Типовой расчет “Теория функций комплексного переменного”

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Изобразить область комплексной плоскости, заданную неравенствами.

II. Найти все значения указанной функции комплексного переменного в указанной точке.

III. Найти аналитическую функцию по известной действительной или мнимой части.

IV. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой.

V. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой полученный ряд представляет данную функцию.

VI. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанном кольце.

VII. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного с помощью вычетов.

VIII. Вычислить несобственный интеграл от функции вещественного переменного с помощью вычетов.

Образцы выполнения заданий

I. Изобразить на комплексной плоскости множество $\mathcal{D}$, заданное неравенствами.

а) $\mathcal{D} = \{z: \ |z-i| \le 2, \ |z+1,5-i| > 1 \}$.

Неравенство $|z-i| \le 2$ задает на комплексной плоскости замкнутый круг $\mathcal{D}_1$ радиуса 2 с центром в точке $z_1 = i$; неравенство $|z+1,5-i| > 1$ задает внешность круга $\mathcal{D}_2$ радиуса 1 с центром в точке $z_2 = -1,5+i$.

Множество $\mathcal{D}$ является пересечением множеств $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Множества $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}$ изображены на рис. а). Множество $\mathcal{D}$ заштриховано.

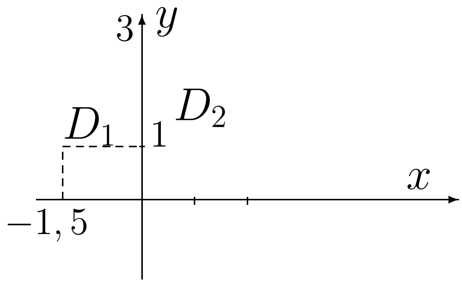

Рис. 1

б) $\mathcal{D} = \{z: \ |z| > 2 - \mathrm{Re}\, z, \ 0 \le \arg z \le \pi/4\}$

Обозначим $z = x + iy$, тогда неравенство $|z| > 2 - \mathrm{Re}\, z$ в координатах x, y примет вид $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 - x$. Если $x > 2$, то неравенство $|z| > 2 - \mathrm{Re}\, z$ справедливо при любом вещественном значении y; если же $x \le 2$, то из неравенства $\sqrt{x^2 + y^2} > 2 - x$ следует, что $x^2 + y^2 > (2 - x)^2$. Отсюда имеем, что при $x \le 2$ выполнено неравенство $y^2 > 4(1 - x)$. Точки, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, лежат правее параболы $y^2 = 4(1 - x)$. Таким образом, мы получили, что $\mathcal{D}_1$ – множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z| > 2 - \mathrm{Re}\, z$, лежит правее параболы $y^2 = 4(1 - x)$. Неравенство $0 \le \arg z \le \pi/4$ задает множество $\mathcal{D}_2$, представляющее собой замыкание внутренности угла, сторонами которого являются лучи $\varphi = 0$ $\varphi = \pi/4$. Множество $\mathcal{D}$ является пересечением множеств $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, см. рис. 2:

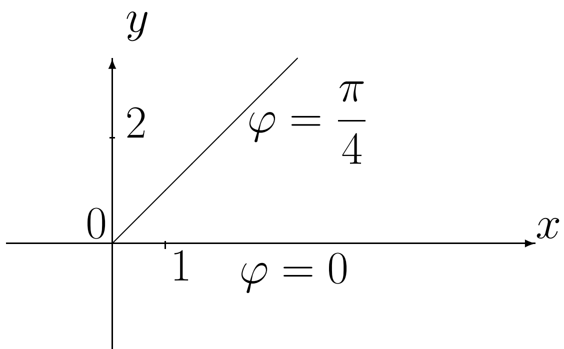

Рис. 2

II. Найти все значения функции в указанной точке.

а) Вычислить $\mathrm{th}(\log 3 + \pi i/4)$.

По определению функции гиперболический тангенс имеем

$$\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Как и ранее, будем для удобства использовать обозначение $\exp(z)$ вместо e^z, в случае громоздких показателей. Используя определение, найдем значение функции $\operatorname{th} z$ в заданной точке (заметим, что функция $\operatorname{th} z$ однозначна и имеет период πi):

$$\operatorname{th}\left(\log 3 + \frac{\pi\, i}{4}\right) = \frac{\exp\left(\log 3 + \frac{\pi\, i}{4}\right) - \exp\left(-\log 3 - \frac{\pi i}{4}\right)}{\exp\left(\log 3 + \frac{\pi\, i}{4}\right) + \exp\left(-\log 3 - \frac{\pi\, i}{4}\right)} =$$

$$= \frac{3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) - 3^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + 3^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4+5i}{5+4i} = \frac{40}{41} + \frac{9\, i}{41}.$$

б). Вычислить $\operatorname{Arcsin} 6$.

Функция $w = \operatorname{Arcsin} \mathrm{z}$ по определению является обратной для периодической функции $z = \sin w$. При этом функция $z = \sin w$ не является ограниченной, как в случае вещественного аргумента. Отсюда, функция $w = \operatorname{Arcsin} \mathrm{z}$ определена для всех $z \in C$ и многозначна.

Выведем общую формулу для нахождения значений $\operatorname{Arcsin} \mathrm{z}$. Используя равенство $z = \sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$, получим квадратное уравнение относительно e^{iw}:

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

где функция комплексного переменного $\sqrt{z}$ многозначна (двузначна), следовательно, любому значению аргумента соответствуют два значения функции.

Логарифмируя полученное выражение, деля затем на i и учитывая, что $1/i = -i$, получим:

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Применяя теперь полученную формулу, находим:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} 6 &= -i \operatorname{Ln}(6i + \sqrt{-35}) = -i \operatorname{Ln}[i\,(6 \pm \sqrt{35})], \\
\operatorname{Arcsin} 6 &= -i \operatorname{Ln}(6i + \sqrt{-35}) = -i \operatorname{Ln}[i\,(6 \pm \sqrt{35})] = \\
&= -i\,[\log|i\,(6 \pm \sqrt{35})| + i\,(\arg(i\,(6 \pm \sqrt{35})) + 2k\pi)] = \\
&= (\pi/2 + 2k\pi) - i\,\log(6 \pm \sqrt{35}),
\end{aligned}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Заметим, что $6 \pm \sqrt{35} > 0$, откуда $\arg(i(6 \pm \sqrt{35})) = \pi/2$.

в). Вычислить $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{-i}$.

