Министерство образования и науки Российской федерации

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Санкт Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

И. А. Смирнов, О. В. Ершова, Р. И. Белова

Методы оптимизации

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

Санкт-Петербург
2010

УДК 517.51: 66. 011. 001

Смирнов, И.А., Методы оптимизации. Контрольные работы: метод. указания / И.А. Смирнов, О.В. Ершова, Р.И. Белова – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010. – 60 с.

Методические указания содержат варианты заданий для выполнения контрольных работ по курсу «Методы оптимизации». Раздел теории поможет в формулировании ответов на ряд вопросов в контрольных работах.
Методические указания предназначены для студентов 3 курса заочной формы обучения по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника» и соответствуют рабочей программе дисциплины «Методы оптимизации».

Библиогр. 6 назв., илл. 21

Рецензент: В. К. Викторов, зав. кафедрой информационных систем в химической технологии Санкт-Петербургского государственного технологического института (Технического университета), д-р техн. наук, профессор.

Утверждены на заседании учебно-методической комиссии факультета информатики и управления 24.05.2010.

Рекомендованы к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ).

Содержание

Список обозначений

F - функция независимых переменных;

X - $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - вектор независимых переменных;

i - индекс, обозначающий порядковый номер переменной;

x_i - i-я независимая переменная;

n - количество независимых переменных;

φ_l - l-ная функция (ограничения);

y_i - i-я независимая переменная (размерная);

j - индекс, обозначающий порядковый номер шага поиска;

$x_{i,j}$ - значение i-й переменной на j-м шаге поиска;

X_j - совокупность значений n переменных (вектор) на j-м шаге поиска;

a, b; a_j, b_j - значения интервала поиска экстремума на исходном и на j-м шагах соответственно;

$x^{(1)}$, $x^{(2)}$ - значения независимой переменной в 1-й и 2-й пробных точках;

$x_j^{(k)}$ - значение независимой переменной в k-й пробной точке на j-м шаге поиска;

δ, ε - малые величины;

m - количество шагов поиска;

$(\Delta x)_j$ - шаг дискретизации.

Введение

В настоящее время теория оптимизации, успешному применению которой способствует современная вычислительная техника, вносит заметный вклад в ускорение научно – технического прогресса. Трудно назвать такую область инженерной деятельности, где бы ни возникали задачи оптимизационного характера. Это, например, задачи определения наиболее эффективного режима функционирования химико-технологических систем, работы различных технических устройств, проблемы организации производства, дающего наибольшую возможную прибыль при заданных ограниченных ресурсах, и др.

Оптимальное управление широко применяется в период комплексной автоматизации технологических и производственных процессов или сложных технических устройств. При этом, рассматривается задача оптимизации режимов с учетом ограничений, определяемых условиями работы объекта управления как при неизменных, так и при изменяющихся параметрах и характеристиках объекта управления и внешних воздействий (детерминированных и случайных).

Большинство практических задач может иметь несколько решений. Целью оптимизации является нахождение наилучшего решения среди многих потенциально возможных в соответствии с некоторым критерием эффективности или качества. Задача, допускающая лишь одно решение, не требует оптимизации. Оптимизация может быть осуществлена при помощи многих стратегий, начиная с весьма сложных аналитических и численных процедур и заканчивая разумным применением простой арифметики.

При выполнении контрольных работ необходимо руководствоваться учебным пособием: Смирнов, И.А. Методы оптимизации. Базовый курс: учебное пособие / И.А. Смирнов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010. 102 – с.

Студент выбирает номер варианта в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

1 Использование методов оптимизации при решении задач автоматизированного проектирования

1.1 Роль и место оптимизационных задач при проектировании

Проектирование – это процесс создания документа, необходимого для построения в заданных условиях нового объекта или модернизации существующего. Наибольшее распространение на практике получило автоматизированное проектирование (АП), основанное на взаимодействии человека и ЭВМ. Процесс АП является совокупностью операций поиска оптимальных технологических решений, которые отвечают заданным критериям в среде функционирования объекта. Поэтому в математическом обеспечении САПР особое место занимают методы решения задач оптимизации, которые смогут возникнуть на любом этапе проектирования:

– при синтезе технологической схемы для установления оптимальных связей между элементами схемы с целью максимального использования материальных и энергетических потоков;

– при выборе оборудования для расчета конструктивных параметров аппаратов, обеспечивающих оптимальные условия протекания процесса;

– при разработке математической модели для поиска таких значений её параметров, которые обеспечивают минимальное расхождение между расчетными и экспериментальными данными;

– при синтезе АСУТП для нахождения оптимальных режимов технологического процесса.

В качестве примера формулировки задачи оптимизации при проектировании можно привести следующую: необходимо определить такие конструктивные параметры химического реактора (рабочий объем, размеры, тип перемешивающего устройства и т.д.), при которых обеспечивается его минимальная себестоимость, при условии, что гарантируется заданный выход целевого продукта, а содержание побочных продуктов не превышает допустимых норм. На конструктивные параметры объекта проектирования устанавливаются ограничения, диктуемые соответствующими стандартами.

В настоящее время существует значительное количество методов оптимизации и их программных реализаций, которые могут быть классифицированы по разным признакам. Выбор того или иного метода оптимизации обусловлен, прежде всего, видом целевой функции (критерия оптимальности), наличием или отсутствием ограничений на переменные, а также характером этих ограничений. В тех случаях, когда критерий оптимальности сформирован в виде трудновычислимой функции многих переменных или не может быть записан в явном виде, а на переменные наложены ограничения в виде неравенств, самое широкое применение получили методы нелинейного программирования.

1.2 Общая постановка задач оптимизации

Оптимизация - это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Постановка задачи оптимизации предполагает наличие объекта оптимизации, в качестве которого может выступать либо человеческая деятельность в течение определенного времени, либо технологический или производственный процесс.

Решение любой задачи оптимизации начинают с выявления цели оптимизации, т.е. формулировки требований, предъявляемых к объекту оптимизации. От того, насколько правильно выражены эти требования, зависит возможность решения задачи.

Для решения задач оптимизации нужно располагать ресурсами оптимизации, под которыми понимают свободу выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта. Другими словами, объект оптимизации должен обладать определенными степенями свободы, например, управляющими воздействиями, которые позволяют изменять его состояние в соответствии с теми или иными требованиями.

Ещё одно условие правильной постановки оптимальной задачи заключается в наличии количественной оценки качества объекта оптимизации. Это условие также необходимо, поскольку лишь в этом случае можно сравнить эффект от выбора тех или иных управляющих воздействий.

Количественная оценка оптимизируемого качества объекта может называться критерием оптимальности, целевой функцией, функцией качества, экономическим критерием и т.д. Вид критерия оптимальности определяется конкретным содержанием решаемой задачи оптимизации и может оказывать существенное влияние на выбор метода решения. В конечном итоге достигаемое значение критерия оптимальности дает количественную оценку эффекта оптимизации.

Таким образом, для правильной постановки задачи оптимизации необходимо выполнение следующих условий:

- требование оптимизации только одной величины;
- наличие степеней свободы у оптимизируемого объекта - управляющих воздействий;
- возможность количественной оценки оптимизируемой величины.

Для решения задач оптимизации не существует единого универсального метода. В каждом конкретном случае приходится выбирать определенный метод оптимизации, учитывая специфику исследуемого объекта и особенности его функционирования. Выбор метода обусловлен также структурой математического описания технологического объекта.

Математическая формулировка задачи оптимизации часто может быть представлена как задача отыскания экстремума скалярной функции $F(X)$ от n-мерного векторного аргумента X при некоторых ограничениях:

$$min\ F = F\ (X); \tag{1.1}$$

$$X \in X^*, \tag{1.2}$$

где F - функция, являющаяся *количественной оценкой* представляющего интерес качества объекта оптимизации;

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор параметров объекта;

X^* – некоторое подмножество n-мерного Эвклидова пространства, называемое допустимым множеством задачи (1.1) – (1.2).

Ограничения на независимые переменные x_i ($i=1,\ldots, n$) в общем случае могут быть сформулированы в виде равенств:

$$\varphi_l\,(X) = 0,\ l = 1,\ldots, m \tag{1.3а}$$

или неравенств:

$$\varphi_l(X) \le 0, \quad l = 1,\ldots, m \tag{1.3б}$$

В конкретных случаях ограничения формулируются как система, содержащая ограничения и вида (1.3а), и вида (1.3б).

В этом случае говорят о задаче поиска на условного экстремума.

При анализе возможности решения задачи оптимизации с критерием (1.1) имеет смысл рассматривать два варианта. Это, во-первых, вариант, в котором соотношения (1.1), (1.3) заданы в аналитической форме, во-вторых, вариант, в котором хотя бы некоторые из них нельзя выразить явными аналитическими зависимостями от переменных x_i.

Последняя задача может быть решена одним из методов нелинейного программирования, когда предполагается, что критерий оптимальности $F(X)$ (1.1) является трудновычислимой функцией, аналитическое выражение которой как функции независимых переменных x_i отсутствует.

Поскольку при решении конкретных задач оптимизации численными методами независимые переменные могут иметь самый различный физический смысл и соответственно разные единицы измерения, целесообразно оперировать с их безразмерными нормализованными значениями. Обычно для нормализации используется возможный диапазон изменения значений независимых переменных, который всегда может быть установлен, исходя из физической сущности решаемой задачи.

Допустим, что некоторый физический параметр может изменять свое значение y_i в пределах:

$$y_{imin} \le y_i \le y_{imax}$$

Тогда, обозначив величину диапазона изменения значения y_i через d_i :

$$d_i = y_{imax} - y_{imin} ,$$

можно ввести безразмерную переменную x_i :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i\min}}{d_i} .$$

Переменная x_i при таком способе определения будет изменяться в пределах

$$0 \le x_i \le 1.$$

С учетом нормирования переменных можно говорить о решении задачи нелинейного программирования как определения совокупности неотрицательных значений x_i $(i = 1,\ldots,n)$, минимизирующих (или максимизирующих) критерий оптимальности $F(X)$ (1.1) и удовлетворяющих условиям (1.2), т.е. $X \in X^*$.

1.3 Классификация методов оптимизации

В настоящее время известны следующие методы решения задач оптимизации, суть которых определяется ее математической формулировкой.

Методы исследования функций классического анализа, применяемые в случаях, когда аналитический вид критерия оптимальности известен, ограничения отсутствуют и возможно аналитическое или численное решение.

Методы, основанные на использовании неопределённых множителей Лагранжа, применяемые для решения задач оптимизации с ограничениями типа равенств

Методы вариационного исчисления, используемые для решения задач статической и динамической оптимизации, в которых критерий оптимальности представлен в виде функционала, а решение заключается в отыскании вида функции.

Принцип максимума Понтрягина, применяемый для решения задач оптимального управления объектами, описываемыми системами дифференциальных уравнений, причем на управление наложены ограничения, а решение отыскивается в виде разрывных функций.

Метод динамического программирования, являющийся эффективным методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности является аддитивной функцией критериев оптимальности отдельных стадий, ограничения же на переменные учитываются при решении частных задач оптимизации на каждой стадии.

Методы математического программирования, включающие в себя ***методы линейного и нелинейного программирования***, причем методы линейного программирования используются для решения задач, в которых критерий оптимальности и ограничения сформулированы в виде линейных алгебраических выражений.

Предполагая, что задача оптимизации некоторым образом определена, можно классифицировать методы оптимизации по способам решения задач следующим образом.

Аналитические методы, использующие классические методы дифференциального и вариационного исчислений. Эти методы заключаются в определении экстремума целевой функции путем нахождения тех значений переменных, которые обращают в ноль ее первые производные.

