11)
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	(12)
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$	(13)
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 + a} \right\| + C$	(14)
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \|\cos x\| + C$	(15)

$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	(16)
$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	(17)
$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$	(18)
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$	(19)
$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$	(20)

Метод 2. Замена переменной или интегрирование подстановкой. Методы, использующие замену переменной можно разделить на две группы:

1. Подведение под знак дифференциала.
2. Интегрирование посредством замены переменной.

Подведение под знак дифференциала используется, если подинтегральная функция представима в виде

$$\int f(x)dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx .$$

Используя определение дифференциала $u'(x)dx = du(x)$, исходный интеграл перепишется в виде

$$\int f(x)dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(u)du ,$$

где интеграл $\int f(u)du$ является табличным интегралом.

Например, $\int f(x^2)xdx = \int f(x^2)\frac{1}{2}dx^2 = \frac{1}{2}\int f(u)du$. Здесь использована формула $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$.

Приведем преобразования дифференциалов, используемых наиболее часто:

Таблица 2.

$dx = d(x+b)$, где $b = const$	(21)
$dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$, где $a \neq 0$	(22)
$xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$	(23)
$\sin x dx = -d(\cos x)$	(24)
$\cos x dx = d(\sin x)$	(25)
$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$	(26)
$e^x dx = d(e^x)$	(27)

Интегрирование посредством замены переменной. Для нахождения интеграла можно заменить переменную x новой переменной t, связанной с x подходящей формулой $x = \varphi(t)$. Определив для этой формулы $dx = \varphi'(t)dt$ и подставляя в интеграл, получим

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dx = \int F(t)dt .$$

Если полученный интеграл с новой переменной будет найден, то преобразовав результат к переменной x, получим искомое выражение заданного интеграла.

Иногда замену переменной удобнее сделать в виде $t = \varphi(x)$. Определив для этой формулы $dt = \varphi'(x)dx$, получим $dx = dt / \varphi'(x)$. Подставив $t = \varphi(x)$ и $dx = dt / \varphi'(x)$ в исходный интеграл, получим интеграл от новой переменной.

Метод 3. Интегрирование по частям. Формула *интегрирования по частям* имеет вид:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v\, du .$$

Этот метод используется чаще всего для интегралов специального вида $\int P_n(x) \cdot f(x)\, dx$, где $P_n(x)$ многочлен степени n, а $f(x)$ такая функция, что интеграл $\int f(x) dx$ является табличным или легко сводится к такому. В таблице 3 приведены основные типы интегралов, для которых используется этот метод.

Таблица 3.

$f(x)$	u	dv
$\sin \alpha x$	$P_n(x)$	$\sin \alpha x\, dx$
$\cos \alpha x$	$P_n(x)$	$\cos \alpha x\, dx$
$e^{\alpha x}$	$P_n(x)$	$e^{\alpha x}\, dx$
$a^{\alpha x}$	$P_n(x)$	$a^{\alpha x}\, dx$
$\ln^k x$, где $n \neq -1$	$\ln^k x$	$P_n(x) dx$
$\arcsin^k \alpha x$	$\arcsin^k \alpha x$	$P_n(x) dx$
$\arccos^k \alpha x$	$\arccos^k \alpha x$	$P_n(x) dx$
$\mathrm{arctg}^k\, \alpha x$	$\mathrm{arctg}^k\, \alpha x$	$P_n(x) dx$
$\mathrm{arcctg}^k \alpha x$	$\mathrm{arcctg}^k \alpha x$	$P_n(x) dx$

Задача 1.1

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{7x^2 + 7}$.

Справочный материал

Для нахождения интегралов данного типа необходимо с помощью элементарных преобразований привести интеграл к табличному виду.

Решение задачи 1.1

$$\int \frac{dx}{7x^2+7} = \int \frac{dx}{7\left(x^2+1\right)}.$$

По свойству интеграла (см. компендиум по этой теме), постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. Полученный интеграл является табличным и его можно вычислить по формуле (10).

$$\int \frac{dx}{7\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{7} arctgx + C.$$

Задача 1.2

Вычислить интеграл $\int \sqrt[7]{(x+2)^3}\, dx$.

Решение задачи 1.2

Используя свойство дифференциала (см. компендиум по этой теме), имеем $dx = d(x+2)$. Тогда исходный интеграл можно записать в виде

$$\int \sqrt[7]{(x+2)^3}\, dx = \int \sqrt[7]{(x+2)^3}\, d(x+2) = \int \sqrt[7]{u^3}\, du = \int u^{\frac{3}{7}}\, du.$$

Полученный интеграл является табличным, см. формулу (1).

$$\int u^{\frac{3}{7}}\, du = \frac{u^{\frac{3}{7}+1}}{\frac{3}{7}+1} + C = \frac{7}{10} u^{\frac{10}{7}} + C = \frac{7}{10}(x+2)^{\frac{10}{7}} + C.$$

Задача 2

Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[7]{\sin x}}$.

Справочный материал

Для нахождения интегралов данного типа используется метод подведения под знак дифференциала. Все необходимые формулы приведены в таблице 2.

Решение задачи 2

Используя свойство дифференциала $\cos x dx = d(\sin x)$, исходный интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[7]{\sin x}} = \int \frac{d \sin x}{\sqrt[7]{\sin x}}.$$

Введем обозначение $\sin x = u$, тогда интеграл запишется в виде $\int \frac{du}{\sqrt[7]{u}} = \int u^{-\frac{1}{7}} du$. Полученный интеграл является табличным интегралом, его можно вычислить по формуле (1).

$$\int u^{-\frac{1}{7}} du = \frac{u^{-\frac{1}{7}+1}}{-\frac{1}{7}+1} + C = \frac{7}{6} u^{\frac{6}{7}} + C = \frac{7}{6} \sin^{\frac{6}{7}} x + C.$$

Задача 3

Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}} dx$.

Справочный материал для задач 3, 4, 5

Задачи этого типа похожи на задачу 2, рассмотренную в предыдущем пункте, но они более сложные. Для нахождения интегралов здесь также используется метод подведения под знак дифференциала. Иногда требуется предварительно произвести некоторые алгебраические преобразования исходного интеграла.