Данное выражение является значением многозначной степенной функции $w(z)=z^{-i}$ в точке $z=(1+i)/2$. По определению имеем:

$$z^{-i}=e^{-i\,\mathrm{Ln}\,z}=\exp[\,-i\,(\,\log|z|+i\,(\arg z+2\pi k)\,)\,],$$

где $k\ =\ 0,\pm1,\pm2,...$ Для определенности будем считать, что $\arg z\in(-\pi,\pi]$. Вычислим $-i\,\mathrm{Ln}\,((1+i)/2)$:

$$-i\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{2}=-i\,\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{8k+1}{4}\pi i\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi+\frac{i\,\log 2}{2},$$

откуда получим:

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i}=\exp\,\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k+\frac{i\log 2}{2}\right)=$$

$$=\exp(\pi/4+2\pi k)(\,\cos((\log 2)/2)+i\sin((\log 2)/2)\,),\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

III. Восстановить аналитическую функцию по известной действительной или мнимой части.

а). Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее действительная часть $\mathrm{Re}\,f(z)=u(x,y)=e^{-y}\cos x+x$ и задано значение искомой функции в нуле: $f(0)=1$.

Для того, чтобы функция $u(x,y)$ являлась вещественной частью аналитической в односвязной области $\mathcal{D}$ функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в области $\mathcal{D}$ функция $u(x,y)$ являлась гармонической, то есть удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ +\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

в области $\mathcal{D}$. В том случае, если гармоническая функция $u(x,y)$ задана в односвязной области $\mathcal{D}$, можно с точностью до постоянного слагаемого найти аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, то есть восстановить аналитическую функцию по заданной ее действительной (или мнимой) части. При этом сопряженная с $u(x,y)$ гармоническая функция $v(x,y)$ находится при помощи криволинейного интеграла:

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C, \tag{1}$$

где $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ и $(x, y) \in \mathcal{D}$ (интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), а зависит лишь от точки (x, y), если точка (x_0, y_0) фиксирована).

Если область $\mathcal{D}$ не односвязна, то найденная функция $v(x, y)$, а следовательно, и $f(z) = u + iv$ могут оказаться неоднозначными.

Сначала проверим, что заданная функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-y}\sin x + 1, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -e^{-y}\cos x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-y}\cos x, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{-y}\cos x. \end{aligned}$$

Следовательно, для нашей функции уравнение Лапласа выполнено при всех x и y; то есть она является гармонической на всей плоскости.

Теперь найдем сопряженную по отношению к $u(x, y)$ (то есть связанную с ней условиями Коши-Римана) гармоническую функцию $v(x, y)$, тогда $f(z) = u+iv$ и будет искомой аналитической функцией. Для нахождения $v(x, y)$, можно воспользоваться формулой (1) или непосредственно условиями Коши-Римана. В этом примере покажем как для нахождения $v(x, y)$ использовать условия Коши-Римана.

По одному из условий Коши-Римана выполнено:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x + 1.$$

Фиксируем $x = x_0$, при этом для определения функции $v(x, y)$ возникает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dy}(x_0, y) = -e^{-y}\sin x_0 + 1.$$

Интегрируя, находим

$$v(x_0, y) = \int(-e^{-y}\sin x_0 + 1)\, dy = e^{-y}\sin x_0 + y + c(x_0),$$

затем, варьируя константу x_0, получим

$$v(x, y) = e^{-y}\sin x + y + c(x).$$

Осталось определить функцию $c(x)$. Из $v'_x = -u'_y$ – второго условия Коши-Римана, находим

$$e^{-y}\cos x + c'(x) = e^{-y}\cos x \implies c'(x) = 0 \implies c(x) = const.$$

Таким образом,

$$f(z) = (e^{-y}\cos x + x) + i\,(e^{-y}\sin x + y + c) =$$
$$= e^{-y}(\cos x + i\,\sin x) + (x + i\,y) + i\,c = e^{iz} + z + i\,c.$$

Используя условие $f(0) = 1$, получим $e^{i\,0} + 0 + i\,c = 1$, откуда следует, что $c = 0$. Окончательно получаем

Ответ: $f(z) = e^{i\,z} + z$.

б). Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$.

Проверим сначала, что данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа в области определения, то есть при $|z| > 0$. Имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 + \frac{y^3 - 3x^2 y}{(x^2+y^2)^3};$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - \frac{x^2 - y^2}{2(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 + \frac{3x^2 y - y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и функция $v(x,y)$ является гармонической при $|z| > 0$. Для нахождения $u(x,y)$ воспользуемся криволинейным интегралом. В этом случае будем иметь:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + c.$$

Выберем в качестве фиксированной начальной точки точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$, в качестве кривой L, соединяющей эту точку с точкой (x, y), выберем ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат: с началом в точке $(1, 0)$, концом в точке $(x, 0)$ и с началом в точке $(x, 0)$, концом в точке (x, y). Тогда, переобозначая переменные интегрирования: $x = t$, $y = s$, будем иметь

$$u(x,y) \;=\; \int_1^x \left(-2\cdot 0 - \frac{t^2 - 0}{2(t^2+0)^2}\right) dt - \int_0^y \left(2x + \frac{xs}{(x^2+s^2)^2}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2t}\Big|_1^x -2xs|_0^y - \frac{x}{2}\int\limits_0^y \frac{d(x^2+s^2)}{(x^2+s^2)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} - 2xy +$$

$$+ \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2}\right) + c = \frac{x}{2(x^2+y^2)} - 2xy + c,$$

откуда

$$f(z) = \frac{x}{2(x^2+y^2)} - 2xy + c + i\left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}\right).$$

Теперь, для того, чтобы получить выражение функции в зависимости от z, достаточно в найденном выражении положить $x = z,\ y = 0$. Окончательно имеем

Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{2z} + i\,(3 + z^2) + c.$

Замечание. В этом примере мы получили в результате однозначную функцию $f(z)$, хотя область $\mathcal{D} = \{z:\ z \in C, |z| > 0\}$, в которой заданная функция $v(x, y)$ является гармонической, не была односвязной.

IV. Вычислить интеграл от заданной функции $f(z)$ по заданной кривой C.

а). Вычислить $\int\limits_C z\mathrm{Im}\, z^2 dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2 + i$.

Пусть кривая C задана уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Интеграл по кривой C от функции комплексного переменного $f(z)$ можно выразить через криволинейный интеграл, а для его вычисления использовать одно из выражений:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))(dx(t) + i\,dy(t)).$$

В нашем случае кривую C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1 = (1, 0)$ и $z_2 = 2 + i = (2, 1)$, можно задать явным уравнением в координатах $(x, y):\ \ y = x - 1,\ \ 1 \le x \le 2$. В случае явного задания имеем $x(t) = x,\ y(t) = y(x),\ dz = (1 + i\,y'(x))dx$, откуда

$$\int_C z\mathrm{Im}\, z^2 dz = \int_1^2 (x + i\,(x-1))\mathrm{Im}\,(x + i\,(x-1))^2(1 + i\,(x-1)')dx =$$
$$= \int_1^2 (x(1+i) - i))(2x(x-1))(1+i)dx =$$
$$= 2(1+i)\int_1^2 ((1+i)x^3 - (1+2i)x^2 + ix)dx = 5/3 + 4i.$$

Ответ: $\int\limits_C z\mathrm{Im}\, z^2 dz = 5/3 + 4i.$

б). Вычислить интеграл $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\, dz$, где C – окружность $|z| = 2$ и $\operatorname{Ln} 1 = 0$, контур обходится в положительном направлении.