Численные методы, использующие предшествующую информацию для нахождения лучших решений при помощи итерационных процедур. Численные методы применяются для решения задач, которые не могут быть решены аналитически, и, поскольку достаточно часто практические задачи поддаются решению численными методами, именно такие методы нелинейного программирования являются предметом рассмотрения в данном учебном пособии.

Графические методы, основанные на графическом изображении подлежащей максимизации или минимизации функции, зависящей от одной или двух переменных. Экстремум функции в этом случае получают непосредственно путем анализа ее графического изображения.

Экспериментальные методы. Экстремум функции находится путем в результате эксперимента непосредственно на реальном объекте. Результаты проведенного эксперимента используются для планирования следующего эксперимента, позволяющего получить лучшие результаты.

Методы исследования различных вариантов, основанные на анализе нескольких возможных решений одной и той же задачи с целью выбора наилучшего.

2 Методы нелинейного программирования

2.1 Общая характеристика методов нелинейного программирования

Задача минимизации (максимизации) функции F n переменных ($n \geq 2$) на заданном множестве X^* n-мерного пространства в общем виде формулируется так: найти такие значения независимых переменных ($X = x_1, x_2, \ldots, x_n$), которые обеспечивают экстремум (минимум или максимум) функции и удовлетворяют ограничениям:

а) первого рода (на независимые переменные):

$$g_i \leq x_i \leq h_i,\ i = 1,2,\ldots,l;\ l \leq n; \tag{2.1}$$

б) второго рода (функциональные, типа неравенств):

$$G_i \leq \varphi_i(X) \leq H_i,\ i = l+1, l+2,\ldots,m; \tag{2.2}$$

в) третьего рода (функциональные, типа равенств):

$$\varphi_i(X) = 0,\ i = m+1, m+2,\ldots,k. \tag{2.3}$$

Как уже сказано выше (глава 1), если функция и (или) ограничения (все или некоторые) являются нелинейными, задача поиска экстремума этой функции является задачей нелинейного программирования. В приведенной формулировке приняты следующие обозначения:

n - число независимых переменных;

g_i, h_i - числовые значения соответственно нижних и верхних границ допустимых значений независимых переменных (ограничения первого рода);

G_i, H_i - числовые значения соответственно нижних и верхних границ допустимых значений ограничений второго рода;

k - общее количество ограничений первого, второго и третьего рода;

m - общее количество ограничений первого и второго рода;

l - количество независимых переменных, на которые наложены ограничения первого рода.

Необходимо отметить, что в частной формулировке оптимизационной задачи некоторые из видов ограничений могут отсутствовать.

Большинство методов нелинейного программирования может быть охарактеризовано как многошаговые поисковые процедуры последовательного улучшения исходного (или начального) состояния. Причем, заранее неизвестно, какое число шагов гарантирует нахождение экстремума целевой функции с заданной точностью. В каждом методе нелинейного программирования так или иначе решается вопрос о выборе, во-первых, направления шага в сторону улучшения значения функции цели и, во-вторых, об определении величины шага в выбранном направлении. И выбор направления шага, и особенно, выбор его величины являются сложными задачами, от успешного решения которых зависит эффективность того или иного метода.

Разнообразие методов нелинейного программирования, в основном, и объясняется стремлением найти решение задачи за наименьшее число шагов или при наименьшем количестве вычислений функции цели.

Реализация большинства методов нелинейного программирования заключается в переходе из некоторого исходного или промежуточного *j*-го состояния

$$X_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, ..., x_{n,j})$$

в следующее состояние X_{j+1} изменением предыдущего на величину ΔX_j, называемую шагом:

$$X_{j+1} = X_j + \Delta X_j .$$

Целесообразность перехода из состояния X_j в состояние X_{j+1} при отыскании минимума целевой функции, очевидно, определяется условием:

$$F(X_{j+1}) < F(X_j) .$$

Классификация методов нелинейного программирования осуществляется как по основным аспектам постановки задачи, так и по основным характерным особенностям самих методов решения.

Классификация по некоторым аспектам постановки задачи следующая.

Наличие ограничений:

– без ограничений;

– с ограничениями типа равенств;

– с ограничениями типа неравенств;

– с ограничениями и типа равенств, и типа неравенств.

Тип независимых переменных:

– дискретные (целочисленные) переменные;

– переменные, принимающие непрерывные значения.

Классификация по характерным чертам методов решения:

– методы, использующие производные и не использующие производные;

– методы с аналитическим определением производных и с численным определением производных;

– методы, использующие первые производные, и методы, использующие вторые производные;

– методы с одновременным изменением всех переменных и с поочередным изменением переменных (релаксационные);

– методы детерминированного поиска и методы случайного поиска.

Методов решения задач нелинейного программирования к настоящему времени разработано достаточное количество. Однако нет метода, который можно было бы использовать в любом случае, при любой формулировке задачи. Как правило, отсутствует возможность априорно решить вопрос о том, какой метод окажется эффективнее в конкретном случае. Но знакомство с основными идеями методов решения задач нелинейного программирования и конкретными алгоритмами их реализации, несомненно, полезно.

В настоящем методическом пособии не ставится задача рассмотрения всего разнообразия методов нелинейного программирования. Все множество методов подразделено на две группы: методы одномерного поиска (пункт 2.3) и методы многомерного поиска (пункт 2.4). Причем, рассматриваются лишь методы детерминированного поиска.

2.2 Основные понятия и термины, используемые при рассмотрении методов нелинейного программирования

Критерий оптимальности может рассматриваться как *функция цели,* определяемая в (n+1)-м пространстве переменных x_i (i = 1,…,n). На рисунке 2.1 приведено наглядное изображение *поверхности отклика* функции двух (n = 2) переменных.

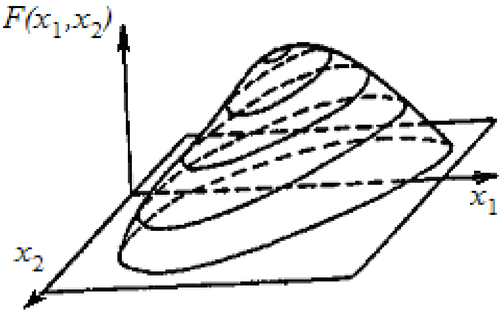


Рисунок 2.1 - Поверхность отклика функции двух переменных $F(x_1,x_2)$

Для выявления формы поверхности отклика используются *линии равного уровня* функции цели, проекции которых на плоскость (x_1,x_2) изображены на рисунке 2.2. Если функция $F(X)$ непрерывна, линии равного уровня представляют собой замкнутые кривые. Конкретное состояние оптимизируемой системы (значения переменных) отображается с помощью точки, называемой *изображающей точкой*. Множество состояний системы, отображающих переход из исходного состояния в оптимальное, можно рассматривать как *траекторию движения* изображающей точки по поверхности отклика функции цели.

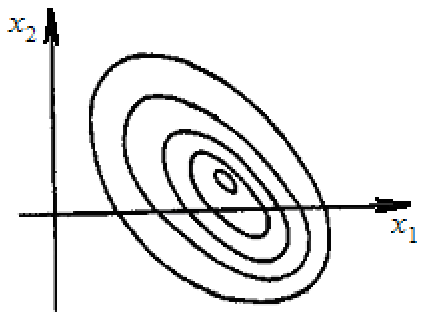


Рисунок 2.2 - Проекция поверхности отклика функции $F(x_1,x_2)$ на плоскость (x_1,x_2)

Очевидно, что возможны различные траектории движения, оптимальной среди которых является траектория наискорейшего изменения функции цели, отличающаяся от прочих тем, что в каждой точке направление движения соответствует направлению наискорейшего изменения функции. Таким направлением является направление вектора градиента (или антиградиента при поиске минимума) функции цели в этой точке.

Оптимальным решением задачи оптимизации являются значения переменных, при которых обеспечивается экстремальное (минимальное или максимальное) значение функции цели.

При наличии ограничений на переменные оптимальное решение задачи должно находиться (при n = 2) либо на линии, отображающей ограничения типа равенств (рисунок 2.3), либо внутри *области допустимых значений* переменных, выделяемой в пространстве переменных заданной системой ограничений (рисунок 2.4).

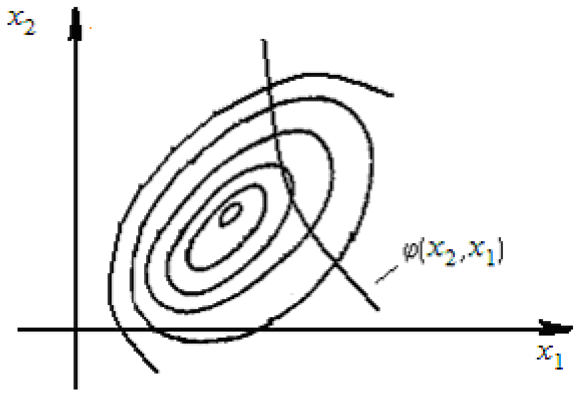


Рисунок 2.3 - Изображение функционального ограничения типа равенства φ (x_1,x_2) = 0

Эффективность, а иногда и сама возможность реализации конкретного метода решения задачи нелинейного программирования, во многом зависят от конкретных особенностей поверхности отклика функции. К таким особенностям относятся следующие:

- наличие в допустимой области нескольких экстремумов;
- наличие седловых точек;
- овражный характер поверхности отклика.

Рисунок 2.4 - Изображение функциональных ограничений типа неравенств $\psi_l(x_1,x_2) \le 0$, $l = 1, 2$

Наличие в области допустимых значений переменных нескольких экстремумов (рисунок 2.5) ставит задачу поиска *глобального экстремума*, которым является один из *локальных экстремумов*, т. е. тот, который обеспечивает самое наименьшее (при поиске минимума) или самое большое (при поиске максимума) значение функции цели.

Рисунок 2.5 - Проекция поверхности отклика многоэкстремальной функции $F(x_1,x_2)$

Так как количество локальных экстремумов, как правило, заранее неизвестно, задача поиска глобального экстремума усложняется необходимостью отыскания всех локальных экстремумов, чтобы затем выбрать из них глобальный.

Наличие так называемых ***седловых*** точек также усложняет задачу поиска экстремума функции, поскольку в седловой точке (рисунок 2.6) по одному из направлений *(А-А)* функция имеет минимум, а по другому *(В-В)* - максимум. На рисунке 2.6,а представлено трехмерное изображение седловой точки, на рисунке. 2.6,б проекция поверхности функции $F(x_1,x_2)$ на плоскость.

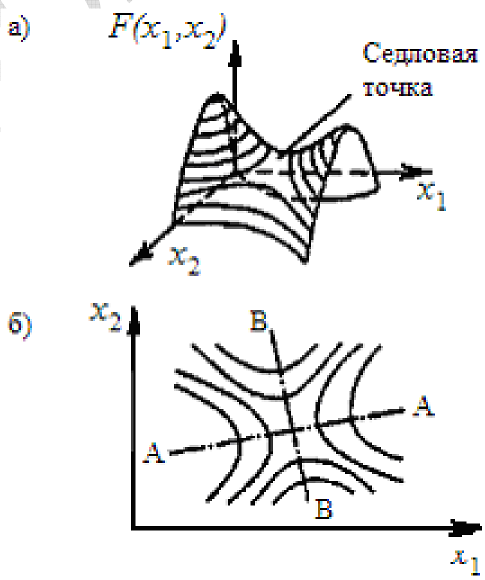


Рисунок 2.6 - Поверхность отклика функции двух переменных, имеющая седловую точку

Поверхность отклика функции цели имеет ***овражный характер,*** если (рисунок 2.7) вдоль некоторого направления (в общем случае представляющего собой кривую линию) функция цели изменяется слабо, а по другим направлениям достаточно сильно. Такое направление называют дном оврага. Перемещение вдоль него весьма затруднено из-за незначительной величины градиента функции и, следовательно, невысокой точности его определения.