Решение задачи 3

По свойству дифференциала $x^3 dx = \frac{1}{4} dx^4$, тогда исходный интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{\sqrt{4-\left(x^4\right)^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} .$$

Полученный интеграл является табличным интегралом, его можно вычислить по формуле (11).

$$\frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{u}{2} + C = \frac{1}{4} \arcsin \frac{x^4}{2} + C \text{.}$$

Задача 4

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

Решение задачи 4

Используя свойство дифференциала $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$, исходный интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int \frac{d \ln(x)}{\ln^3 x} = \int \frac{du}{u^3} .$$

Полученный интеграл является табличным интегралом, формула (1).

$$\int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2 \ln^2 x} + C \text{.}$$

Задача 5.1

Вычислить интеграл $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}dx$.

Решение задачи 5.1

Выполним предварительно алгебраические преобразования подынтегральной функции

$$\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+3}dx = \int \left(\sqrt{x}-3\right)dx .$$

Используя свойства интеграла его можно записать в виде

$$\int \sqrt{x}dx - \int 3dx .$$

Каждый из полученных интегралов является табличным.

$$\int \sqrt{x}dx - \int 3dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx - \int 3x^0 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + C .$$

Задача 5.2

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Справочный материал

Для решения задач такого типа требуется замена переменной.

Решение задачи 5.2

Для вычисления интеграла используем метод – интегрирование посредством замены переменной. Положим $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$. Подставим в интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = \int \frac{2\left(t+1-1\right)}{1+t}dt =$$

$$= \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)dt = 2\left(t - \ln\left|1+t\right|\right) + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$2t-\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C.$$

Задача 6

Вычислить интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Справочный материал для примеров 6-7

Для нахождения интегралов данного типа используется метод интегрирования «по частям». Напомним, что формула интегрирования по частям имеет вид: $\int u dv = u\cdot v-\int v\,du$. Основные приемы, связанные с интегрированием «по частям» приведены в таблице 3.

Решение задачи 6

Данный интеграл имеет вид $\int x^n \cdot \ln^k x\,dx$, где $n\neq -1$. Такие интегралы берутся «по частям». За функцию $u(x)$ принимается $\ln^k x$ и применяется k раз формула интегрирования по частям. В нашем случае $k=1$, поэтому формулу интегрирования «по частям» здесь достаточно использовать только один раз.

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x}} & v=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-2\int\sqrt{x}\,\frac{1}{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$$

Задача 7

Вычислить интеграл $\int x^2\cdot \operatorname{arctg}^2 x\,dx$.

Решение задачи 7

Данный интеграл относится к виду $\int x^n \cdot arctg^k x\,dx$. Такие интегралы берутся «по частям». За функцию $u(x)$ принимается $arctg^k x$ и применяется k раз формула интегрирования по частям. В нашем случае $k=2$, формулу интегрирования «по частям» здесь достаточно использовать два раза.

$$\int x\cdot arctg^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = arctg^2 x & du = \dfrac{2arctgx}{1+x^2}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= arctg^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2arctgx}{1+x^2}dx = arctg^2 x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{1+x^2}arctgxdx\,.$$

Применим ко второму интегралу еще раз формулу интегрирования по частям.

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}arctgxdx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = \dfrac{x^2}{1+x^2}dx & v = \int\dfrac{x^2}{1+x^2}dx \end{array} \right|.$$

Вычислим интеграл $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ отдельно, сделав предварительно некоторые алгебраические преобразования. Сначала добавим и вычтем 1 в числителе, а затем разобьем исходный интеграл на два табличных интеграла.

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int\frac{1}{1+x^2}dx =$$
$$= x - arctgx\,.$$

Отсюда

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = \frac{x^2}{1+x^2}dx & v = x - arctgx \end{matrix} \right| =$$

$$= arctgx \cdot (x - arctgx) - \int (x - arctgx) \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= arctgx \cdot (x - arctgx) - \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{arctgx}{1+x^2} dx.$$

Применив метод подведения под знак дифференциала последние два интеграла, можно вычислить

$$-\int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{arctgx}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int arctgx \cdot d(arctgx) =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + \frac{arctg^2 x}{2} + C.$$

Окончательный ответ

$$\int x \cdot arctg^2 x dx = arctg^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{1+x^2} arctgx dx =$$

$$= arctg^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - arctgx \cdot (x - arctgx) + \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| - \frac{arctg^2 x}{2} + C =$$

$$= arctg^2 x \cdot \frac{x^2}{2} - arctgx \cdot x + \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + \frac{arctg^2 x}{2} + C\ .$$

Задача 8

Вычислить интеграл $\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{(x^2 - 4) \cdot x} dx$.

Справочный материал

В данном интеграле подынтегральная функция является дробно-рациональной функцией, то есть представляет собой рациональную дробь вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n}{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m}.$$

Метод интегрирования рациональных дробей сводится к разложению подынтегральной функции на сумму ***элементарных*** дробей, интегралы от которых являются табличными интегралами.

Если знаменатель дроби можно разложить на множители

$$Q_m(x) = (x-a)\ldots(x-b)^k\ldots(x^2+p_1x+q_1)\cdot\ldots\cdot(x^2+p_2x+q_2)^m$$

где $(x^2+p_1x+q_1)$ и $(x^2+p_2x+q_2)$ не имеют вещественных корней, то правильная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $m<n$, может быть представлена в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \ldots +$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_2x+q_2)} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+p_2x+q_2)^m}$$

Приведем примеры элементарных или простейших дробей.

1. $\dfrac{A}{x-a}$,
2. $\dfrac{B}{(x-b)^k}$, (k - целое положительное число)
3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (дискриминант $D=\frac{p^2}{4}-q<0$),
4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($D<0$ и k - целое положительное число).

Интегралы от этих дробей имеют вид:

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a|+C$.

2. $\int \frac{B}{(x-b)^k}dx = B\cdot\frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1}+C$.

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + (N-\frac{Mp}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$.