Данная подынтегральная функция является многозначной. В этом случае выделяют однозначную ветвь функции заданием значения функции в некоторой точке. При этом, если кривая интегрирования замкнута (замкнутый контур), то начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции (результаты интегрирования многозначной функции по замкнутому контуру при разных начальных точках могут оказаться различными, так как при этом может оказаться, что мы интегрируем различные непрерывные ветви заданной функции). Имеем

$$\operatorname{Ln} z = \log z + i\, 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

где $\log z = \log |z| + i \arg z$, а $\varphi = \arg z$ – значение аргумента из произвольного фиксированного промежутка длины 2π. Конкретный выбор этого промежутка определяет разбиение многозначной функции на однозначные ветви из которых она “склеена”. Функция $\log z = \log |z| + i \arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi)$ называется главным значением (главной ветвью) логарифма. Так как в условии задано значение $\operatorname{Ln} 1 = 0$ и указано, что контур обходится в положительном направлении, то интегрировать нужно функцию $\log z = \log |z| + i\,\varphi$ – непрерывную ветвь логарифмической функции, соответствующую возрастанию аргумента φ в пределах от 0 до 2π.

Уравнение окружности C : $|z| = 2$ задается зависимостью z от полярного угла φ и имеет вид $z = 2\, e^{i\varphi}$, откуда

$$dz = 2\, i\, e^{i\varphi} d\varphi, \quad \log z = \log 2 + i\,\varphi, \quad \text{где } 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$\text{Тогда} \qquad \begin{aligned} \int_C \log z\, dz &= \int_0^{2\pi} (\log 2 + i\,\varphi) 2\, i\, e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= 2\, i\, \left(-i\, e^{i\varphi} \log 2 + \varphi e^{i\varphi} + i\; e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi i. \end{aligned}$$

Ответ: $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\, dz = 4\pi i.$

в) Вычислить интеграл $\int\limits_C (x - a)\, dz$, где C — окружность $|z - a| = a$, контур обходится в отрицательном направлении.

Зададим окружность уравнением $z - a = a\, e^{i\varphi}$, причем φ пробегает значения от π до $-\pi$ (в данном случае нужно интегрировать однозначную функцию, поэтому выбор начальной точки и промежутка длины 2π,

в котором изменяется $\varphi = \arg(z-a)$, не влияет на результат). При этом $dz = aie^{i\varphi}d\varphi = ai(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi$, $x - a = \mathrm{Re}(z-a) = a\cos\varphi$.
Таким образом, меняя знак в связи с направлением обхода, имеем

$$\int_C (x-a)dz = -a^2 i \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\varphi + i\cos\varphi\sin\varphi)d\varphi = -a^2\pi i.$$

Ответ: $\int\limits_C (x-a)\,dz = -a^2\,\pi\, i.$

V. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности указанной точки $z = z_0$. Найти область представимости функции полученным рядом.

а) $f(z) = \log(3+2z)$ (однозначная главная ветвь логарифма), $z_0 = 1$.
Введем новую переменную $v = z - 1$. Тогда

$$\log(3+2z) = \log(3 + 2(v+1)) = \log 5 + \log\left(1 + \frac{2v}{5}\right).$$

Теперь, положив $w = 2v/5 = 2(z-1)/5$, воспользуемся стандартным разложением логарифмической функции

$$\log(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{w^n}{n} \quad \text{при } |w| < 1,$$

откуда получаем

$$\log(3+2z) = \log 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n (z-1)^n.$$

Этот ряд сходится абсолютно при $|w| = 2|z-1|/5 < 1$ или при $|z-1| < 5/2$, то есть в круге с центром в точке $z_0 = 1$, радиуса $R = 5/2$.

б) $f(z) = (z^2 - \pi\, z + \pi^2)\sin 3z$, $z_0 = \pi/2$.
Введем новую переменную $v = z - \pi/2$. Тогда

$$\begin{aligned}(z^2 - \pi z + \pi^2)\sin 3z &= \left(\left(v + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + \pi^2\right)\sin 3\left(v + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\left(v^2 + 3\pi^2/4\right)\cos 3v.\end{aligned}$$

Используем стандартное разложение $\cos w = \sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^n w^{2n}/(2n)!)$, $|w| < \infty$, откуда, полагая $w = 3v$, получим при всех v

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\left(v^2+\frac{3}{4}\pi^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,3^{2n}\,v^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,3^{2n}}{(2n)!}\,v^{2n+2} + \frac{3}{4}\pi^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,3^{2n}}{(2n)!}\,v^{2n}.
\end{aligned}
$$

Заменим в первой из сумм переменную суммирования: $n+1=k,\ \ k=1,2,\ldots$ и преобразуем эту сумму к виду

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,3^{2n}}{(2n)!}\,v^{2n+2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,3^{2k-2}}{(2k-2)!}\,v^{2k}.
$$

Во второй сумме выделим первое слагаемое и, аналогично, заменим переменную суммирования: $n=k$, получим

$$
\frac{3}{4}\pi^2\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,3^{2n}}{(2n)!}\,v^{2n} = -\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,3^{2k}}{(2k)!}\,v^{2k}.
$$

Таким образом, при всех $v=z-1$ справедливо разложение

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,3^{2k-2}}{(2k-2)!}\,v^{2k} - \frac{3}{4}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,3^{2k}}{(2k)!}\,v^{2k} = \\
&= -\frac{3}{4}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{3^{2k+1}}{(2k)!}\right)(z-1)^{2k} = \\
&= -\frac{3}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3^{2k-2}(16k^2-8k-27\,\pi^2)}{(2k)!}(z-1)^{2k}
\end{aligned}
$$

при $|z|<\infty$.

в) $\quad f(z)=(1-z)^{-2}, \quad z_0=0.$

Заметим, что $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$. Отсюда, учитывая, что $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ при $|z|<1$, и дифференцируя почленно степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ внутри круга сходимости $|z|<1$, получим искомое разложение $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,z^{n-1}$, справедливое при $|z|<1$.