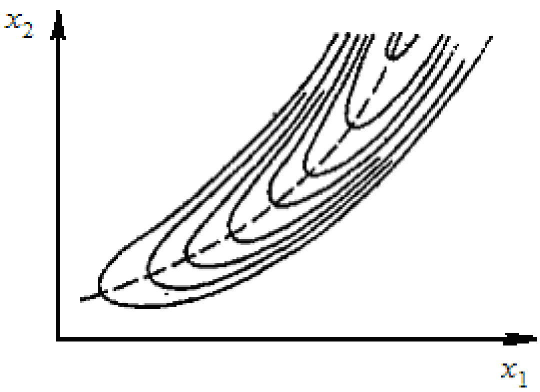


Рисунок 2.7 - Проекция поверхности отклика овражной функции двух переменных

2.3 Методы одномерного поиска

2.3.1 Задача одномерной оптимизации

Математическая формулировка задачи одномерной оптимизации, в которой целевая функция зависит от одной переменной, а допустимым множеством является отрезок вещественной оси, т.е. заданы ограничения первого рода, может быть представлена следующим образом (для случая минимизации целевой функции):

$$F(x) \to min,\ x \in [a;b]. \tag{2.4}$$

Так как максимизация целевой функции ($F(\mathbf{x}) \to max$) эквивалентна минимизации противоположной величины ($-F(\mathbf{x}) \to min$), поэтому, в дальнейшем будут рассматриваться только задачи минимизации.

Для решения задачи минимизации функции $F(x)$ на отрезке $[a;b]$ на практике, как правило, применяют приближенные методы. Они позволяют найти решение задачи с необходимой точностью в результате определения конечного числа значений функции $F(x)$ и её производных в некоторых (пробных) точках отрезка [$a;b$]. Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления её производных, называются прямыми методами, наиболее широкое применение из которых получили следующие методы: золотого сечения, дихотомии или деления отрезка пополам, локализации экстремума и с использованием чисел Фибоначчи.

Реализация любого из этих методов, по сути дела, сводится к постепенному уменьшению отрезка (интервала) неопределенности (интервала “подозрительного на экстремум”), который в исходном состоянии поиска совпадает с допустимым множеством [$a;b$]. Различаются методы тем, каким образом организованно сокращение интервала неопределенности, на основе сопоставления значений функции в пробных точках. Поиск заканчивается, если очередной интервал неопределенности становится меньше некоторой наперед заданной величины ε, определяющей точность отыскания значений координаты экстремальной величины функции.

2.3.2 Метод деления отрезка пополам (дихотомии)

В этом методе две пробные точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ располагаются в некоторой δ-крестности срединной точки очередного отрезка неопределенности [$a;b$], т.е.

$$x^{(1)} = \frac{b+a}{2} - \delta, \; x^{(2)} = \frac{b+a}{2} + \delta, \tag{2.5}$$

где $\delta > 0$ - малое число. При этом отношение (τ) длин нового и исходного отрезков

$$\tau = \frac{b - x^{(1)}}{b-a} = \frac{x^{(2)} - a}{b-a} \approx \frac{1}{2} \tag{2.6}$$

близко к 1/2, чем и объясняется название метода.

На рисунке 2.8 показан алгоритм реализации метода дихотомии, включающий:

– задание исходного отрезка поиска [a_1,b_1];

– вычисление координат пробных точек $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}$ (здесь j - номер шага поиска);

– сравнение значений функции в пробных точках;

– определение той половины отрезка, который содержит меньшее значение функции и становится следующим отрезком поиска;

– проверку выполнения условия прекращения поиска (критерия окончания поиска);

– вычисление приближенного значения $x_{экстр}$, в качестве которого берут середину последнего из найденных отрезков $[a,b]$ при условии выполнения критерия окончания поиска.

Поиск прекращается, если на определенном шаге поиска половина найденного отрезка поиска меньше (или равна) некоторой наперед заданной величины ε, т.е. критерием окончания поиска является точность нахождения координаты экстремума функции. На рисунке 2.9 показан процесс постепенного сокращения отрезка поиска (интервала неопределенности) при использовании метода дихотомии.

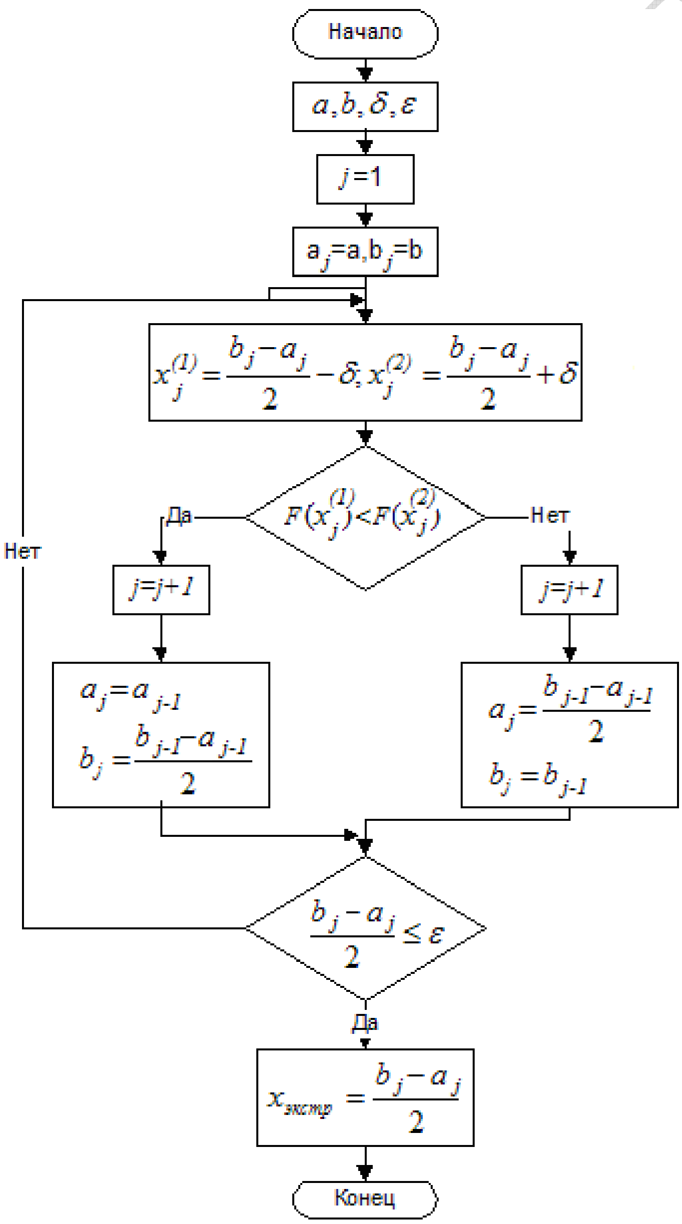


Рисунок 2.8 - Алгоритм реализации метода дихотомии

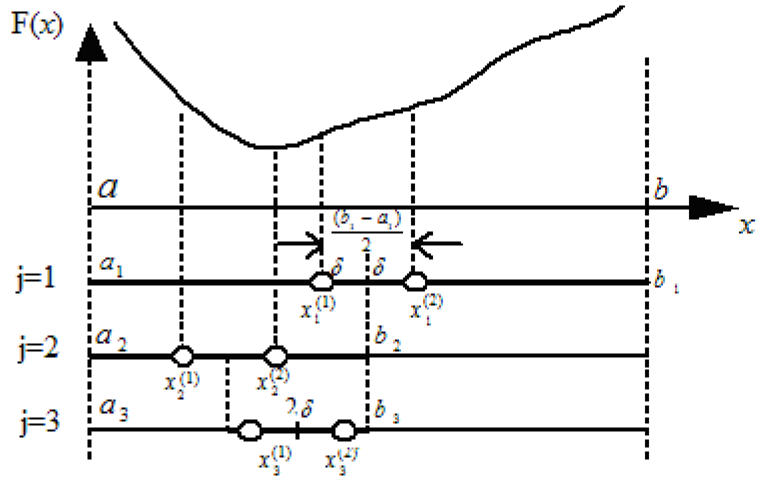


Рисунок 2.9 - Иллюстрация реализации метода дихотомии

2.3.3 Метод золотого сечения

Метод золотого сечения предполагает такое расположение пробных точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ на отрезке [$a;b$], при котором одна из них становится пробной точкой и на новом отрезке, полученном после исключения части исходного отрезка. Использование таких точек позволяет на каждом шаге поиска (итерации) (кроме первой) ограничиться определением только одного значения функции $F(x)$, так как другое значение уже найдено на предыдущем шаге.

Для произвольного отрезка [$a;b$] расчетные соотношения, определяющие местоположение пробных точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, имеют вид:

$$x^{(1)}=a+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a);\qquad x^{(2)}=a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a). \tag{2.7}$$

Пробные точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, задаваемые приведенными соотношениями (2.7), обладают следующим свойством: каждая из них делит отрезок [$a;b$] на две неравные части так, что отношение длин большей к меньшей части отрезка равно отношению длины всего отрезка к его большей части. Точки с таким свойством называются точками золотого сечения отрезка [$a;b$]. Это и объясняет название рассматриваемого метода.

На каждом шаге исключения отрезков с пробными точками $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ одна из них переходит на следующий отрезок и значение функции в этой точке вычислять не следует. Если новым отрезком становится [$a;\ x^{(2)}$], то на него переходит пробная точка $x^{(1)}$ исходного отрезка, занимающая при этом место первой пробной точки внутри нового отрезка. В случае перехода к отрезку [$x^{(1)};\ b$] пробная точка исходного отрезка становится первой пробной точкой отрезка $[x^{(1)};b]$. Положение вторых пробных точек для каждого из описанных случаев определяется в соответствии с соотношениями (2.7).

Легко проверить, что $x^{(1)}=a + b - x^{(2)}$ и $x^{(2)}=a + b - x^{(1)}$. Поэтому на каждом шаге реализации метода золотого сечения недостающую пробную точку нового отрезка можно найти по перешедшей на него пробной точке с помощью сложения и вычитания.

В конце вычислений по методу золотого сечения в качестве приближенного значения $x_{экстр}$ можно взять середину последнего из полученных отрезков

$$x_{экстр}=\frac{a_j+b_j}{2}. \tag{2.8}$$

На каждом шаге отрезок поиска уменьшается в одном и том же отношении

$$\tau=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \tag{2.9}$$

поэтому в результате m шагов его длина становится равной

$$\Delta_m=(b-a)/\tau^m=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^m(b-a). \tag{2.10}$$

Таким образом, точность ε_m определения точки $x_{экстр}$ после m шагов находится из равенства

$$\varepsilon_m=\frac{\Delta_m}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^m\cdot(b-a), \tag{2.11}$$

а условием окончания поиска точки $x_{экстр}$ с точностью ε служит неравенство

$$\varepsilon_m\le\varepsilon.$$

Алгоритм реализации метода золотого сечения включает:

– задание исходного интервала поиска $[a_1;b_1]$;
– вычисление координат пробных точек на исходном интервале $[x^{(1)}_1, x^{(2)}_1]$;
– проверку критерия окончания поиска;
– сравнение значений функции в пробных точках;
– определение следующего интервала поиска;
– вычисление пробных точек на найденном интервале поиска;
– вычисление приближенного значения координат экстремума функции при условии выполнения критерия окончания поиска.