Интегрирование простейших дробей этого типа требует более сложных вычислений. Мы не будем здесь подробно рассматривать вычисления, связанные с интегрированием дробей данного типа, так как эти вычисления приведены в компендиуме по данной теме. Приведем окончательную формулу.

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx =$$
$$= \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}(1-m)} + (N-\frac{Mp}{2})\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m}$$

Вычисление последнего интеграла сводятся к рекуррентным соотношениям вида

$$I_m = \frac{t}{2(m-1)a^2(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2(m-1)-1}{2(m-1)a^2}I_{m-1}.$$

Если дробь неправильная, предварительно следует выделить целую часть этой дроби. Неправильную рациональную дробь всегда можно представить в виде суммы рационального выражения (многочлена) и правильной рациональной дроби, то есть рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $n \geq m$ представима в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } k < m.$$

Такое представление неправильной рациональной дроби и называется выделением целой части.

Решение задачи 8

В нашем примере степень числителя и знаменателя одинакова и равна 3. Следовательно, предварительно необходимо выделить целую часть рациональной дроби. Рассмотрим подынтегральную функцию:

$$\frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{(x^2 - 4) \cdot x} = \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}$$

Выделение полной части рациональной дроби можно осуществить путем деления многочленов.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 5x^3 + 9x^2 - 22x - 8 & x^3 - 4x \\ \cline{3-3}
- & & \\
 & 5x^3 \qquad\quad - 20x & 5 \\ \cline{1-2}
 & \qquad 9x^2 - \ \ 2x - 8 &
\end{array}
$$

Таким образом

$$\frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{(x^2 - 4) \cdot x} = 5 + \frac{9x^2 - 2x - 8}{(x^2 - 4) \cdot x}.$$

Полученную неправильную рациональную дробь разложим на простейшие дроби. Знаменатель можно представить в виде $(x^2 - 4) \cdot x = (x - 2)(x + 2)x$. Следовательно, дробь представима в виде

$$\frac{9x^2 - 2x - 8}{(x^2 - 4) \cdot x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Приведем выражение, стоящее в правой части равенства к общему знаменателю

$$\frac{9x^2-2x-8}{(x^2-4)\cdot x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{(x^2-4)\cdot x}$$

Отсюда получим тождество

$$9x^2-2x-8=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Коэффициенты A, B, C можно найти двумя способами.

1 способ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях тождества.

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны:

$$\begin{array}{c|lcl} x^2 & 9 & = & A+B+C \\ x^1 & -2 & = & 2B-2C \\ x^0 & -8 & = & -4A \end{array}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов получена система линейных алгебраических уравнений, решив которую найдем неизвестные коэффициенты.

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ 2B-2C=-2 \\ -4A=-8 \end{cases}.$$

Отсюда $A=2$, $B=3$, $C=4$.

2 способ. Придавая переменной x конкретные значения.

Подставим значение $x=2$ в полученное тождество

$$9x^2-2x-8=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2),$$

определим $B=3$.

Подставив значение $x=-2$ определим $C=4$, и, наконец, подставив $x=0$, определим $A=2$.

Теперь исходный интеграл запишется в виде:

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{(x^2-4)\cdot x}dx=\int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=$$

$$= 5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C\,.$$

Полученный интеграл можно записать в более компактном виде, используя свойства логарифма.

$$\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{\left(x^2 - 4\right)\cdot x}\,dx = 5x + \ln\left|x^2(x-2)^3(x+2)^4\right| + C\,.$$

Задача 9

Вычислить интеграл $\int \frac{2x-3}{x^3-1}\,dx$.

Справочный материал

В данном интеграле подынтегральная функция так же является дробно-рациональной функцией, и представляет собой правильную рациональную дробь, в отличие от примера, рассмотренного в предыдущем пункте. Метод решения – разложение подынтегральной функции на простейшие рациональные дроби. Этот метод был изложен в предыдущем пункте.

Решение задачи 9

Знаменатель можно представить в виде $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$. Следовательно, дробь представима в виде

$$\frac{2x-3}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}\,.$$

Приведем выражение, стоящее в правой части равенства к общему знаменателю

$$\frac{2x-3}{x^3-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} = \frac{A\left(x^2+x+1\right) + (Mx+N)(x-1)}{x^3-1}$$

Отсюда получим тождество

$$2x - 3 = A\left(x^2 + x + 1\right) + (Mx+N)(x-1)\,.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны:

$$\begin{array}{c|lcl} x^2 & 0 & = & A+M \\ x^1 & 2 & = & A-M+N \\ x^0 & -3 & = & A-N \end{array}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов получена система линейных алгебраических уравнений, решив которую найдем неизвестные коэффициенты.

$$\begin{cases} A+M=0 \\ A-M+N=2 \\ A-N=-3 \end{cases}.$$

Выразим коэффициенты M и N через A и подставим их во второе уравнение

$3A=-1$ или $A=-1/3$, $M=1/3$, $N=8/3$.

Теперь исходный интеграл запишется в виде:

$$\int\frac{2x-3}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{-1/3}{x-1}+\frac{x/3+8/3}{x^2+x+1}\right)dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x/3+8/3}{x^2+x+1}dx$$

Первый из интегралов является табличным, формула (2).

Второй интеграл можно вычислить двумя способами.

1 способ. Второй интеграл представляет собой интеграл типа 3 (см. справочный материал к задаче 8), поэтому можно применить формулу.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+(N-\frac{Mp}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

В нашем случае

$$(N-\frac{Mp}{2})=\frac{8}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{1-1/4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\int\frac{x/3+8/3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\int \frac{2x-3}{x^3-1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

2 способ. Выделение полного квадрата в знаменателе подынтегрального выражения.

Представим x^2+x+1 в виде полного квадрата.

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Тогда интеграл можно переписать в виде:

$$\int \frac{x/3+8/3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Рассмотрим первый из интегралов

$$\frac{1}{3}\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right).$$

Второй из интегралов – табличный, формула (12).

$$\frac{5}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x/3+8/3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Окончательный ответ

$$\int\frac{2x-3}{x^3-1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 10

Вычислить интеграл $\int x\cdot\sqrt{x+4}\,dx$.