г). $\quad f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z-2}, \quad z_0=1.$

Введем переменную $v=z-1$. Тогда $f(z(v))=\dfrac{2\,v+1}{v^2+v-2}$.

Разложим полученное выражение на простейшие

$$\frac{2\,v+1}{v^2+v-2}=\frac{1}{v+2}+\frac{1}{v-1}.$$

Воспользуемся стандартным разложением степенной функции $(1+w)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, справедливым при $|w|<1$, откуда, полагая $w=v/2$ и $w=-v$, находим

$$\frac{1}{v+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+v/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{v}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{v^n}{2^{n+1}},\quad |v|<2;$$

$$\frac{1}{v-1}=-\frac{1}{1-v}=-\sum_{n=0}^{\infty}v^n,\quad |v|<1.$$

Возвращаясь к переменной z, получаем, что для исходной функции имеет место разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)(z-1)^n,$$

справедливое при $|v|=|z-1|<1$, то есть внутри круга радиуса $R=1$ с центром в точке $z_0=1$.

VI. Разложить указанную функцию в ряд Лорана в указанной области.

а). Разложить функцию $f(z)=(2-z-z^2)^{-1}$ в ряд Лорана по степеням z в каждой из областей аналитичности этой функции.

Для нахождения областей аналитичности разложим знаменатель на множители, имеем: $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(z+2)}$. Следовательно, функция $f(z)$ аналитична в областях: $\mathcal{D}_1=\{z:\ |z|<1\}$, $\mathcal{D}_2=\{z:\ 1<|z|<2\}$, $\mathcal{D}_3=\{z:\ |z|>2\}$. Для того, чтобы разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в каждой из этих областей, представим $f(z)$ в виде суммы простейших дробей: $f(z)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{z+2}\right)$. Теперь найдем для каждой из простейших дробей все возможные их разложения по степеням z. Так как у обеих дробей имеется только одна особая точка, то для любой из них таких разложений ровно два (приводим их без коэффициента $1/3$). Для получения разложений используем формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии: $a_0+a_0\cdot q+a_0\cdot q^2+\ldots=\dfrac{a_0}{1-q}$, $|q|<1$.

При $|z|<1$ имеем $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n,\quad a_0=1,\quad q=z.$ (1)

Если же $|z| > 1$ (то есть во внешности единичного круга), то

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z(1-1/z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}, \tag{2}$$

в этом случае $a_0 = -1/z$, $q = 1/z$, а из $|q| = 1/|z| < 1$ следует, что $|z| > 1$.

Аналогично, если $|z| < 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \ a_0 = \frac{1}{2}, \ q = -\frac{z}{2}, \tag{3}$$

а при $|z| > 2$ (во внешности круга радиуса 2)

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1+2/z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}, \ a_0 = \frac{1}{z}, \ q = -\frac{2}{z}. \tag{4}$$

Последний ряд сходится при $|q| = 2/|z| < 1$, то есть при $|z| > 2$.

Следовательно, в круге $\mathcal{D}_1$ справедливы разложения (1) и (3); в кольце $\mathcal{D}_2$ справедливы разложения (2) и (3); наконец, в области $\mathcal{D}_3$ – внешности круга радиуса 2 – разложения (2) и (4).

Таким образом, в круге $\mathcal{D}_1$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 1\right] z^n;$$

в кольце $\mathcal{D}_2$ имеем

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n};$$

во внешности круга радиуса 2 – области $\mathcal{D}_3$ – имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n 2^n - 1]\frac{1}{z^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1} - 1}{z^n}. \end{aligned}$$

б) Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{\exp(2z+3)}{z-1}$ в кольце $0 < |z-1| < \infty$.

Поскольку функция $f(z) = \dfrac{\exp(2z+3)}{z-1}$ регулярна в кольце $0 < |z-1| < \infty$, в этом кольце существует единственное ее представление рядом вида $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n\,(z-1)^n$, который называется рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $0<|z-1|<\infty$. Для нахождения коэффициентов этого ряда воспользуемся стандартным разложением $e^w=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{w^n}{n!}$, справедливым при всех w ($|w|<\infty$). При $w=2(z-1)$ будем иметь:

$$\exp(2z+3)=e^5\exp(2(z-1))=e^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,(z-1)^n}{n!},\ |z-1|<\infty.$$

Следовательно, в кольце $0<|z-1|<\infty$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\exp(2z+3)}{(z-1)}=\frac{e^5}{z-1}+e^5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,(z-1)^{n-1}}{n!}= \\ &= \frac{e^5}{z-1}+e^5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}\,(z-1)^k}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

VII. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ от функции комплексного аргумента $f(z)$ по указанному замкнутому кусочно-гладкому контуру L при помощи вычетов.

а) $f(z)=\dfrac{\cos az}{z^2\,(e^z+1)}$, где a – вещественный числовой параметр, а $L=\{z:\ |z-i/2|=3\}$.

Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\cos az}{z^2\,(e^z+1)}$ имеет в круге $|z-i/2|<3$ две особые точки: $z_1=0$ – полюс второго порядка и $z_2=\pi\,i$ — простой полюс. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_L\frac{\cos az\,dz}{z^2\,(e^z+1)}\,dz=2\pi\,i\left(\operatorname{res}_{z=0}f(z)+\operatorname{res}_{z=\pi i}f(z)\right).$$

Найдем вычеты в особых точках: $\operatorname{res}_{z=0}f(z)=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{d(z^2\,f(z))}{dz}=$

$$=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos az}{e^z+1}\right)=\lim_{z\to0}\frac{-a\sin az\,(e^z+1)-e^z\cos az}{(e^z+1)^2}=-\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=\pi i}f(z)=\left.\left(\frac{\cos az}{z^2}\cdot\frac{1}{(e^z+1)'}\right)\right|_{z=\pi i}=\frac{\cos a\pi i}{(\pi i)^2e^{\pi i}}=\frac{\operatorname{ch}a\pi}{\pi^2}.$$

Следовательно,

$$\int_L\frac{\cos az\,dz}{z^2\,(e^z+1)}\,dz=2\pi\,i\left(\frac{\operatorname{ch}a\pi}{\pi^2}-\frac{1}{4}\right).$$

б) $f(z)=(2z-1)\,\sin\dfrac{\pi\,z}{a(z-1)}$, где a – вещественный числовой параметр, а $L=\{z:\ |z|=2\}$.