2.3.4 Метод локализации экстремума

При использовании данного метода осуществляется последовательный перебор точек отрезка поиска первоначально из крайней левой точки с шагом $(\Delta x)_j = \Delta$ до тех пор, пока выполняется условие $F(x_{j+1}) \le F(x_j)$ или пока очередная из точек не совпадет с концом отрезка или выйдет за его конец. После этого величина шага уменьшается в k раз (обычно в 4), и перебор точек с новым шагом производится в противоположном направлении до тех пор, пока значения $F(x)$ снова перестанут уменьшаться или очередная точка не совпадет с другим концом отрезка или выйдет за его конец и т.д. Процесс поиска завершается, когда перебор в данном направлении закончен, т.е $F(x_{j+1}) > F(x_j)$, а использованный при этом шаг дискретизации не превосходит $|(\Delta x)_j| < \varepsilon$.

Алгоритм реализации метода локализации экстремума, в котором значение l отображает счет изменений направления движения пробных точек, включает в себя:

– задание исходного отрезка $[a,b]$, первоначального значения шага (Δ), точности (ε) и константы k;

– задание стартовой точки (a) и величины шага на первоначальном направлении $(\Delta x)_l = \Delta$, где $l = 1$;

– движение пробных точек по выбранному направлению с проверкой нарушения правой границы отрезка, если шаг положителен, или левой, если шаг отрицателен, что вызывает смену направления движения пробных точек $(l=l+1)$, если же движение происходит внутри интервала поиска, то изменение направления движения пробных точек осуществляется, если нарушается условие $F(x_{j+1}) \le F(x_j)$;

– уменьшение в k раз величины и изменение знака шага поиска;

– проверка выполнения критерия окончания поиска;

– вычисление приближенного значения координаты экстремума функции.

2.3.5 Метод с использованием чисел Фибоначчи

Метод поиска экстремума одномерной функции с использованием чисел Фибоначчи в определенной мере сходен с методом локализации экстремума. Так же как в методе локализации экстремума первоначально организуется перемещение пробной точки вправо из исходного положения (при поиске минимума – влево из крайней левой точки отрезка поиска). Движение осуществляется до первого “неудачного” шага, т.е. когда значение приращения функции становится положительным. Следствием этого является возврат в точку, из которой сделан “неудачный” шаг, и смена направления движения пробных точек. Основной особенностью данного метода является изменение величины шага на каждом шаге поиска в зависимости от определенного значения числа Фибоначчи, а также то, что число вычислений значения функции (N), т.е. число пробных точек фиксируется и зависит от заданной точности вычисления координаты экстремума функции.

Числа Фибоначчи, последовательные значения которых используются при вычислении величины шага перемещения пробной точки, вычисляются с помощью рекуррентного соотношения

$$\Phi_k = \Phi_{k-1} + \Phi_{k-2}, \tag{2.12}$$

причем $\Phi_0=\Phi_1=1$ и, следовательно, несколько первых чисел Фибоначчи имеют значения: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,... .

Алгоритм поиска экстремума одномерной функции с использованием чисел Фибоначчи, включающий в себя следующие части:

– задание интервала поиска $[a,b]$ и желаемой точности вычисления координаты экстремума функции (Δ);

– расчет вспомогательного числа N;

– формирование ряда чисел Фибоначчи, максимальное значение в котором является ближайшим большим к числу N (k – порядковый номер числа Фибоначчи) и фиксирование номера этого числа ($s = k$);

– расчет h – минимальной величины шага, определяемого значением максимального значения числа Фибоначчи (F_s);

– задание исходной стартовой точки поиска ($x_{ст}$);

– движение к искомому экстремуму функции, где j – шаг поиска, k – номер числа Фибоначчи, рассчитываемый для каждого шага поиска. Величина первого шага является максимальной, каждый следующий шаг меньше предыдущего, так как определяется следующим (в сторону уменьшения) числом Фибоначчи. Если очередной шаг является удачным (приращение функции отрицательное), следующий шаг осуществляется из найденного состояний ($x_{ст} = x_j$); если же очередной шаг является “неудачным” (приращение функции положительно), следующий шаг делается из предыдущего состояния и знак шага меняется на противоположный. Поиск экстремума функции заканчивается, когда исчерпаны все значения ряда чисел Фибоначчи ($k = 0$);

– определение приближенного значения координаты экстремума функции.

2.4 Методы многомерного поиска

2.4.1 Метод поочередного варьирования переменных

Алгоритм реализации метода поочередного варьирования переменных относится к наиболее простым. Основной составной частью алгоритма является цикл поиска. В свою очередь, цикл включает в себя (при поиске экстремума функции *n* переменных) *n* этапов одномерного поиска, причем на каждом этапе варьируется одна из переменных при неизменных значениях остальных переменных. Результатом выполнения одного этапа является отыскание локального экстремума по варьируемой переменной (на осевом направлении). Результатом выполнения цикла является перемещение изображающей точки из исходного положения в точку, которая, в общем случае, не является искомым экстремумом функции. На рисунке 2.10 (для *n*=2) показана траектория поиска экстремума функции, включающая три цикла поиска (1-й цикл АО-А1-А2; 2.й цикл А2.А3-А4; 3-й цикл А4-А5-А6), причем в каждом цикле на первом этапе варьировалась переменная x_1, на втором - x_2.

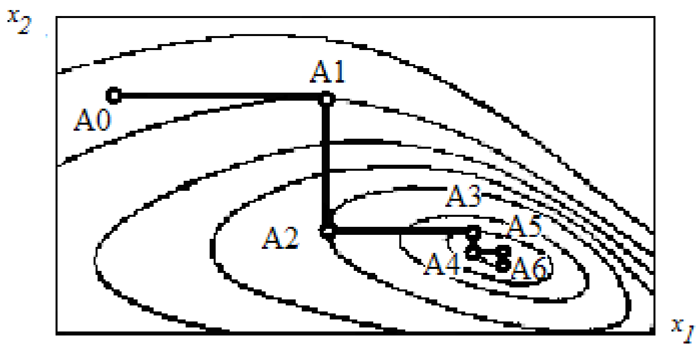


Рисунок 2.10 - Траектория движения изображающей точки
при реализации метода поочередного варьирования переменных

Практическая реализация алгоритма поочередного варьирования переменных связана с решением следующих основных проблем:

– выбор очередности варьирования переменных на каждом цикле пояска;

– выбор метода одномерного поиска при отыскании локального экстремума на конкретном осевом направлении;

– выбор критериев прекращения поиска как на каждом этапе поиска (т. е. на конкретном осевом направлении) в цикле, так и окончательного, выполнение которого означает завершение задачи поиска экстремума функции.

Выбор очередности варьирования переменных в цикле. Простейшее решение этой проблемы - задание жесткой последовательности варьирования переменных, что осуществляется обычно произвольно, без учета особенностей целевой функции. На рисунке 2.11 показано, например, насколько ближе изображающая точка к экстремуму в первом цикле поиска, если первой варьируется переменная x_1 (АО-А1-А2).

Отсюда очевидна необходимость на каждом этапе поиска, особенно при большом количестве переменных, определения той переменной, изменение которой приводит к наибольшему желательному изменению целевой функции. Определение такой переменной в исходной точке поиска требует нахождения производных функции в этой точке по всем переменным. Осевому направлению с наискорейшим изменением целевой функции соответствует наибольшая по модулю производная.

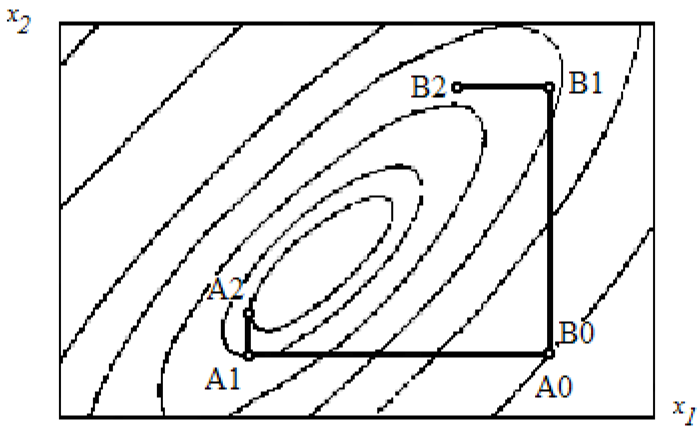


Рисунок 2.11 - Зависимость эффективности поиска от порядка варьирования переменных

После перемещения изображающей точки в локальный экстремум на этом направлении в найденной точке вновь определяются производные по всем переменным за исключением той, по которой движение уже было осуществлено, и т. д. Очевидно, при поиске экстремума функции двух переменных выбор очередности варьирования переменных имеет смысл только на первом цикле поиска.

Выбор метода одномерного поиска. Поиск локального экстремума на конкретном осевом направлении, в свою очередь, требует решения следующих проблем:

– выбор величины шага поиска;

– отыскание интервала переменной, «подозрительного» на экстремум;

– выбор метода локализации экстремума в найденном интервале (метода одномерного поиска);

– выбор критерия окончания одномерного поиска.

Скорость перемещения изображающей точки по поверхности отклика к экстремуму функции зависит от величины шага изменения переменной. Нет общих рекомендаций по выбору величины шага, справедливых в любой ситуации. Если величина шага выбрана постоянной, то эта величина обычно мала, если изображающая точка находится вдали от экстремума, и велика, если она в районе экстремума. Адаптация же величины шага к конкретным характеристикам поверхности отклика требует значительного увеличения количества вычислений функции (затрат па поиск) и поэтому часто не оправдывается.

Использование метода одномерного поиска для локализации экстремума функции па осевом направлении требует знания интервала переменной, «подозрительного» на экстремум. Интервал может быть найден следующим образом. Движение по осевому направлению изображающей точки с постоянным шагом осуществляется до тех пор, пока значение функции изменяется желательным образом. При первом же нарушении этого условия координата последней точки фиксируется, а за интервал, «подозрительный» на экстремум (интервал неопределенности), принимается интервал в два шага в направлении, противоположном движению изображающей точки. (На рисунке 2.12 - это отрезок BD).

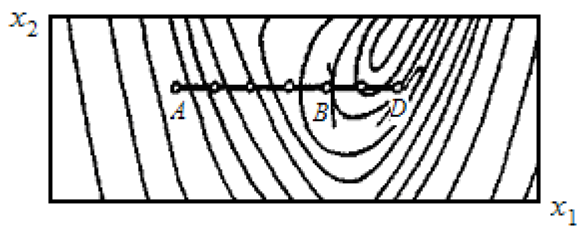


Рисунок 2.12 - Определение интервала переменной, «подозрительного» на экстремум

Наиболее известными методами одномерного поиска являются: метод половинного деления, метод «золотого» сечения; метод локализации экстремума, метод с использованием чисел Фибоначчи.

Идея всех этих методов одинакова и заключается в постепенном уменьшении исходного интервала неопределенности. Различие между ними заключается в том, какая часть исходного интервала принимается на каждом шаге за новый, являющийся исходным для следующего шага.

Критериями прекращения поиска по координате в перечисленных методах одномерного поиска могут быть: заданная точность определения значения целевом функции в экстремуме, заданная точность определения значения координаты экстремума, а также предельно допустимое количество вычислений функции при локализации экстремума в исходном интервале неопределенности.

Метод с использованием чисел Фибоначчи используется лишь в том случае, когда координата экстремума функции должна быть определена с абсолютной ошибкой, не превышающей наперед заданную величину (это второй из перечисленных выше критериев) (пункт 2.3.5).

Критерий завершения поиска экстремума функции связан, прежде всего, с анализом результатов, достигнутых на очередном и предыдущем циклах поиска:

– абсолютная разность между значениями функции, полученными на очередном и предыдущем циклах поиска, не превышает наперед заданную величину;

– абсолютные разности между значениями координат экстремума, полученными на очередном и предыдущем циклах поиска, не превышают заданные величины.