Справочный материал

В данном примере подынтегральная функция содержит иррациональное выражение. Метод решения здесь: применение подходящей замены. Обычно замену выбирают так, чтобы избавиться от иррационального выражения.

Решение задачи 10

Введем новую переменную $x+4=t^2$. Отсюда $x=t^2-4$, $dx=2tdt$. Подставим полученные выражения в интеграл

$$\int x\cdot\sqrt{x+4}\,dx=\int(t^2-4)2t^2dt=2\int\left(t^4-4t^2\right)dt=\frac{2t^5}{5}-\frac{8t^3}{3}+C.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\int x\cdot\sqrt{x+4}\,dx==\frac{2(x+4)^5}{5}-\frac{8(x+4)^3}{3}+C.$$

Задача 11

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}dx .$$

Справочный материал

В данном примере подынтегральная функция имеет вид $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Метод решения здесь основан на применении так называемой универсальной подстановки

$$tg\frac{x}{2}=t \text{, или } x=2\operatorname{arctg} t .$$

Тогда

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \ \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2} .$$

Таким образом, данная подстановка, приводит исходный интеграл от тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ к интегралу от рациональной функции новой переменной t.

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} .$$

Решение задачи 11

Применив универсальную подстановку, получим

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int \frac{1}{8-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2 - 8t + 15} dt = \int \frac{2dt}{(t-3)(t-5)}.$$

Таким образом, интеграл от тригонометрических функций свелся к интегралу от рациональной дроби.

Разложим подинтегральную функцию на простейшие дроби

$$\frac{2}{(t-3)(t-5)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-5} = \frac{A(t-5) + B(t-3)}{(t-3)(t-5)}.$$

Отсюда

$$2 = A(t-5) + B(t-3).$$

Подставим в ту формулу $t = 5$, получим $B = 1$, подставим в ту формулу $t = 3$, получим $A = -1$. Таким образом,

$$\int \frac{2dt}{(t-3)(t-5)} = \int \frac{dt}{(t-5)} - \int \frac{2dt}{(t-3)} = \ln|t-5| - \ln|t-3| + C = $$

$$= \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x} dx = \ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2} - 5}{tg\,\frac{x}{2} - 3}\right| + C.$$

Задача 12

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(x^2 + 16)\sqrt{9 - x^2}}$

Справочный материал

В данном примере требуется найти значение определенного интеграла. Для вычисления определенных интегралов используется формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$.

Подынтегральная функция имеет вид $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, где $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ — рациональная функция своих аргументов. Метод решения здесь основан на применении подстановки $x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t dt$.

Решение задачи 12

1 способ. Рассмотрим сначала неопределенный интеграл. Применив подстановку $x = 3\sin t$,

тогда $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2 t} = 3\sqrt{1 - \sin^2 t} = 3\cos t$

получим

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 16)\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{3\cos t dt}{(9\sin^2 t + 16)3\cos t} = \int \frac{dt}{9\sin^2 t + 16}$$

Представим в знаменателе число 16 в виде

$16 = 16(\sin^2 x + \cos^2 x)$, и вынесем $\cos^2 x$ за скобку, получим

$$\int \frac{dt}{(25tg^2 t + 16)\cos^2 t} = \int \frac{d(tgt)}{25tg^2 t + 16} = \frac{1}{25}\int \frac{d(tgt)}{tg^2 t + \left(\frac{4}{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{20} arctg\left(\frac{5}{4} tgt\right).$$

Возвратимся к исходной переменной. Найдем сначала

$$tgt=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Получим:

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{20}arctg\left(\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{20}arctg\frac{5}{8\sqrt{3}}.$$

2 способ. Можно интегрировать непосредственно определенный интеграл. В этом случае нужно пересчитать пределы интегрирования. При $x=0$, имеем $3\sin t=0$, отсюда $t=0$. При $x=\frac{3}{2}$, имеем $3\sin t=\frac{3}{2}$, отсюда $t=\frac{\pi}{6}$.

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\cos t dt}{\left(9\sin^2 t+16\right)3\cos t}=$$

$$=\frac{1}{20}arctg\left(\frac{5}{4}tgt\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{20}arctg\left(\frac{5}{4\sqrt{3}}\right).$$

Задача 13

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x$, $y=2x-x^2$.

Справочный материал

Определенный интеграл используется для нахождения площадей плоских фигур. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис.1), равна

$$.S=\int_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx.$$

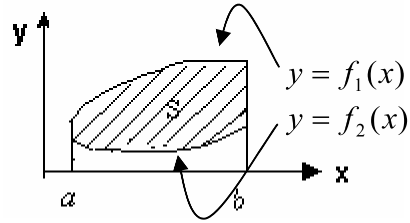

Рис.1 Площадь криволинейной трапеции

Решение задачи 13

В данном случае фигура ограничена двумя линиями – прямой и параболой.

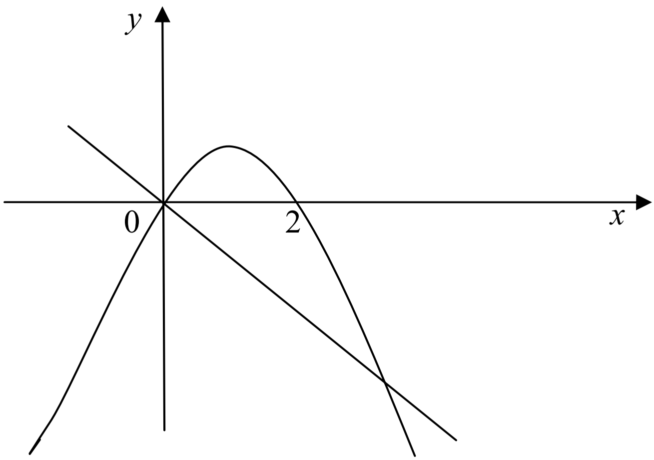

Рис. 2.