Функция $f(z)=(2z-1)\,\sin\dfrac{\pi\,z}{a(z-1)}$ в круге $|z|<2$ имеет одну существенно особую точку $z_0=1$, поэтому, применив теорему Коши о вычетах, будем иметь

$$\int\limits_L (2z-1)\,\sin\frac{\pi\,z}{a(z-1)}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{res}_{\,z=1} f(z).$$

Для нахождения вычета в существенно особой точке необходимо знать разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=1$. Запишем ряд Лорана в окрестности точки $z=1$ функции $\sin\dfrac{\pi\,z}{a(z-1)}$:

$$\sin\frac{\pi\,z}{a(z-1)}=\sin\left(\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{a(z-1)}\right)=\sin\frac{\pi}{a}\,\cos\frac{\pi}{a(z-1)}+$$

$$+\cos\frac{\pi}{a}\,\sin\frac{\pi}{a(z-1)}=\sin\frac{\pi}{a}\left(1-\frac{\pi^2}{2a^2\,(z-1)^2}+\ldots\right)+$$

$$+\cos\frac{\pi}{a}\left(\frac{\pi}{a(z-1)}-\frac{\pi^3}{6a^3(z-1)^3}+\ldots\right).$$

Тогда вычет функции $f(z)=(2(z-1)+1)\,\sin\dfrac{\pi\,z}{a(z-1)}$ в точке $z=1$ будет равен коэффициенту c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ в этом произведении. Этот коэффициент возникает при умножении первого слагаемого разложения функции $\sin\dfrac{\pi\,z}{a(z-1)}$ в ряд Лорана на $2\,(z-1)$ и второго слагаемого этого разложения на 1. Отсюда имеем $c_{-1}=\dfrac{\pi}{a}\left(\cos\dfrac{\pi}{a}-\dfrac{\pi}{a}\sin\dfrac{\pi}{a}\right)$. Следовательно,

$$\int\limits_L (2z-1)\,\sin\frac{\pi\,z}{a(z-1)}\,dz = 2\pi i\,c_{-1}=\frac{2i\pi^2}{a}\left(\cos\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}\right).$$

VIII. Вычислить несобственный интеграл $\mathrm{I} = \int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2x^2+b^2}dx$, **где** a, b, m – **вещественные числовые параметры, причем** $ab > 0$, $m > 0$.

Заметим, что $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{a^2x^2+b^2}\,dx$. Теперь воспользуемся тем, что для непрерывной на действительной оси (знаменатель не имеет вещественных корней) правильной рациональной функции $\mathrm{R}\,(z)$ при $m > 0$ справедливо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{R}\,(x)\,e^{imx}\,dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{res}\,_{z=z_k}\left(\mathrm{R}\,(z)e^{imx}\right),$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $\mathrm{R}\,(z)$, расположенным в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z > 0$. Если же $m < 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{R}\,(x)\,e^{imx}\,dx = -2\pi\, i \sum_k \mathrm{res}\,_{z=z_k}\left(\mathrm{R}\,(z)e^{imx}\right),$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции $\mathrm{R}\,(z)$, расположенным в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z < 0$. Так как в условии задачи $m > 0$, а в верхней полуплоскости $\mathrm{R}\,(z) = = \frac{1}{a^2z^2+b^2}$ имеет единственный полюс первого порядка $z = i \cdot \frac{b}{a}$, то

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{a^2x^2+b^2}\,dx &= 2\pi\, i\mathrm{res}\,_{z=ib/a}f(z) = 2\pi\, i \left.\frac{e^{imz}}{(a^2z^2+b^2)'}\right|_{z=ib/a} = \\ &= \frac{\pi}{ab}\exp\left(-\frac{bm}{a}\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2ab}\exp\left(-\frac{bm}{a}\right).$$

Расчетные задания

I. Изобразить на комплексной плоскости множество $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{D} = \{z : |z-4| \le 5, \quad |z+i| > 2\}$.
2. $\mathcal{D} = \{z : |z-1-i| > \sqrt{2}, \quad |z-2-2i| \le 2\sqrt{2}\}$.
3. $\mathcal{D} = \{z : 2 \le |z+2| < 3, \quad -\pi/2 < \arg z \le \pi/2\}$.
4. $\mathcal{D} = \{z : 1 < |z+1-2i| \le 3, \quad \pi \le \arg z < 2\pi\}$.
5. $\mathcal{D} = \{z : 1 \le |z+3-2i| < 4, \quad |\arg z| \le 3\pi/4\}$.
6. $\mathcal{D} = \{z : 2 < |z+2+4i| \le 5, \quad |\arg z| > \pi/2\}$.
7. $\mathcal{D} = \{z : |z| > 3 + \operatorname{Re} z, \quad \pi/2 \le \arg z < 2\pi/3\}$.
8. $\mathcal{D} = \{z : |z+2+3i| < 3, \quad \pi \le \arg z \le 3\pi/2\}$.
9. $\mathcal{D} = \{z : |z| \le 5, \quad |3\pi/2 - \arg z| < \pi/3\}$.
10. $\mathcal{D} = \{z : |z| < 6 - \operatorname{Re} z, \quad |\operatorname{Im} z| \le 4\}$.
11. $\mathcal{D} = \{z : |z| \ge 3 - \operatorname{Re} z, \quad |\operatorname{Im} z| > 4\}$.
12. $\mathcal{D} = \{z : |z| > 3, |z-4| \le 2, \quad -\pi/2 \le \arg z < 0\}$.
13. $\mathcal{D} = \{z : |z-1| < 1, \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \le 1\}$.
14. $\mathcal{D} = \{z : |z+i| \le 1, \quad |3\pi/2 - \arg z| < \pi/3\}$.
15. $\mathcal{D} = \{z : |z-3+2i| \le 2, \quad 0 < \operatorname{Re}(iz) \le 1\}$.
16. $\mathcal{D} = \{z : |z| \le 4 - \operatorname{Im} z, \quad 0 < \arg z < \pi\}$.
17. $\mathcal{D} = \{z : |z| > 1 + \operatorname{Im} z, \quad |z-i| \le 2\}$.
18. $\mathcal{D} = \{z : 1 < |z-1| \le 2, \quad \pi/4 \le \arg z < \pi/3\}$.
19. $\mathcal{D} = \{z : |z| \le 4 + \operatorname{Re} z, \quad |z-0{,}5| < 4\}$.
20. $\mathcal{D} = \{z : |z-4-3i| \ge 2, \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1\}$.
21. $\mathcal{D} = \{z : \pi/4 \le \arg z \le 3\pi/4, \quad |\operatorname{Re}(iz)| < 1\}$.
22. $\mathcal{D} = \{z : |z+1-i| > \sqrt{2}, \quad |\operatorname{Im}(iz)| \le 1\}$.
23. $\mathcal{D} = \{z : 1 \le |z-3+2i| < 3, \quad \operatorname{Im}(z^2) \ge 2\}$.

24. $\mathcal{D} = \{z : 2 < |z - 3 + 4i| \le 4, \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\}$.