Кроме того, могут быть заданными количество циклов поиска и общее количество вычислений функции.

Возможен и комбинированный критерий окончания поиска, включающий в себя все первые четыре критерия. При этом по окончании очередного цикла поиска анализируются все четыре критерия и поиск прекращается, если один из них (любой) выполнен.

Основное достоинство рассматриваемого метода поочередного варьирования переменных в простоте его практической реализации. Недостатки же этого метода, как и градиентных методов нелинейного программирования, заключаются в следующем: данный метод относится к локальным поисковым методам, т. е. не обеспечивает нахождение глобального экстремума многоэкстремальной функции; данный метод также малоэффективен при поиске экстремума функций, имеющих овражный характер; непреодолимыми для него являются и седловые точки поверхности отклика.

Алгоритм реализации метода поочерёдного варьирования переменных включает следующие этапы:

– задание вида функции, координат исходной точки поиска и величин пробных шагов;

– поиск экстремума функции по заданной переменной, заключающийся в отыскании интервала переменной, “подозрительного” на экстремум, и локализации экстремума функции в найденном интервале одним из методов одномерного поиска при заданном критерии окончания поиска по координате (в цикле);

– переход к поиску экстремума по следующей координате, т.е. к началу п.2, или, если все координаты просмотрены, переход к п.4;

– анализ результатов очередного цикла поиска с точки зрения выполнения заданного критерия окончания поиска; в случае, если критерий не выполнен – переход к началу п.2, причём за исходную точку поиска принимается та, которая найдена в завершившемся цикле поиска; в случае же выполнения критерия – окончание поиска.

2.4.2 Метод наискорейшего спуска (градиентный метод)

Градиентный поиск предполагает выбор такого направления движения изображающей точки по поверхности отклика, которое приводит к наискорейшему изменению значения функции цели, т. е. по градиентному. На рисунке 2.13 в плоскости двух координат x_1, x_2 показаны линии равного уровня функции $F(x_1,x_2)$. Искомый экстремум (минимум) находится в точке *B*. Пусть исходным положением изображающей точки является точка *A*. Изображенная на рисунке 2.13 кривая *AB* является траекторией наискорейшего спуска из исходной точки в экстремум, так как направление касательной в любой точке этой траектории совпадает с направлением градиента функции. Движение по такой траектории, очевидно, требует знания градиента функции непрерывно, в каждой точке кривой, что возможно лишь в случае, если выражение для определения градиента задано аналитически, или есть возможность непрерывного определения скорости изменения функции по всем координатам. В случае, если такой возможности нет, то требуется постановка специальных экспериментов, дающих материал для определения оценок составляющих градиента функции. Естественно, что тогда движение к экстремуму может осуществляться лишь по кусочно-линейной траектории.

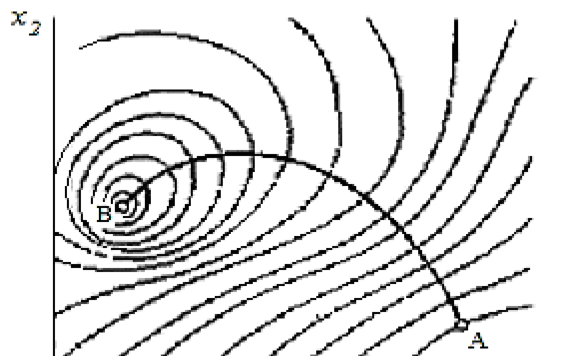


Рисунок 2.13 - Траектория наискорейшего спуска

Величина шага при градиентном поиске или принимается постоянной, и тогда говорят о постоянно-шаговом градиентном поиске, или ставится в зависимость от какой-либо характеристики функции цели, или определяется расстоянием до частного экстремума функции на выбранном направлении. В последнем случае говорят о методе наискорейшего спуска.

Суть ***метода наискорейшего спуска*** заключается в следующем. В исходной точке (рисунок 2.14) определяется направление градиента. Далее осуществляется движение в найденном направлении до достижения частного экстремума на этом направлении. Такой точкой является точка касания траектории движения изображающей точки с какой-либо линией равного уровня. Найденная точка принимается за исходную, и поиск повторяется. Очевидно, при точном определении направления градиента функции траектория движения из найденной на первом этапе точки будет ортогональна к предыдущей.

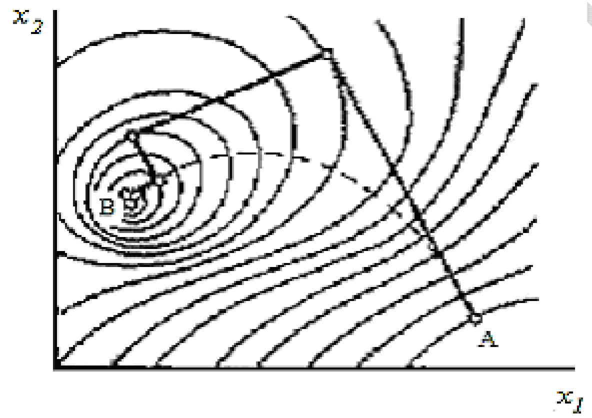


Рисунок 2.14 - Иллюстрация к реализации метода наискорейшего спуска

Использование рассмотренного метода является наиболее выгодным в случае, когда направление градиента функции меняется незначительно, т. е., как правило, вдали от экстремума. При резком изменении направления градиента функции, обычно наблюдающимся вблизи экстремума, найденное на предыдущем этапе направление быстро становится неприемлемым, что требует следующего определения направления градиента. Особенно затруднено перемещение изображающей точки к экстремуму функции, имеющей овражный характер, поскольку малая величина градиента функции вдоль дна оврага требует непрерывной смены направления движения при очень малой величине шага. Непреодолимыми для метода наискорейшего спуска являются и седловые точки. Метод является локальным, т. е. при наличии нескольких локальных экстремумов конечный результат поиска экстремума функции, как показано на рисунке 2.15, зависит от исходного положения изображающей точки.

Конкретный алгоритм метода наискорейшего спуска требует решения следующих вопросов выбора:

– исходной точки поиска;

– способа определения составляющих вектора градиента функции в заданной точке;

– метода определения частного экстремума на найденном направлении;

– критерия прекращения поиска на частном направлении (в цикле);

– критерия прекращения поиска экстремума функции.

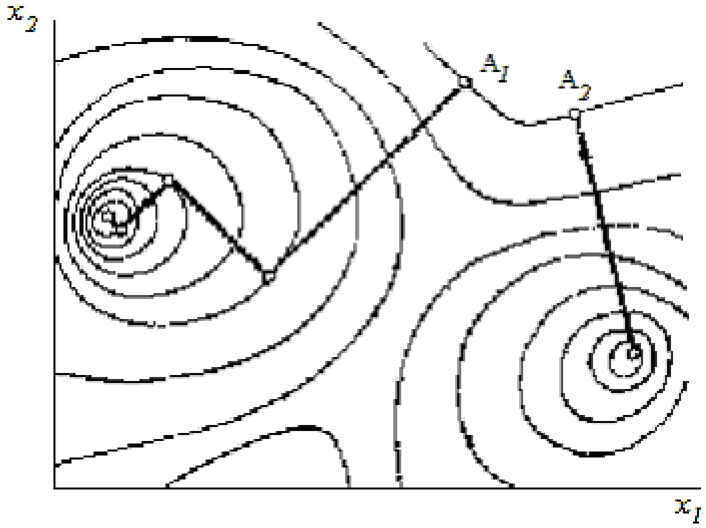


Рисунок 2.15 - Иллюстрация к зависимости конечного результата поиска и его эффективности от выбора исходной точки поиска

Исходная точка поиска. Как следует из изложенного, иногда от выбора исходной точки поиска зависит его конечный результат (для случая многоэкстремальной функции), кроме того, от этого зависит и эффективность поиска (затраты на поиск) (рисунок 2.15). Под *затратами на поиск* обычно подразумевают количество вычислений функции цели, потребовавшееся для решения задачи, причем учитываются все случаи расчета значения функции цели, т. е. и при определении направления движения (пробные шаги), и при реализации движения по найденному направлению (рабочие шаги).

Определение составляющих вектора градиента. Для численного определения оценок составляющих вектора градиента функции цели в конкретной точке используются различные способы. Наиболее простой из них состоит в следующем. Определяется значение функции в исходном состоянии $F(X_0)$. Далее для каждой i-й переменной определяется значение функции в точке, отстоящей от исходной на величину шага Δx_i. Поскольку, как правило, чувствительность к изменению переменной в сторону увеличения и в сторону уменьшения неодинакова из-за нелинейного характера функции, оценки составляющих градиента определяются с учетом разности между значениями функции в точках $x_{i,0} + \Delta x_i$ и $x_{i,0} - \Delta x_i$:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x_i} = \frac{F(x_{1,0},...,x_{i,0} + \Delta x_i,...,x_{n,0}) - F(x_{1,0},...,x_{i,0} - \Delta x_i,...,x_{n,0})}{\Delta x_i}, \quad i = 1,\ ...,\ n. \tag{2.13}$$

Для определения оценок составляющих вектора градиента функции могут быть использованы и идеи активного планирования эксперимента. В этом случае данные для определения оценок получаются в результате эксперимента, в котором одновременно в определенной последовательности изменяются все переменные. Ниже приводятся последовательность постановки эксперимента, и формулы для обработки получаемых данных при определении оценок составляющих градиента функции двух переменных:

$$\begin{aligned} F1 &= F(x_{1,0} + \Delta x_1, x_{2,0} + \Delta x_2); \\ F2 &= F(x_{1,0} + \Delta x_1, x_{2,0} - \Delta x_2); \\ F3 &= F(x_{1,0} - \Delta x_1, x_{2,0} + \Delta x_2); \\ F4 &= F(x_{1,0} - \Delta x_1, x_{2,0} - \Delta x_2); \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x_1} = \frac{F1 + F2 - F3 - F4}{\Delta x_1}; \quad \frac{\Delta F}{\Delta x_2} = \frac{F1 - F2 + F3 - F4}{\Delta x_2}, \tag{2.15}$$

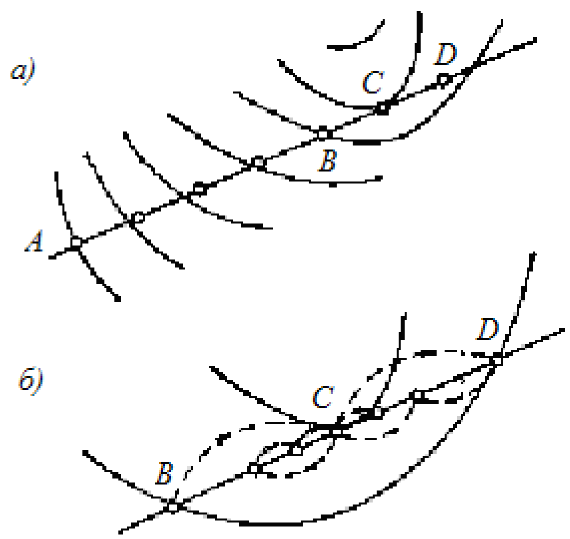
где $\Delta F/\Delta x_1$ - оценка составляющей градиента по переменной x_1,
$\Delta F/\Delta x_2$ - оценка составляющей градиента по переменной x_2.