Для определения пределов интегрирования найдем точки пресечения этих кривых. Они находятся как решения уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Для определения пределов интегрирования найдем точки пресечения этих кривых. Они находятся как решения уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. В нашем случае $f_1(x) = 2x - x^2$, $f_2(x) = -x$. Для определения точек пересечения имеем уравнение:

$-x = 2x - x^2$, или $3x - x^2 = 0$. Решая уравнение, находим $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Следовательно, $a = 0, b = 3$.

Осталось вычислить определенный интеграл

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx = \int_0^3 \left(\left(2x - x^2\right) - (-x)\right)dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Задача 14

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \text{ при } 0 \le x \le 4\pi.$$

Справочный материал

Для определения площади фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

и прямыми вида $x = a$ и $x = b$, используется формула:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

где $\alpha \le t \le \beta$. Пределы интегрирования α и β находятся из уравнений $\varphi(\alpha) = a; \quad \varphi(\beta) = b$.

Решение задачи 14

Данная кривая является циклоидой.

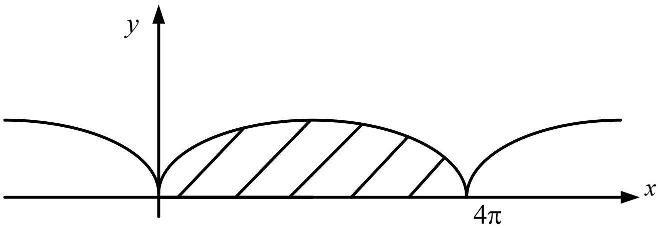

Рис. 3

В нашем случае

$$\begin{cases} \varphi(t) = 2(t - \sin t) \\ \psi(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Пределы интегрирования α и β находятся из уравнений $\varphi(\alpha) = a;\quad \varphi(\beta) = b$, то есть из равнений $2(\alpha - \sin\alpha) = 0;$ $2(\beta - \sin\beta) = 4\pi$. Решая их находим $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, поэтому искомая площадь равна значению определенного интеграла

$$S = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)(2(t - \sin t))' dt = \int_0^{2\pi} 4(1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = 4\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi$$

Задача 15

Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \text{ при } 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Справочный материал

Для определения длины дуги кривой, заданной в параметрическом виде $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$ используется формула:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt .$$

Решение задачи 15

Заданная кривая является астроидой

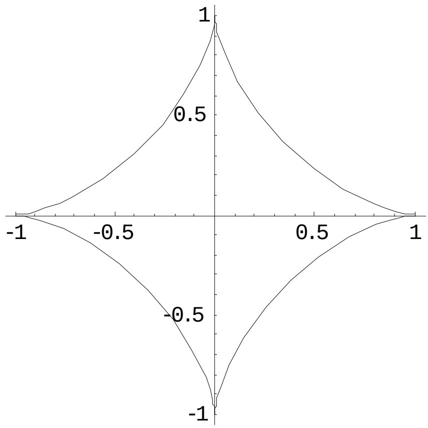

Рис. 4.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\; dt =$$

$$= 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\; dt = 3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\; dt = \frac{3}{2}\sin^2 t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

1 вариант

1. $\int \sqrt[6]{(x+4)^5}\, dx$.

2. $\int x \cdot \sqrt[5]{5-x^2}\, dx$.

3. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$.

4. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\, dx$.

5. $\int \frac{1+\ln x}{x}\, dx$.

6. $\int (6-5x)\, e^{-3x}\, dx$.

7. $\int x^2 \cos 3x\, dx$.

8. $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}\, dx$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+4\cos x}\, dx$.

12. $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}\, dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $x=2$, при $x \geq 2$.

15. Найти объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} y=\sin x \\ y=0 \end{cases}$, при $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

2 вариант

1. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$.

2. $\int \frac{x^3}{x^8+5} dx$.

3. $\int e^{\sin x+1} \cos x \, dx$.

4. $\int \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-4x}}$.

6. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{8x-1} \, dx$.

7. $\int \ln^2 2x \, dx$.

8. $\int \frac{x^3+1}{x \cdot (x-1)^3} dx$.

9. $\int \frac{x}{x^3+1} dx$.

10. $\int x \cdot \sqrt{x+4} \, dx$.

11.

$$\int_0^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx .$$

12. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4 - x^2 \quad \text{и} \quad y = x^2 - 2x .$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2\sqrt{2} \sin t \end{cases}, \qquad y = 2, \quad \text{при} \quad y \geq 2 .$$

15. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = 4x$ от ее вершины до точки $M(1,2)$.

3 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$.

2. $\int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$.

3. $\int x^2 \cdot e^{-x^3} dx$.

4. $\int \operatorname{tg} x \cdot (\ln \cos x)\, dx$.

5. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{e^x - 1}$.

6. $\int (6x-3) \cos 2x\, dx$.

7. $\int \left(x^2 - 2x + 5\right) e^{-x}\, dx$.

8. $\int \frac{x^2\, dx}{(x+2)(x-1)^2}$.

9. $\int \frac{x\, dx}{x^3 - 1}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

11. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin x - \cos x} dx$.

12. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\left(25+x^2\right)\sqrt{25+x^2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = x \cdot \sqrt{9-x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 3$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 4\,(t - \sin t) \\ y = 4\,(1 - \cos t) \end{cases}$ и $y = 4$, при $y \ge 4$ и $0 \le x \le 8\pi$.

15. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y^2 = x^3$ и $x = 4$, вокруг оси Ox.

4 вариант.

1. $\int \frac{dx}{3x^2 - 9}$.

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

3. $\int 3^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$.

4. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$.

5. $\int \cos^3 x \cdot \sin 2x \, dx$.

6. $\int \ln\left(x^2 + 9\right) dx$.

7. $\int (x+1)^2 \cos x \, dx$.

8. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+1)}$.

9. $\int \frac{(x+1)^3 dx}{x^3 - 1}$.

10. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x+3}}$.

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx$.

12. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\left(9 + x^2\right)^{3/2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x = 16 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$, $x = 2$, при $x \geq 2$.

15. Вычислить длину дуги линии $y = 2\sqrt{x}$, при $0 \leq x \leq 1$.

5 вариант.

1. $\int \frac{dx}{7x^2+7}$.

2. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

3. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$.

4. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$.

5. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$.