25. $\mathcal{D} = \{z : -3\pi/4 \le \arg z \le -\pi/4, -6 \le \operatorname{Im} z \le -3\}$.

26. $\mathcal{D} = \{z : |z| < 2 - \operatorname{Re} z, \quad |z + 1| \le 2\}$.

27. $\mathcal{D} = \{z : |z + i| \ge 1, \quad |z - 3i| < 5\}$.

28. $\mathcal{D} = \{z : |z + 2 - 2i| > 3, \quad \pi/2 \le \arg z < \pi\}$.

29. $\mathcal{D} = \{z : |7\pi/4 - \arg z| < \pi/4, \quad |z - 1| \le 2\}$.

30. $\mathcal{D} = \{z : 0 < \operatorname{Re}(iz) < 2, \quad |\arg z| \ge \pi/4\}$.

II. Найти все значения функции в указанной точке.

1. 3^{2+i}.
2. i^{1+i}
3. $\operatorname{Ln}(1+i)$.
4. $(-2)^{\sqrt{2}}$
5. 4^{i}.
6. $(3+4i)^{1+i}$
7. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.
8. $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$
9. $\operatorname{Ln}(2-3i)$.
10. $\operatorname{Ln}(-2-3i)$
11. $\cos(5-i)$.
12. $\sin(1-5i)$
13. $\operatorname{tg}(2-i)$.
14. $\operatorname{sh}(-3+i)$
15. $\exp(\exp i)$.
16. $\exp(\exp(1+\pi i/2))$
17. $\cos(2+i)$.
18. $\sin(2i)$
19. $\operatorname{ctg}(\pi/4 - i\log 2)$.
20. $\operatorname{cth}(2+i)$
21. $\operatorname{tg}(2-i)$.
22. $\operatorname{Arctg}(1+2i)$
23. $\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}-i\right)$.
24. $\operatorname{Arcth}(1-i)$
25. $\operatorname{Arcsin}(i)$.
26. $\operatorname{Arcch}(2i)$
27. $\operatorname{Arcth}(1-i)$.
28. $1+i+\operatorname{sh}(1+i)$
29. $(2-i)\exp(2-i)$.
30. $\operatorname{ch}(3-2i)$

III. Найти аналитическую функцию по известной ее действительной или мнимой части.

1. $v(x,y) = 2\cos x\ \operatorname{ch} y - x^2 + y^2, \quad f(0) = 2i.$
2. $v(x,y) = -2\sin(2x)\ \operatorname{sh}(2y) + y, \quad f(0) = 2.$
3. $v(x,y) = \exp\left(-\dfrac{y}{2}\right)\ \cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{y^3}{3} + x^2 y.$
4. $u(x,y) = \operatorname{sh}\dfrac{y}{2}\ \sin\dfrac{x}{2} + 4(x^2 - y^2) - 4x + 1.$
5. $u(x,y) = \operatorname{ch}\dfrac{y}{2}\ \cos\dfrac{x}{2} - 2xy - 2x.$
6. $v(x,y) = \exp(-2y)\ \sin(2x) - \dfrac{x^3}{3} + xy^2.$
7. $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$
8. $u(x,y) = \exp(2y)\ \sin(2x) + 3xy^2 - x^3.$
9. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$
10. $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}.$
11. $u(x,y) = 2\sin x\ \operatorname{ch} y - x.$
12. $v(x,y) = 2(\operatorname{ch} x\ \sin y - xy), \quad f(0) = 0.$
13. $u(x,y) = x^2 + 2x - y^2, \quad f(i) = 2i - 1.$
14. $v(x,y) = \operatorname{ch}\dfrac{y}{3}\ \sin\dfrac{x}{3} + 2xy + 4y.$
15. $u(x,y) = \operatorname{sh}(2x)\ \cos(2y) + x^2 - y^2 + 4y - 4.$
16. $v(x,y) = \operatorname{sh}\dfrac{y}{3}\ \cos\dfrac{x}{3} + 4(x^2 - y^2) - 4x + 1.$
17. $u(x,y) = \operatorname{sh} 3y\ \cos 3x + 4(x^2 - y^2) + 4y - 1.$
18. $v(x,y) = 2(2\operatorname{sh} x\ \sin y + xy), \quad f(0) = 3.$
19. $v(x,y) = \operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\ \sin\dfrac{y}{2} - 8xy + 4x.$
20. $u(x,y) = \operatorname{ch}(3y)\ \sin(3x) - 8xy + 4y.$

21. $v(x,y) = \operatorname{ch}(2y)\,\cos(2x) + x^2 - y^2 - 2y + 1.$

22. $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + x + 5.$

23. $v(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\quad f(1) = 0.$

24. $u(x,y) = x^2 - y^2 - x.$

25. $v(x,y) = \log(x^2 + y^2) + x - 2y.$

26. $u(x,y) = 2\exp x\,\cos y + x^2y^2 - \dfrac{x^4 + y^4}{6}.$

27. $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}.$

28. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}.$

29. $v(x,y) = \operatorname{sh}(2y)\,\sin(2x) + x^2 - y^2 + 2x - 1.$

30. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3.$

IV. Вычислить интеграл по заданной кривой в указанном направлении.

1. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, C – полуокружность $|z-1| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 2$.

2. $\int\limits_C x\,dz$, C – радиус-вектор точки $z = 2 + i$.

3. $\int\limits_C x\,dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1$.

4. $\int\limits_C x\,dz$, C – окружность $|z-a| = R$. Обход контура в положительном направлении.

5. $\int\limits_C y\,dz$, C – окружность $|z-a| = R$. Обход контура в отрицательном направлении.

6. $\int\limits_C y\,dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1$.

7. $\int\limits_C (\overline{z} - 1)\, dz$, C – ломаная $ABCD$ с вершинами $A(-2;0)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$, $D(2;0)$.

8. $\int\limits_C y\, dz$, C – радиус-вектор точки $z = 2 - i$.

9. $\int\limits_C \overline{z}\, dz$, C – окружность $|z-2| = 2$. Обход контура в отрицательном направлении.

10. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$, C – ломаная с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;0)$.

11. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, C – окружность $|z-2| = 2$. Обход контура в положительном направлении.

12. $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\, dz$, C – окружность $|z| = R, \operatorname{Ln} R = \log R + 2\pi i$. Обход контура в отрицательном направлении.

13. $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\, dz$, C – окружность $|z| = R, \operatorname{Ln} R = \log R + 2\pi i$. Обход контура в положительном направлении.

14. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$, C – полуокружность $|z-1| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 1$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1 - i$.

15. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$, C – полуокружность $|z-1| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 2$.