Во всех приведенных способах точность получаемых оценок существенно зависит от правильного выбора величин пробных шагов по переменным Δx_i. Особенно это важно при существенном отличии в чувствительности функции к изменению различных переменных. Поэтому при определении величин пробных шагов целесообразно исходить из того, что чувствительность функций к изменению переменных должна быть примерно одинаковой. Кроме того, при существенно нелинейном характере функции цели большие по величине пробные шаги, обеспечивающие достаточную чувствительность функции к изменению переменной, могут дать весьма искаженное представление о направлении градиента. В идеале, чем меньше пробный шаг, тем точнее оценка направления градиента. Но в таком случае и величины рабочих шагов по найденному направлению должны быть выбраны небольшими, что существенно увеличит потери на поиск. Обычно на практике указанная противоречивая задача решается исходя из того, что величины пробных шагов должны давать изменение функции цели не более чем на 10 — 15% относительно значения функции в исходном состоянии.

Определение частного экстремума на найденном направлении. Методы определения экстремума на частном направлении обычно реализуются в два этапа. На первом — выявляется интервал, в котором находится экстремум, на втором — координаты локального экстремума функции в найденном интервале.

Возможны различные методы определения частного экстремума на найденном направлении. Например, из исходной точки *А* (рисунок 2.16) с постоянным рабочим шагом, величина которого ни по одной переменной не превышает величину соответствующего пробного шага по этой переменной, осуществляются рабочие шаги по найденному направлению. Движение в указанном направлении осуществляется до тех пор, пока значение функции изменяется в желаемую сторону, а при первом же нарушении данного условия (в точке *Д* на рисунке 2.16) движение прекращается. Таким образом, определен интервал *АД,* в котором находится искомый экстремум. Далее точка *Д* принимается за исходную, и организуется движение в противоположном направлении с шагом, абсолютное значение которого равно половине предыдущего шага. Рисунок 2.16б иллюстрирует рассматриваемый метод. Поиск прекращается при выполнении одного из критериев прекращения поиска, характеристики которых приведены далее.

Возможен вариант данного метода отличающийся тем, что после нахождения точки *Д,* за интервал, в котором локализуется экстремум, принимается интервал *ВД,* равный двум первоначальным рабочим шагам.



а) – определение интервала, которому принадлежит экстремум;
б) – локализация экстремума в найденном интервале.

Рисунок 2.16 - Поиск экстремума функции на заданном направлении

Действительно, в любом случае искомый экстремум должен находиться в интервале *ВД* (рисунок 2.17). Далее осуществляется локализация экстремума в интервале *ВД* с использованием идеи половинного деления. Определяется середина интервала *ВД,* т. е. точка *С,* и делаются два пробных движения (по исследуемому направлению и против него) с шагом, величина которого соизмерима с желаемой точностью определения значений координат экстремума. За новый интервал, в котором локализуется экстремум, принимается та половина интервала *ВД,* которой принадлежит лучшее значение функции по результатам двух пробных движений. Поиск обычно прекращается, если при очередном делении пополам величина вновь полученного интервала по всем переменным не превышает желаемую точность определения значений координат экстремума.

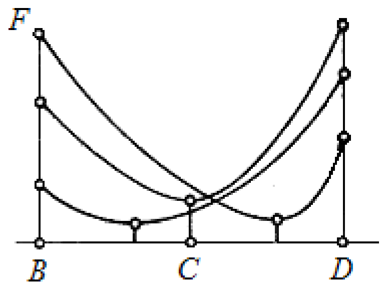


Рисунок 2.17 - К определению интервала локализации экстремума на заданном направлении

Возможны следующие *критерии прекращения поиска в цикле,* т.е. на заданном направлении:

– на очередном, рабочем шаге поиска желаемое приращение значения функции цели не превышает некоторую, наперед заданную величину;

– на очередном, рабочем шаге поиска изменения значений координат изображающей точки не превышает некоторые, наперед заданные величины;

– общее количество вычислений функции цели, затраченное и на определение направления движения, и на поиск интервала содержащего экстремум, и на локализацию экстремума, равно некоторой, наперед заданной величине.

Реализация рассмотренных методов определения экстремума на заданном направлении является повторяющимся в цикле элементом поиска экстремума функции. Какое же количество циклов поиска требуется для нахождения экстремума функции? Как закончить поиск, если координаты экстремума неизвестны? Может быть сформулировано несколько *критериев прекращения поиска* экстремума функции цели. Но ни один из них не дает гарантии того, что полученный при этом результат определяет координаты экстремума функции с достаточной точностью. Возможны варианты:

– желаемое приращение значения функции цели на очередном цикле поиска не больше некоторой, наперед заданной величины;

– выполнено заданное наперед количество циклов поиска;

– исчерпано допустимое количество определений значения функции цели и при пробных, и при рабочих шагах на всех циклах поиска;

– разности между значениями координат изображающей точки, полученными на последнем и предыдущем циклах поиска, не превышает заданной точности определения координат экстремума функции цели;

– используется комплексный критерий прекращения поиска, при формировании которого задаются значения всех рассмотренных критериев, при работе с которым поиск прекращается при первом выполнении любого из первых четырех критериев.

Алгоритм реализации метода наискорейшего спуска при поиске экстремума конкретной функции цели включает следующие основные этапы:

– задание формулировки функции цели;

– задание координат исходной точки поиска;

– задание величин пробных шагов;

– конкретизация вида искомого экстремума (максимум или минимум);

– задание способа определения градиента функции цели в заданной точке;

– задание метода отыскания локального экстремума на градиентном направлении;

– задание критерия прекращения поиска локального экстремума на градиентном направлении;

– задание критерия окончания поиска экстремума функции цели.

2.4.3 Симплексный метод (безградиентный)

Симплексный метод относится к группе так называемых безградиентных методов нелинейного программирования, в которых определение направления движения к экстремуму функции не требует нахождения градиента функции, но (при определенных условиях) может быть обеспечено достаточно быстрое движение в сторону улучшения значения оптимизируемой функции.

Основная идея этого метода заключается в том, что по известным значениям целевой функции в вершинах выпуклого многогранника, называемого симплексом, находится направление, в котором требуется сделать следующий шаг, чтобы получить наибольшее уменьшение (увеличение) критерия оптимальности. При этом под симплексом в *n*-мерном пространстве понимается многогранник, имеющий *n* + 1 вершин, каждая из которых определяется пересечением *n* гиперплоскостей данного пространства. Примером симплекса в двухмерном пространстве, т.е. на плоскости, является треугольник. В трехмерном пространстве симплексом будет четырехгранная пирамида, имеющая четыре вершины, каждая из которых образована пересечением трех плоскостей - граней пирамиды. Важно следующее свойство симплекса: против любой из вершин симплекса расположена только одна грань, на которой можно построить новый симплекс, отличающийся от прежнего расположением новой вершины, тогда как остальные вершины обоих симплексов совпадают. Именно это свойство симплекса и обусловило возможность его применения при решении задач оптимизации.

Наглядная иллюстрация реализации алгоритма симплексного метода на примере задачи отыскания наименьшего значения целевой функции двух независимых переменных представлена на рисунке 2.18. Замкнутые линии - это линии равных значений оптимизируемой функции, треугольник с вершинами S_{10}, S_{20}, S_{30} - начальный симплекс.

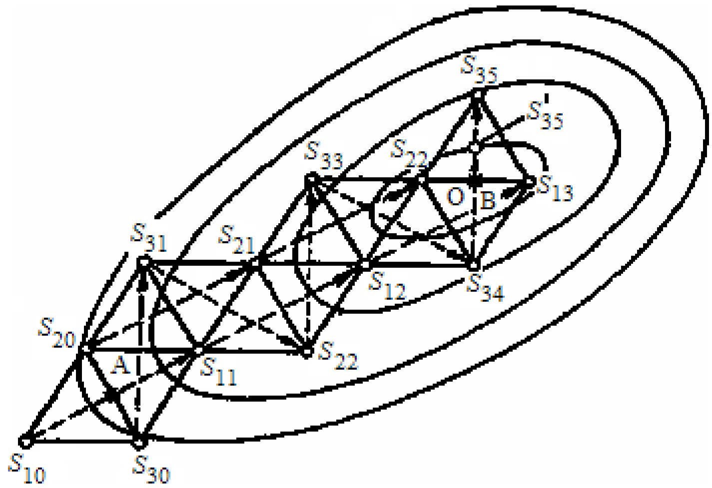


Рисунок 2.18 - Иллюстрация к поиску экстремума функции симплексным методом

Расчет значений целевой функции в точках S_{10}, S_{20}, S_{30}, соответствующих вершинам начального симплекса (треугольника), позволяет найти точку с наибольшим значением целевой функции, т.е. точку S_{10}.

Строится новый симплекс, для чего вершина S_{10} исходного симплекса заменяется вершиной S_{11}, расположенной симметрично вершине S_{10} относительно центра грани симплекса, находящейся против вершины S_{10}. Для варианта, изображенного на рисунке, построение нового симплекса осуществляется следующим образом: определяется центр *A* стороны треугольника $S_{20}S_{30}$, после чего на продолжении прямой, проведенной через вершину S_{10} и точку *A*, откладывается отрезок $AS_{11} = AS_{10}$. Пунктирная стрелка, соединяющая прежнюю вершину с новой, показывает путь преобразования симплекса.

В новой вершине S_{11} вычисляется значение целевой функции, которое сравнивается с известными значениями для других вершин нового симплекса (S_{20} и S_{30}), и снова находится вершина с наибольшим значением целевой функции, подлежащая исключению при построении следующего симплекса $S_{11}S_{20}S_{31}$, и т. д.

В результате применения процедуры исключения вершин симплексов с наибольшим значением целевой функции процесс сходится к ее минимальному значению. Из рисунка 2.18 видно, что вблизи от оптимума может возникнуть зацикливание, которое для рассматриваемого случая двух переменных сводится к тому, что вновь полученная вершина S_{35} последнего симплекса $S_{13}S_{22}S_{35}$ исключается и образуется предыдущий симплекс $S_{13}S_{22}S_{34}$. Для того, чтобы устранить зацикливание, достаточно изменить размеры симплекса в сторону его уменьшения, что соответствует уменьшению шага спуска в районе оптимума, использующемуся и в градиентных методах. Наиболее просто это можно сделать, если вдоль прямой $S_{34}BS_{35}$ от точки B отложить отрезок, равный половине отрезка $S_{34}B$, в результате чего во вновь полученном деформированном симплексе $S_{13}S_{22}S'_{35}$ исключению уже будет подлежать вершина S_{13}. Если зацикливание возникнет снова, то размеры симплекса опять уменьшаются, пока не будет достигнута требуемая точность определения оптимума.

Критерием окончания поиска могут служить размеры симплекса. Поиск можно прекратить, например, если все ребра симплекса станут меньше заданной достаточно малой величины.

Таким образом, алгоритм симплексного метода допускает автоматическое изменение величины шага, при использовании которого вдали от оптимума возможно применение симплексов большого размера, что обеспечивает более быстрый спуск.

Случаи зацикливания могут встретиться и в задачах более высокой размерности, для которых установление момента зацикливания представляет определенные трудности. Для обнаружения зацикливания при этом часто применяется следующий прием. Если после построения n+1 симплексов одна или несколько вершин исходного симплекса оказываются не исключенными, то размеры последнего симплекса изменяются и поиск продолжается с новым отсчетом исключаемых вершин.

В качестве начального симплекса при применении симплексного метода поиска лучше всего использовать правильный симплекс вершинами и гранями, одинаково удаленными от центра симплекса. Для таких начальных симплексов поиск производится наиболее эффективно. Примерами правильных симплексов на плоскости и в трехмерном пространстве являются соответственно равносторонний треугольник и тетраэдр, образованный равносторонними треугольниками.