6. $\int x \cdot \ln^2 x\, dx$.

7. $\int x^3 \sin \frac{x}{3} dx$.

8. $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$.

9. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx$.

10. $\int x \cdot \sqrt{x-2}\, dx$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$.

12. $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos x \cdot \sin^2 x$, $y = 0$, при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$, $y = 3$, при $y \ge 3$.

15. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией: $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$.

6 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}$.

2. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

3. $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$.

4. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$.

6. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

7. $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x\, dx$.

8. $\int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$.

9. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)(x - 1)} dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$.

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx$.

12. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2 \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, при $0 \le x \le 2$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $y = \sqrt{3}$, при $y \le \sqrt{3}$.

15. Вычислить длину дуги кривой

$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

7 вариант.

1. $\int \frac{x^3}{4-x^2}\,dx$.

2. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}\,dx$.

3. $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$.

4. $\int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx$.

5. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$.

6. $\int x\cdot \cos^2 x\,dx$.

7. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$.

8. $\int \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)}\,dx$.

9. $\int \frac{x-4}{(x-2)\left(x^2+1\right)}\,dx$.

10. $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+3\sin x}\,dx$.

12. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 2$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией:

$$\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями:

$\int x\cdot e^{x^2}\,dx$.

$y^3 = 4x^2$, $y=2$,

8 вариант.

1. $\int (3x-7)^{17}\,dx$.

2. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

3. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$.

5. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{dx}{x}$.

6. $\int x^2 \ln x\,dx$.

7. $\int \frac{x^2+2}{e^{3x}}\,dx$.

8. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$.

9. $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}\,dx$.

10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

11. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x\,(1+\cos x)}$.

12. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\quad y=0,\quad x=1,\quad x=e^3.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x=2\,(t-\sin t) \\ y=2\,(1-\cos t) \end{cases},\quad y=3,\quad \text{при } y\ge 3 \quad \text{и} \quad 0\le x\le 4\pi.$$

15. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln x$, при $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

9 вариант.

1. $\int (x-1)\cdot x^{-\frac{2}{3}}dx$.

2. $\int \cos^2 2x\,dx$.

3. $\int \dfrac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$.

4. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$.

5. $\int \dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}\,dx$.

6. $\int \dfrac{\ln x}{x^3}\,dx$.

7. $\int \left(x^2-2\right)\cdot \cos x\,dx$.

8. $\int \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 dx$.

9. $\int \dfrac{x^3+x+1}{x\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{2+\sin x}\,dx$.

12. $\int\limits_0^1 \dfrac{x^4\,dx}{\left(2-x^2\right)^{3/2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, при $0\le x\le 2$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x = 3\left(t-\sin t\right) \\ y = 3\left(1-\cos t\right) \end{cases}$, $y=3$, при $y\ge 3$.

15. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=4$, вокруг Oy.

10 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3-2x}}$.

2. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx$.

3. $\int \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$.

4. $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

5. $\int \frac{dx}{3e^x + 1}$.

6. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$.

7. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$.

8. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2}\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+4\right)}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}\, dx$.

11. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x\,(1+\sin x)}$.

12. $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $x = 4$, при $x \geq 4$.

15. Найти длину дуги кривой $x = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$, при $0 \leq y \leq 3$.

11 Вариант.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 - 4}$.

2. $\displaystyle\int \frac{2 - 3\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\, dx$.

3. $\displaystyle\int e^x \cdot \sin\left(e^x\right) dx$.

4. $\displaystyle\int \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6 - 4x - 2x^2}}$.

6. $\displaystyle\int x \cdot \arcsin x\, dx$.

7. $\displaystyle\int \left(x^2 + 3x - 7\right) \cdot e^{-2x} dx$ /

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$.

9. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3}{(x + 1) \cdot \left(x^2 + 1\right)}\, dx$.

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x + 2}\, dx$.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \cdot \sin 2x}$.

12. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

13. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = (x + 1)^2$, $y^2 = x + 1$.

14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 3$, $y \geq 3$.

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$.

12 Вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x^2}}$.

2. $\int \sin 3x \cdot \cos x \, dx$.

3. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)} dx$.

4. $\int \frac{1}{\cos^2(1+\ln x)} \cdot \frac{dx}{x}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$.

6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$.

7. $\int (\arcsin x)^2 \, dx$.

8. $\int \frac{x^2-3x+2}{x \cdot \left(x^2+2x+1\right)} dx$.

9. $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$.

10. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

12. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{3/2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 6(t-\sin t) \\ y = 6(1-\cos t) \end{cases}$, $y = 9$, при $y \geq 9$ и $0 \leq x \leq 12\pi$.

15. Вычислить длину дуги кривой $y = 4 - x^2$ между точками ее пересечения с осью Ox.

13 вариант.

1. $\int \sin(2-4x)\,dx$.

2. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

3. $\int \left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} dx$.

4. $\int \frac{dx}{x\ln^{2} x}$.

5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x^{4}}}$.

6. $\int x \cdot 3^{\frac{x}{2}}\,dx$.

7. $\int x \cdot \operatorname{arctg}^{2} x\,dx$.

8. $\int \frac{x^{3}+6x^{2}+11x+7}{\left(x^{2}+3x+2\right)\cdot(x+2)}\,dx$.

9. $\int \frac{2x-1}{x^{3}-1}\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x+4\cos^{2} x}$.

11. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^{2}}$.

12. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16-x^{2}}\,dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=(x-2)^{3}, \quad y=4x-8.$$

14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x=8\cos^{3} t \\ y=4\sin^{3} t \end{cases}, \quad x=3\sqrt{3}, \text{ при } x\ge 3\sqrt{3}.$$

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^{2}+1, \quad x=\pm 2, \quad y=0.$$

14 вариант.

1. $\int \cos(1-2x)\,dx$.

2. $\int \frac{\sin x - 4}{\cos^2 x}\,dx$.

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}}\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 5)}$.

5. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,dx$.

6. $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

7. $\int x^2 e^x dx$.

8. $\int \frac{x^5 - x^4 + 3x - 2}{x^4 - x^3}\,dx$.