16. $\int\limits_C z^2 \operatorname{Ln} z\, dz$, C – окружность $|z| = 1$, $\operatorname{Ln} 1 = 0$. Обход контура в отрицательном направлении.

17. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, C – ломаная с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;0)$.

18. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$, C – окружность $|z-2| = 3$. Обход контура в положительном направлении.

19. $\int\limits_C |z|\, dz$, C – окружность $|z| = R$. Обход контура в отрицательном направлении.

20. $\int\limits_C |z|\, dz$, C – ломаная с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;1)$.

21. $\int\limits_C \overline{z}\, dz$, C – полуокружность $|z-1| = 1, \operatorname{Re} z \geq 1$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1 - i$.

22. $\int\limits_C |z|\, dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1$.

23. $\int\limits_C |z|\, dz$, C – полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Начало пути интегрирования в точке $z = i$.

24. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, C – ломаная с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;1)$.

25. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, C – полуокружность $|z-1| = 1$, $\operatorname{Re} z \leq 1$. Начало пути интегрирования в точке $z = 1 - i$.

26. $\int\limits_C \overline{z}\, dz$, C – ломаная $OABO$ с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(2;1)$.

27. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, C – ломаная $OABO$ с вершинами $O(0;0)$, $A(-1;1)$, $B(1;1)$.

28. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$, C – ломаная $OABO$ с вершинами $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(4;0)$.

29. $\int\limits_C (z - \operatorname{Re} z)\, dz$, C – окружность $|z| = 1$. Обход контура в положительном направлении.

30. $\int\limits_C |z|\, dz$, C – радиус-вектор точки $z = 3 - 4i$.

V. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию.

1. $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$, $\quad z_0 = 0$.
2. $f(z) = (z+1)(z^2 + 5z + 6)^{-1}$, $\quad z_0 = -1$.
3. $f(z) = (z+1)(z-2)^{-1}$, $\quad z_0 = 1$.
4. $f(z) = \operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(\exp z - \exp(-z))$, $\quad z_0 = 0$.
5. $f(z) = (z-1)(z+3)^{-1}$, $\quad z_0 = -1$.

6. $f(z) = z^2(\exp(z^2) - 1), \quad z_0 = 0.$

7. $f(z) = \operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)), \quad z_0 = 1.$

8. $f(z) = (3z - 3)(z^2 - z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 1.$

9. $f(z) = (z + 1)(z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$

10. $f(z) = z \exp z, \quad z_0 = 1.$

11. $f(z) = \dfrac{z}{z + 2}, \quad z_0 = 1.$

12. $f(z) = z^2(1 + z)^{-2}, \quad z_0 = 0.$

13. $f(z) = \operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)), \quad z_0 = 0.$

14. $f(z) = z\,(z^2 - 2z + 5)^{-1}, \quad z_0 = 1.$

15. $f(z) = z^2 \exp z, \quad z_0 = 1.$

16. $f(z) = \log\left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right), \quad z_0 = 0.$

17. $f(z) = \cos^2 z, \quad z_0 = 0.$

18. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$

19. $f(z) = \sin^2 z, \quad z_0 = 0.$

20. $f(z) = (z + 1)(1 + z^2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$

21. $f(z) = z \log(1 + 2z), \quad z_0 = 1.$

22. $f(z) = (3z - 3)(z^2 - z - 2)^{-1}, \quad z_0 = 0.$

23. $f(z) = \log(2 + z), \quad z_0 = 0.$

24. $f(z) = \log\left(\dfrac{1 - z}{1 + z}\right), \quad z_0 = 0.$

25. $f(z) = \operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(\exp z + \exp(-z)), \quad z_0 = 1.$

26. $f(z) = \sin^2 z, \quad z_0 = -1.$

27. $f(z) = \exp(2z - 1) - \exp 1, \quad z_0 = 1.$

28. $f(z) = \operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(\exp z - \exp(-z)), \quad z_0 = -2.$

29. $f(z) = \sin(2z - z^2), \quad z_0 = 1.$

30. $f(z) = z^2 \log(3 - 2z), \quad z_0 = 2.$

VI. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области

1. $f(z) = z^{-1}(1-z)^{-1}, \quad 0 < |z| < 1.$
2. $f(z) = (z+1)\exp(-1/z^2), \quad 0 < |z| < \infty.$
3. $f(z) = (3z/2 - 1/z)\cos(1/z), \quad 0 < |z| < \infty.$
4. $f(z) = z^{-1}(1-z)^{-1}, \quad 0 < |z-1| < 1.$
5. $f(z) = (z-1)\sin(1/z), \quad 0 < |z| < \infty.$
6. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}, \quad 1 < |z| < 2.$
7. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad 2 < |z| < \infty.$
8. $f(z) = z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right), \quad 0 < |z-1| < \infty.$
9. $f(z) = z \exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right), \quad 0 < |z-1| < \infty.$
10. $f(z) = 2(z^2 - 6z + 8)^{-1}, \quad 2 < |z| < 4.$
11. $f(z) = z^2 \exp(1/z), \quad 0 < |z| < \infty.$
12. $f(z) = \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right), \quad 0 < |z-1| < \infty.$
13. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad 1 < |z| < 2.$
14. $f(z) = z^{-2}\cos(z+1), \quad 0 < |z| < \infty.$
15. $f(z) = 3(z^2 - 7z + 10)^{-1}, \quad 2 < |z| < 5.$
16. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}, \ 0 < |z-2| < \sqrt{5}.$
17. $f(z) = 2(z^2 - 6z + 8)^{-1}, \quad 0 < |z-4| < 2.$
18. $f(z) = (z-1)^{-1}\exp z, \quad 0 < |z-1| < \infty.$

19. $f(z) = 3\,(z^2 - 5z + 4)^{-1}, \quad 1 < |z| < 4.$

20. $f(z) = (z-1)^{-1}\exp\,(z^2 - 2z), \quad 0 < |z-1| < \infty.$

21. $f(z) = z^{-1}(1-z)^{-1}, \quad |z| > 1.$

22. $f(z) = z\,\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right), \quad 0 < |z-1| < \infty.$

23. $f(z) = 2\,(z^2 - 6z + 8)^{-1}, \quad 0 < |z-2| < 2.$

24. $f(z) = z\,(z-2)^{-1}, \quad |z| > 2.$

25. $f(z) = 3\,(z^2 - 5z + 4)^{-1}, \quad 0 < |z-1| < 3.$

26. $f(z) = 9\,(z^2 - 5z + 4)^{-1}, \quad 0 < |z-4| < 3.$

27. $f(z) = 3\,(z^2 - 7z + 10)^{-1}, \quad 0 < |z-2| < 3.$

28. $f(z) = 6\,(z^2 - 7z + 10)^{-1}, \quad 0 < |z-5| < 3.$

29. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad 0 < |z-1| < 1.$

30. $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{-1}, \quad 0 < |z-2| < 1.$

7. Вычислить интеграл при помощи вычетов.