Доказано, что при применении правильных симплексов направление движения в симплексном методе совпадает с направлением градиента, если симплекс достаточно мал. Вместе с тем, реализация данного метода не требует существенного увеличения вычислительных затрат с повышением размерности решаемой задачи, поскольку на каждом шаге рассчитывается только одно значение целевой функции независимо от числа переменных. В то же время при использовании градиентных методов поиска с возрастанием числа независимых переменных соответственно увеличивается число вычисляемых значений целевой функции при расчете производных по всем переменным.

2.4.4 Комплекс-метод Бокса

Комплекс-метод Бокса предназначен для отыскания условного экстремума непрерывной целевой функции в выпуклой допустимой области.

При использовании метода применяются следующие предположения:

– задача поиска экстремума функции решается при наличии ограничений 1-го и 2.го рода;

– значения целевой функции и функций ограничений могут быть вычислены в любой точке допустимой области изменения независимых переменных;

– допустимая область выпукла;

– значения целевой функции и функций ограничений вычисляются без ошибок.

Комплекс-метод Бокса в отличие от рассмотренных выше методов, которые относятся в полной мере к детерминированным поисковым методам, содержит на первом этапе организации поиска элемент случайности при выборе направления движения изображающей точки из исходного состояния.

Идея комплекс-метода заключается в последовательной замене совокупности точек некоторой конфигурации, удаленных от экстремума, на более близкие к нему.

В отличие от симплексного метода, в комплекс-методе используется случайный набор N точек – так называемый Комплекс, а число точек Комплекса определяется по правилу:

$$N = \begin{cases} 2n & при\ n \le 5; \\ n+1 & при\ n > 5, \end{cases} \tag{2.16}$$

где n – число независимых переменных.

Вычислительная последовательность (алгоритм) комплекс-метода включает в себя десять этапов:

1) Формирование исходного Комплекса. Координаты вершин исходного Комплекса x_{ij} вычисляются последовательно с помощью равномерно распределенных на интервале (0;1) псевдослучайных чисел r_{ij}:

$$x_{ij} = g_i + r_{ij}\,(h_i\text{-}g_i),\;\; i=1,\,2,\,\ldots,\,n,\;\; j = 1,\,2,\,\ldots,\,N, \tag{2.17}$$

где x_{ij} - координата j-ой точки (вершины) по i-ой переменной;
g_i - нижнее допустимое значение i-ой переменной;
h_i - верхнее допустимое значение i-ой переменной.

В каждой вершине с номером j проверятся выполнение ограничений 2.го рода (ограничения 1-го рода выполняются автоматически).

Точка фиксируется как вершина Комплекса, если в ней удовлетворяются все ограничения. Если же ни в одной из точек ограничения не выполнены, то вычисляются координаты новых случайных точек (2.17), в которых вновь проверяются ограничения.

Пусть число точек, удовлетворяющих ограничениям 2-го рода равно P $(P \geq 1)$, тогда $(N - P)$ – число точек, в которых ограничения нарушены.

Далее для каждой из ещё незафиксированных вершин выполняется операция по её смещению к центру P вершин Комплекса, при этом новые координаты точки x_{ij} вычисляются по формуле

$$x_{ij}^{*} = \frac{1}{2}\left(x_{ij} + \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P} x_{ik}\right),\; i=1,\,2,\,\ldots,\,n;\; j=P+1,\,P+2,\,\ldots,\,N \tag{2.18}$$

Процесс смещения j-й точки продолжается до тех пор, пока для неё не будут выполнены все ограничения. Такой момент обязательно наступит, поскольку допустимая область выпукла. Точка фиксируется как новая вершина Комплекса (P увеличивается на единицу), после чего операция смещения повторяется для очередной вершины.

2) Вычисление значений целевой функции F_j для всех N вершин Комплекса:

$$F_j = F(X_j),\;\; X_j = \{x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}\},\; j = 1,\,2,\,\ldots,\,N \tag{2.19}$$

3) Выбор наилучшего и наихудшего (с точки зрения типа экстремума) значения из массива значений функции F_G и F_D (G – номер самой «хорошей»; а D – самой «плохой» вершины).

4) Определение координат C_i центра Комплекса с отброшенной «наихудшей» вершиной:

$$C_i = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{J=1}^{N} x_{ij} - x_{iD}\right),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.20}$$

5) Проверка условия окончания поиска. Для этого вычисляется величина B:

$$B = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|C_i - x_{iD}\right| + \left|C_i - x_{iG}\right|\right). \tag{2.21}$$

Если $B < \varepsilon$ (ε – заданная точность вычисления), т.е. среднее расстояние от центра Комплекса до худшей (D) и лучшей (G) вершин меньше ε, то поиск заканчивают, т.е. считается, что экстремум найден.

В противном случае вычисления продолжаются.

6) Вычисление координаты новой точки Комплекса взамен наихудшей:

$$x_{i0} = 2.3C_i - 1.3x_{iD},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.22}$$

В этой новой точке проверяется выполнение ограничений 1-го рода. В случае если ограничения нарушаются, x_{i0} принимает значения $g_i + \varepsilon$ или $h_i - \varepsilon$ в зависимости от того, в какую сторону i-е ограничение нарушено;

7) Проверка выполнения ограничений 2.го рода для новой точки. Если хотя бы одно из ограничений нарушено, то новую точку смещают к центру Комплекса на половину расстояния:

$$x_{i0}^{*} = \frac{1}{2}\left(x_{i0} + C_i\right). \tag{2.23}$$

Процесс смещения продолжают до тех пор, пока все ограничения 2.го рода в новой точке не будут соблюдены.

8) Вычисление значения целевой функции F_0 в новой точке:

$$F_0 = F(X_0);\ X_0 = \{x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{no}\}. \tag{2.24}$$

9) Нахождение новой вершины смещением x_{i0} на половину расстояния к лучшей из вершин комплекса с номером G, если F_0 оказывается хуже F_D (значение целевой функции в наихудшей точке предыдущего комплекса), т.е. новая точка находится дальше от экстремума, чем вершина с номером D:

$$x_{io}^{*} = \frac{1}{2}\left(x_{io} + x_{iG}\right). \tag{2.25}$$

Затем вновь вычисляется значение целевой функции F_0 и сравнивается с F_D. Смещение к лучшей вершине продолжается до тех пор, пока F_0 не станет лучше F_D.

За счет этой процедуры происходит последовательное сжатие комплекса к лучшей вершине.

10) Фиксация точки X_0 и замена на F_0 значения F_D, если вычисленное в новой точке X_0 значение F_0 лучше F_D .

Затем вычисления повторяются, начиная с п.3, и продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие останова, т.е. не будет найден с заданной точностью экстремум целевой функции.

3 Графический способ решения задач оптимизации

3.1 Графический способ решения задачи линейного программирования

Линейное программирование является одним из методов решения задачи оптимизации. Характерной особенностью задачи линейного программирования является то, что критерий оптимальности представляет собой линейную функцию от входящих в него переменных, на которые наложены некоторые ограничивающие условия в форме линейных равенств или неравенств.

Примером задачи линейного программирования является задача отыскания такого распределения ограниченного количества сырья между различными процессами, при котором общий доход от реализации готовой продукции заданного ассортимента будет максимальным.

Каноническая формулировка задачи линейного программирования состоит в следующем.

Задана линейная целевая функция *n* переменных

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (3.1)$$

и система *m* линейных алгебраических уравнений относительно тех же переменных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.2)$$

Требуется найти такое неотрицательное решение ($x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; … $x_n \geq 0$) системы (3.2), при котором целевая функция (3.1) принимает минимальное значение.

Удобно использовать записи уравнений (3.1) и (3.2) в более компактной форме:

целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad ; \qquad (3.3)$$

система ограничений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \ j = \overline{1, m}. \qquad (3.4)$$

Основные методы решения задач линейного программирования требуют, чтоб задача была сформулирована в канонической форме. Но во многих конкретных задачах ограничения, наложенные на линейные комбинации переменных x_i $(i=1, 2…n)$, часто задаются в виде системы неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j, \ j = \overline{1, m} \tag{3.5}$$

Любую задачу линейного программирования с ограничением вида (3.5) можно привести к канонической форме.

Поскольку метод, используемый для решения задачи линейного программирования, не требует представления задачи в канонической форме, методика сведения системы неравенств (3.5) к системе равенств (3.4) здесь не рассматривается. Как уже было сказано, решением задачи линейного программирования является нахождение из системы (3.4) такого сочетания x_i $(i=1, 2, …n)$, которое обеспечивает целевой функции (3.3) экстремальное (максимальное или минимальное) значение. Известно, что если решение поставленной задачи существует, то оно не обязательно является единственным; возможны случаи, когда существует бесчисленное множество решений.

Это можно показать, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования.

При n=2 задача линейного программирования может быть решена и без участия ПЭВМ. Достаточно построить в координатах x_1, x_2 линии границ, выявить ОДЗП (область допустимых значений переменных решений задачи) и, определив направление роста или уменьшения функции цели, указать искомый экстремум. Такой путь является рациональным, если задача решается один раз и для определенных условий. Если же система ограничений содержит большое количество неравенств, коэффициенты которых меняются, или необходимо перебрать достаточно большое количество различных вариантов ограничений, то рационально автоматизировать поиск решения задачи с помощью ПЭВМ.

Основными этапами графического решения задачи линейного программирования являются:

– формализация задачи, то есть математическая формулировка, целевой функции и ограничений, налагаемых на независимые переменные;

– построение области допустимых значений переменных (ОДЗП), то есть многоугольника, границами которого служат отрезки прямых, удовлетворяющих условиям в системе ограничений;

– построение линий равных значений целевой функции (ЛРЗЦФ), каждая из которых является геометрическим местом точек, координаты, которых при подстановке в выражение ЦФ дают последней постоянные значения;

– определение координат и значения экстремума целевой функции, которое достигается путём нахождения последней точки касания ЛРЗЦФ с ОДЗП.

Решение задачи может быть единственным и находиться в точке пересечения ограничений, или множественным, если ЛРЗЦФ параллельна одному из ограничений.

Пример.

Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования: два вида изделий А, В последовательно обрабатываются на четырех видах машин. Ежедневно, каждый из четырех видов машин может использоваться соответственно 18, 12, 14 и 9 часов. Время, необходимое для обработки каждого из двух видов изделий на четырех типах машин указано в таблице 1:

Таблица 1

Вид машин / Вид изделия	1	2	3	4
А	1,0	0,5	1,0	0
В	1,0	1,0	0	1,0

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий максимум прибыли, если доход реализаций изделий А=4 у.е., а изделие В=6 у.е.

Решение.

Математическая формулировка задачи выглядит следующим образом:

$z = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

Ограничения, накладываемые на целевую функцию:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \le 18 \\ 0.5x_1 + 1x_2 \le 12 \\ 1x_1 \le 14 \\ 1x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Построим ОДЗП и ЛРЗ (рисунок 3.1).

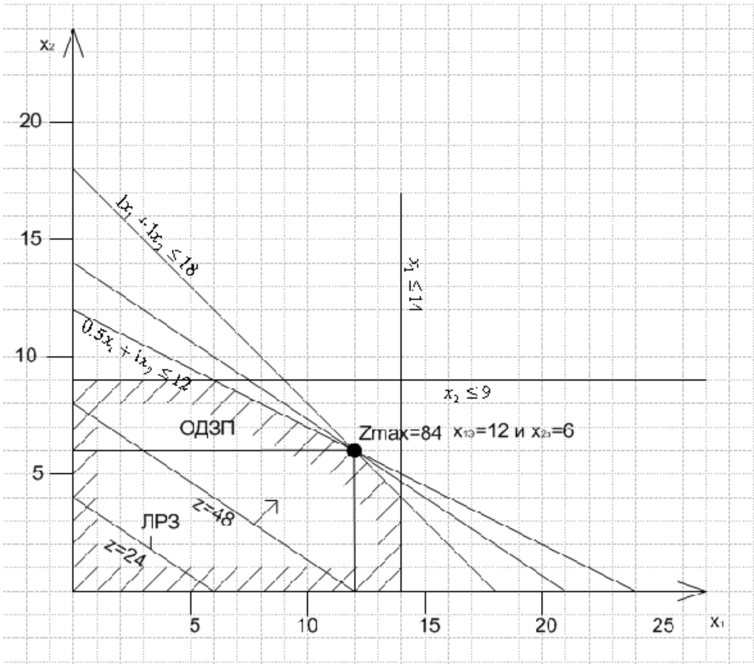


Рисунок 3.1– Иллюстрация к задаче линейного программирования

Целевая функция достигает своего наибольшего значения равное z_{max}=84 при x_1 = 12 и x_2 =6.