9. $\int \frac{3x\,dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

11. $\int\limits_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x + \sin x)^2}$.

12. $\int\limits_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64 - x^2\right)^3}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$y = \frac{1}{1+\cos x},\quad y = 0.\quad x = \frac{\pi}{2},\quad x = -\frac{\pi}{2}.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases},\quad y = 2\sqrt{3},\quad y \ge 2\sqrt{3}.$$

15. Вычислить длину дуги линии $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, при $1 \le x \le 2$.

15 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-1)^2+1}}$.

2. $\int \sin 2x \cdot \cos 2x \, dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$.

4. $\int \frac{2x^2 - x^5}{1+x^6} dx$.

5. $\int \frac{e^x - 1}{3e^x + 1} dx$.

6. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

7. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln^2\left(x^2+1\right) dx$.

8. $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 9x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$.

9. $\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$.

10. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$.

11. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x} dx$.

12. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $y = 1$, при $y \ge 1$, $0 \le x \le 2\pi$.

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2^x, \quad y = \frac{5+3x}{4}.$$

16 вариант.

1. $\int 2^{1-4x}\,dx$.

2. $\int \sin 2x\,dx$.

3. $\int \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx$.

4. $\int \dfrac{\ln^3 x+2}{x\ln x}\,dx$.

5. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

6. $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$.

7. $\int x^2 \cos 2x\,dx$.

8. $\int \dfrac{x^4-3x^2+3x-1}{x^3-3x-2}\,dx$.

9. $\int \dfrac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx$.

10. $\int \dfrac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x}$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx$.

12. $\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \dfrac{x^2 dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=\arccos x$, $x=0$, $y=0$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x=16\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$, $x=2$, при $x\ge 2$.

15. Найти длину дуги кривой $y=\ln\left(x^3-1\right)$, при $2\le x\le 3$.

17 вариант.

1. $\int 4^{2-3x}\,dx$.

2. $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\cos 2x}$.

3. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^8}}$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}$.

5. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}-1}$.

6. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

.

7. $\int x^2 \sin x\,dx$.

8. $\int \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2(x-1)}\,dx$.

9. $\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x}$.

11. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin^2 x\,(1-\cos x)}$.

12. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=6\sin^3 t \end{cases}$, $x=1$, при $x\ge 1$.

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sin x,\quad x=0,\quad y=\frac{2}{\pi}x.$$

18 вариант.

1. $\int \frac{dx}{5+3x}$.

2. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

4. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$.

5. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

6. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

7. $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

.

8. $\int \frac{x^3-4x+1}{x^3-2x^2+x} dx$.

9. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx$.

10. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\cos x+\sin x)^2} dx$.

12. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx$.

.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 4$, при $y \ge 4$ и $0 \le x \le 8\pi$.

15. Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, при $0 \le x \le \frac{8}{9}$.

19 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(2-3x)}$.

2. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{5+3\sin 3x}$.

3. $\int \frac{3^x\, dx}{\sqrt{9^x+1}}$.

4. $\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 x+4\right)}$.

5. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

6. $\int \arccos 2x\, dx$.

7. $\int x \ln^2 x\, dx$.

8. $\int \frac{2x^4+8x^3+x^2+x-20}{x^3(x+5)}\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$.

10. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\cos^2 x}$.

11. $\int\limits_{\pi/2}^{2\,\mathrm{arctg}\,2} \frac{dx}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$.

12. $\int\limits_0^2 \frac{x^4\, dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = 4-(y-1)^2, \quad x = y^2-4y+3.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \quad y = 2, \text{ при } \quad y \ge 2.$$

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = e^x$, при $0 \le x \le \ln 2$.

20 вариант.

1. $\int 2^{1-x}\,dx$.

2. $\int \frac{\cos x + 1}{\sin^2 x}\,dx$.

3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 + x^6}}$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$.

5. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x - 1}}$.

6. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2 - x}}\,dx$.

7. $\int \left(x^2 + 1\right)e^{-2x}\,dx$.

8. $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x + x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

9. $\int \frac{3x^2 + 11x + 8}{(x+2)\left(x^2 + 2x + 2\right)}\,dx$.

10. $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

11. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}$.

12. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(4 - x^2\right)\sqrt{4 - x^2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \ln x$, $x = b$, $y = \ln a$, при $a < b$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$, $y = 9$, при $y \ge 9$ и $0 \le x \le 12\pi$.

15. Найти длину дуги кривой $y = e^x + 13$, при $\ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$.

21 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)}$.

2. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+5}}$.

4. $\int \frac{dx}{\arccos^5 x\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$.

6. $\int \arcsin x\,dx$.

7. $\int \left(x^2+1\right)\cdot 3^x\,dx$.

8. $\int \frac{x^3-2x^2-12x-7}{x^3-3x-2}\,dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

10. $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}$.

11. $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^4 3x}$.

12. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = x^2\cos x$, $y = 0$, при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$,
$y = 4\sqrt{3}$, при $y \ge 4\sqrt{3}$.

15. Найти объем тела от вращения вокруг Ox фигуры
$(y-1)^2 = x$, $x = 1$.

22 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

2. $\int \frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}\,dx$.

3. $\int \frac{x^5 + x^2}{\sqrt{5+x^6}}\,dx$.

4. $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

5. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$.

6. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx$.

7. $\int \arcsin^2 x\,dx$.

8. $\int \frac{2x^3-2x^2-16x+32}{(x-2)\left(x^2-4\right)}\,dx$.

9. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

11. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin^4 x}$.

12. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$y = \ln x, \qquad y = \ln^2 x.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases},$$

$y = 3$, при $y \ge 3$

15. Найти длину дуги кривой: $y = \ln\sin x$, при $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

23 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$.

2. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{3\sin^2 x+4}$.

3. $\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}\, dx$.

4. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$.

5. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\, dx$.

6. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\, dx$.

7. $\int x\ln^2 x\, dx$.

8. $\int \frac{x^4+2x^3+9x^2+5x+2}{x^2(x+1)}\, dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

10. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+1}$.

11. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$.

12. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$y = e^x, \qquad y = e^{-x}, \qquad x = 1.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases},$$

$x = 4$, при $x \ge 4$.

15. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры:

$y = 1 - \frac{x^2}{2}$, $x + y = 1$.

24 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$.

2. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}$.

3. $\int \frac{x^5 dx}{x^{12} - 1}$.

4. $\int \frac{2 + \ln x}{x} dx$.

5. $\int \frac{dx}{e^x - 1}$.

6. $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$.

7. $\frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

8. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 12}{\left(x^2 + 4x + 4\right)(x - 1)} dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$.

10. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$.

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

12. $\int\limits_{-3}^{3} x^2 \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x - x^2 + 3, \qquad y = x^2 - 4x + 3.$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$, $y = 3$, при $y \ge 3$.

15. Найти длину дуги кривой: $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, при $0 \le x \le \frac{15}{16}$.

25 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-3x)}$.

2. $\int \sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

3. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^4+7}}$.

4. $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\int \frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+1}\,dx$.

6. $\int \arccos x\,dx$.

7. $\int \left(x^2+15\right)\cdot 5^x\,dx$.

8. $\int \frac{x^3-3x^2+7x-1}{2x^3-x^2+3}\,dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^3-64}$.

10. $\int \frac{dx}{\sin x-3\cos x}$.

11. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 2x}$.

12. $\int\limits_0^{1/2} \frac{-3\,dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$y=x^2\operatorname{tg} x$. $y=0$, при $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, $y=1$, при $y\ge 1$.

15. Найти длину дуги кривой $y=e^x$, при $\frac{1}{2}\ln 3\le x\le\frac{1}{2}\ln 8$.

26 вариант.

1. $\int \sqrt{3-5x}\,dx$.

2. $\int e^{4-x^2}\,x\,dx$.

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

4. $\int \dfrac{x^3+2x}{x^4-4}\,dx$.

5. $\int \dfrac{1}{x+1}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

6. $\int x^3 \ln(x+1)\,dx$.

7. $\int \left(x^3+3x+2\right)\cdot \sin 2x\,dx$.

8. $\int \dfrac{x^3+x^2+2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}\,dx$.

9. $\int \dfrac{x^3-3x^2+x-4}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}\,dx$.

10. $\int \mathrm{tg}^4\, x\,dx$.

11. $\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,2} \dfrac{dx}{\sin^2 2x\,(2+\cos 2x)}$.

12. $\int\limits_{2}^{2\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}\,dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2^x - 1 \quad \text{и} \quad y = \frac{3}{4}\cdot x\cdot(4-x).$$

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \qquad x = \frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad \text{при} \quad x \ge \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

15. Найти объем от вращения вокруг оси Oy фигуры:

$$y = x^2, \qquad x = y^2.$$

27 вариант.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.

2. $\int e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$.

3. $\int \sqrt[3]{3-x^3} \cdot x^2 dx$.

4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+2e^x+e^{2x}}}$.

5. $\int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$.

6. $\int \left(x^{33}-4x+5\right) \cdot \cos 3x\, dx$.

7. $\int \arccos^2 x \cdot x\, dx$.

8. $\int \frac{x^3-1}{x^3+1} dx$.

9. $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)} dx$.

10. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$.

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{2+\sin x}{2-\cos x} dx$.

12. $\int\limits_0^{3/2} x^2 \sqrt{9-x^2\, dx}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sin\frac{x}{2}, \quad y=\cos\frac{x}{2}, \quad x=0$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=t \\ y=1-t^2 \end{cases}$.

15. Вычислить длину дуги кривой $y=e^x$, при $0 \le x \le 1$.

28 вариант.

1. $\int 4^{1-3x}dx$.

2. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}dx$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(4+\operatorname{tg}^2 x\right)}$.

6. $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

$\int \left(4-3x^2+2x^3\right)\sin 2x\,dx$

7. $\int \left(4-3x^2+2x^3\right)\sin 2x\,dx$.

8. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-6x^2+9x}$.

9. $\int \frac{x^4dx}{x^4-2x^2+1}$.

10. $\int \sin^4 2x\,dx$.

11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+7\cos x}$.

12. $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=x^2-1$, $y=x+1$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$\begin{cases} x=2\,(t-\sin t) \\ y=2\,(1-\cos t) \end{cases}$, $y=1$, при $y\ge 1$, $0\le x\le 4\pi$.

15. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $x=y^2$.

29 вариант.

1. $\int \cos(3-5x)\,dx$.

2. $\int x\cdot 3^{4-x^2}\,dx$.

3. $\int \dfrac{x+\frac{\ln x}{x}}{x^2+\ln^2 x}\,dx$.

4. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}\,dx$.

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$.

6. $\int \ln(x+2)x^2\,dx$.

7. $\int \left(x^3-3x^2\right)e^{-3x}\,dx$.

8. $\int \dfrac{x^4+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}\,dx$.

9. $\int \dfrac{dx}{x(x+2)^2}$.

10. $\int \dfrac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$.

11. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{3+\sin x}{\cos x}\,dx$.

12. $\int\limits_0^{1} x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=x^2$, $x+y=2$, $x=0$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $y=1$, при $y\ge 1$.

15. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг Ox тела, ограниченного кривыми: $y=e^x$, $y=1$, $x=1$.

30 вариант.

1. $\int \sqrt[4]{2x+7}\,dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$.

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+4\ln x+5}}$.

4. $\int \frac{2^x\,dx}{4^x+2^{x+1}+1}$.

5. $\int \frac{x+\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$.

6. $\int \arccos x\cdot x\,dx$.

7. $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}$.

8. $\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.

9. $\int \frac{dx}{x^2\left(x^2-x+1\right)}$.

10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$.

11. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{4+5\sin 2x}$.

12. $\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4+x^2}\,dx}{x^3}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$y=x^2-2x$, $x+y=2$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right) \\ y=2\left(1-\cos t\right) \end{cases}$, $y=1$, при $\begin{cases} y\ge 1 \\ 0\le x\le 4\pi \end{cases}$.

15. Вычислить длину дуги кривой $y=e^{2x}$, при $0\le x\le 1$.