1. $\displaystyle\int\limits_L (z^3+1)\exp\left(\frac{1}{z+1}\right)dz, \quad L = \{z:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}.$

2. $\displaystyle\int\limits_L \frac{z+1}{z(z-1)^2\,(z-3)}dz, \quad L = \{z:\ |z| = 2\}.$

3. $\displaystyle\int\limits_L \frac{dz}{z^4 + 2z^3}, \quad L = \{z:\ |z| = 3\}.$

4. $\displaystyle\int\limits_L \frac{\exp\,(iz) - 1}{z^3}dz, \quad L = \{z:\ |z| = 1\}.$

5. $\displaystyle\int\limits_L \frac{\exp z - \sin z}{z^4}dz, \quad L = \{z:\ |z| = 1/3\}.$

6. $\displaystyle\int\limits_L \frac{\sin z}{(z^3 - z)(z-1)}dz, \quad L = \{z:\ |z-1| = 3/2\}.$

7. $\int\limits_L \dfrac{z^3}{z^4-1}dz, \quad L=\{z:\ |z|=3/2\}.$

8. $\int\limits_L \left(z+\dfrac{1}{6}\right)\exp\left(\dfrac{1}{3z}\right)dz, \quad L=\{z:\ |z|=1/2\}.$

9. $\int\limits_L z\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)dz, \quad L=\{z:\ |z-1|=1/2\}.$

10. $\int\limits_L (z+2)\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)dz, \quad L=\{z:\ |z-1|=2\}.$

11. $\int\limits_L (z-5)\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right)dz, \quad L=\{z:\ |z|=3\}.$

12. $\int\limits_L (z^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)dz, \quad L=\{z:\ |z|=\sqrt{2}\}.$

13. $\int\limits_L \dfrac{dz}{(z+3)(z^2+1)}, \quad L=\{z:\ |z|=4\}.$

14. $\int\limits_L \dfrac{z^2\exp\left(3/z^2\right)-1}{z}dz, \quad L=\{z:\ |z|=\sqrt{5}\}.$

15. $\int\limits_L z^3\cos(2i/z)dz, \quad L=\{z:\ |z|=\sqrt{2}\}.$

16. $\int\limits_L \dfrac{dz}{z^2(z^{10}-2)}, \quad L=\{z:\ |z|=1\}.$

17. $\int\limits_L \dfrac{\sin z}{z(z-6)^2}dz, \quad L=\{z:\ |z|=10\}.$

18. $\int\limits_L \dfrac{2z}{1-2\sin^2 z}dz, \quad L=\{z:\ |z|=1\}.$

19. $\int\limits_L \dfrac{z^2+\sin z+2}{z^3+z^2\pi}dz, \quad L=\{z:\ |z|=2\}.$

20. $\int\limits_L \dfrac{\sin z}{z^2(z-8)}dz, \quad L=\{z:\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\}.$

21. $\int\limits_L \exp\left(3/z^2\right)(z^3-z)dz, \quad L=\{z:\ |z|=\sqrt{3}\}.$

22. $\int\limits_L (z^2+1)\exp(-1/z)dz, \quad L=\{z: \ |z|=2\}.$

23. $\int\limits_L \frac{dz}{(z^2+4)^2}, \quad L=\{z: \ |z-2i|=2\}.$

24. $\int\limits_L \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz, \quad L=\{z: \ |z|=5/2\}.$

25. $\int\limits_L \frac{z^2}{(z^2+1)(z-5)}dz, \quad L=\{z: \ |z|=3\}.$

26. $\int\limits_L \exp\left(\frac{z}{z+2}\right)dz, \quad L=\{z: \ |z+2|=1\}.$

27. $\int\limits_L (z-2)\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)dz, \quad L=\{z: \ |z|=3\}.$

28. $\int\limits_L \frac{dz}{z^4+1}, \quad L=\{z: \ |z-1|=1\}.$

29. $\int\limits_L \frac{dz}{(z-1)(z-2)^2}, \quad L=\{z: \ |z-2|=1/2\}.$

30. $\int\limits_L (z+i)\exp(2/z)dz, \quad L=\{z: \ |z|=2\}.$

8. Вычислить несобственный интеграл.

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+3}dx, \quad a>0.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2-2x+5}dx, \quad a<0.$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+2x+10}dx, \quad a>0.$

4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+7}dx, \quad a<0.$

5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+11}dx, \quad a<0.$

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+2x+5}dx, \quad a>0.$

7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+11}dx, \quad a<0.$

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+2x+2}dx, \quad a>0.$

9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-4x+8}dx, \quad a>0.$

10. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+2}dx, \quad a<0.$

11. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+5}dx, \quad a<0.$

12. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2-2x+10}dx, \quad a<0.$

13. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+6x+10}dx, \quad a<0.$

14. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{b^2x^2+10}dx, \quad a>0.$

15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+4x+8}dx, \quad a>0.$

16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-2x+17}dx, \quad a<0.$

17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-4x+5}dx, \quad a>0.$

18. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+4x+5}dx, \quad a<0.$

19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2-4x+20}dx, \quad a>0.$

20. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ \sin(ax)}{x^2+12}dx, \quad a<0.$

21. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{b^2x^2+13}dx, \quad a<0.$

22. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+2x+2}dx, \quad a>0.$

23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2-2x+2}dx, \quad a<0.$

24. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+8}dx, \quad a<0.$

25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2-8x+17}dx, \quad a>0.$

26. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+8x+17}dx, \quad a>0.$

27. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+4x+13}dx, \quad a<0.$

28. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-10x+26}dx, \quad a>0.$

29. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(ax)}{x^2+10x+26}dx, \quad a>0.$

30. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x^2-2x+2}dx, \quad a<0.$

Содержание

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1930 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д.Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П.Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной.

В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А.Тартаковский [1901-1973], замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А.Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при МВ ССО СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране, был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации ленинградского отделения математического института им. В.А.Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И.Смирнов, член-корреспондент АН АН СССР Д.К.Фаддеев, проф. И.С.Соминский, проф. Ф.И.Харшиладзе, проф. А.Ф.Андреев, проф. Ю.В.Аленицын проф. И.А.Молотков.

В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г.Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов.

С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю.Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине «Высшая математика» и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 4 доктора и 16 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях. Преподаватели кафедры принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях.

Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П.Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и теории групп в квантовой механике. Профессор В.Ю.Тертычный, член Нью-Йоркской академии и Соросовский профессор, занимается теорией оптимального управления механическими системами.