Вывод. В ходе решения задачи выяснили, что для того, чтобы обеспечить максимум прибыли равным 84 у.е. необходимо выпускать 12 штук изделия А и 6 штук изделия В.

3.2 Графический способ решения задачи квадратичного программирования

Квадратичное программирование относится к области нелинейной оптимизации, для осуществления которой используется многообразные методы математического программирования. Задачи этого класса возникают при управлении техническими объектами и планировании производства, при проектировании новой техники и разработке систем управления; к ним сводится большинство прикладных исследований по самым различным научным направлениям.

Общая задача математического программирования состоит в определении вектора $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, который доставляет экстремум (максимум или минимум) целевой функции Z(X) при ограничениях

$$H_j(X)=0;\ j=\overline{1,p},$$

$$G_k(X)\le 0;\ k=\overline{1,m}$$

Если функции Z(X), H(X) и G(X) линейны, то задача отыскания экстремума Z(X) называется задачей линейного программирования. Если же хотя бы одна из функций Z(X), H(X), G(X) нелинейна, то такая задача называется задачей нелинейного программирования.

Целевая функция в задачах квадратичного программирования формулируется следующим образом:

$$Z(X) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2$$

или

$$Z(X) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - a_i)^2 ,$$

где c_0, c_i, a_i - постоянные коэффициенты, $i = \overline{1,n}$.

Если n=2, задача квадратичного программирования может быть решена графически, для чего на чертеж, изображающий ***область допустимых значений переменных*** (ОДЗП, обычно это многоугольник) наносятся линии равных значений целевой функции, которые являются кривыми второго порядка.

Пример.

Найти неотрицательные значения переменных x_1 и x_2, которые обеспечивают минимальное и максимальное значения целевой функции

$$Z(X) = c_0 + c_1(x_1 - a_1)^2 + c_2(x_2 - a_2)^2 ,$$

причем ОДЗП x_1 и x_2 задана графически (рисунок.3.2).

Решение

Пусть $c_0 = 10$, $c_1 = 1$, $a_1 = 2$, $c_1 = 1$, $a_2 = 2$, то есть

$$Z = 10 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 .$$

Рассмотрим два варианта задания ОДЗП.

1. ОДЗП показана на рисунке. 3.3 (многоугольник ABCDO).

На рисунке нанесены линии равных значений целевой функции – окружности.

Очевидно, что минимум целевой функции (Z=10) обеспечивается в точке с координатами x_1=2 и x_2=2, находящийся внутри ОДЗП. Максимум же целевой функции (Z=19) обеспечивается на границе ОДЗП и в рассмотренном случае сразу в двух точках B и C, являющихся крайними точками ОДЗП – вершинами многоугольника ABCDO;

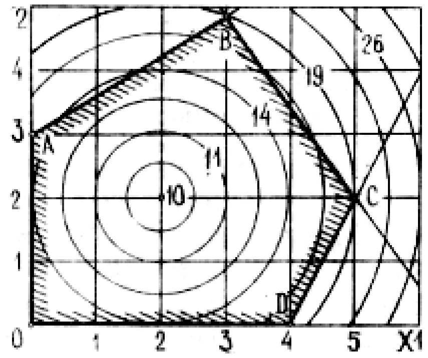


Рисунок 3.3 – Иллюстрация к задаче квадратичного программирования (минимум внутри ОДЗП)

2. ОДЗП показана на рисунке 3.4 (многоугольник ABCD). Так же, как и в первом варианте, максимум целевой функции обеспечивается в двух точках B и C, являющихся крайними точками ОДЗП. Минимум же целевой функции обеспечивается в точке M, находящейся на отрезке AD и являющейся точкой касания линии минимально возможного значения целевой функции с этим отрезком.

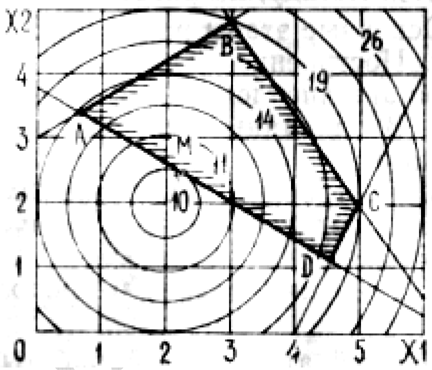


Рисунок 3.4 – Иллюстрация к задаче квадратичного программирования (минимум вне ОДЗП)

Анализ результатов решения двух рассмотренных выше вариантов задачи позволяет перечислить следующие основные свойства решения задач квадратичного программирования:

– экстремальные значения целевой функции могут достигаться во внутренних точках ОДЗП;

– экстремальные значения целевой функции могут достигаться в точках, принадлежащих ОДЗП и не являющихся крайними;

– решение задачи квадратичного программирования может быть не единственным.

Контрольная работа №1 «Графический способ решения задач оптимизации»

Пример решения задачи оптимизации графическим способом приведен в разделе 3.1. Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо провести ее формализацию (записать математическую формулировку целевой функции и ограничений).

Номер варианта выбирается в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

Вариант №1

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Завод по производству химических удобрений имеет возможность реализовать два технологических процесса, ориентированных на получение продукта А. Расходы, связанные с реализацией этих процессов, определяются трудозатратами и расходами материалов У, Z, W. Нормы трудозатрат, материалов, ресурсы завоза и доходы от реализации единицы продукции, полученной на 1 и 2 процессах, приведены в таблице.

	На единицу продукции		Ресурсы
	процесс 1	процесс 2	
Трудозатраты, человеко-недели	1,0	1,0	15
Материал У, [кг]	8,5	5,0	120
Материал Z,[кг]	3,0	12,5	100
Материал W, [шт]	1	2	20
Доход на единицу продукта [у.е.]	4	5	

Составить план выпуска продукта А, обеспечивающий максимум прибыли.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого У1 и У2 имеют исходные значения У10 и У20. Эффективность обработки материала оценивается с помощью критерия

$$\mathbf{КР=К1*(У1\text{-}У10)^2+К2*(У2\text{-}У20)^2,}$$

где К1, К2 – весовые коэффициенты.

Известно, что показатель У1 после обработки должен быть не меньше У1Н, а У2 не меньше У2Н. Но в силу различного рода ограничений показатель У1 не может быть выше У1В, а У2 - выше У2В. Кроме того, поскольку между показателями У1 и У2 существует взаимосвязь, сумма этих показателей

$$А1*У1+А2*У2$$

не может быть больше некоторой величины В.

Найти, при каких значениях У1 и У2 критерию КР будет обеспечено минимальное и максимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

К1	К2	У10	У20	У1Н	У1В	У2Н	У2В	А1	А2	В
1	1	90	1.25	30	80	0.5	2.0	1	40	120

Вариант №2

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Для производства двух видов продукции А, В используются четыре группы оборудования (1, 2, 3, 4), в каждой из которых соответственно 18, 8, 24 и 18 единиц оборудования. На производство одной штуки продукции А требуется занять в течение смены 1, 0, 5 и 2 единицы соответственно 1, 2, 3 и 4 групп оборудования, а продукции В соответственно 1, 1, 0 и 2.

Определить, сколько штук каждого вида продукции необходимо производить за смену, чтобы получать наибольшую прибыль, если доход от реализации одной штуки продукции А - 4 у.е., а продукции В - 6 у.е.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого У1 и У2 имеют исходные значения У10 и У20. Эффективность обработки материала оценивается с помощью критерия

$$\mathbf{КР=К1*(У1-У10)^2+К2*(У2-У20)^2},$$

где К1, К2 – весовые коэффициенты.

Известно, что показатель У1 после обработки должен быть не меньше У1Н, а У2 не меньше У2Н. Но в силу различного рода ограничений показатель У1 не может быть выше У1В, а У2 - выше У2В. Кроме того, поскольку между показателями У1 и У2 существует взаимосвязь, сумма этих показателей

$$А1*У1+А2*У2$$

не может быть больше некоторой величины В.

Найти, при каких значениях У1 и У2 критерию КР будет обеспечено минимальное и максимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

К1	К2	У10	У20	У1Н	У1В	У2Н	У2В	А1	А2	В
1	2	90	1.25	30	80	0.5	2.0	1	40	120

Вариант №3

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката (в тыс. л.): алкилат – 600; кренинг-бензин – 500; бензин прямой перегонки –500; изопентан – 600. В результате смешения этих компонентов в соответствии 0,375:0,250:200:0,175 получается бензин А, а в соотношении 0,175:0,200:0,250:0,375 – бензин В. Стоимость бензина А и В соответственно (у.е./1 тыс. л.) 120 и 150.

Определить план смешения компонентов, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого У1 и У2 имеют исходные значения У10 и У20. Эффективность обработки материала оценивается с помощью критерия

$$\mathbf{КР=К1*(У1-У10)^2+К2*(У2-У20)^2,}$$

где К1, К2 – весовые коэффициенты.

Известно, что показатель У1 после обработки должен быть не меньше У1Н, а У2 не меньше У2Н. Но в силу различного рода ограничений показатель У1 не может быть выше У1В, а У2 - выше У2В. Кроме того, поскольку между показателями У1 и У2 существует взаимосвязь, сумма этих показателей

$$А1*У1+А2*У2$$

не может быть больше некоторой величины В.

Найти, при каких значениях У1 и У2 критерию КР будет обеспечено минимальное и максимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

К1	К2	У10	У20	У1Н	У1В	У2Н	У2В	А1	А2	В
2	1	90	1.25	30	80	0.5	2.0	1	40	120

Вариант №4

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется около 10000 клеток, в каждой из которых можно содержать либо двух лисиц, либо одного песца. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лисиц и 6000 песцов. Ежедневно ферма располагает 60000 единиц корма, причем на 1 лису необходимо 4 единицы корма, одному песцу - 5 единиц.

Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была бы наибольшей? Известно, что прибыль от одной шкурки: лисы и песца соответственно 10 и 5 у.е.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого У1 и У2 имеют исходные значения У10 и У20. Эффективность обработки материала оценивается с помощью критерия

$$\text{КР}=\text{К1}*(\text{У1}-\text{У10})^2+\text{К2}*(\text{У2}-\text{У20})^2,$$

где К1, К2 – весовые коэффициенты.

Известно, что показатель У1 после обработки должен быть не меньше У1Н, а У2 не меньше У2Н. Но в силу различного рода ограничений показатель У1 не может быть выше У1В, а У2 - выше У2В. Кроме того, поскольку между показателями У1 и У2 существует взаимосвязь, сумма этих показателей

А1*У1+А2*У2

не может быть больше некоторой величины В.

Найти, при каких значениях У1 и У2 критерию КР будет обеспечено минимальное и максимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

К1	К2	У10	У20	У1Н	У1В	У2Н	У2В	А1	А2	В
1	1	8	2.5	4	12	1.0	3.0	0.5	12.5	50

Вариант №5

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Лакокрасочный завод получает ежемесячно сырье трех видов: А, В и С по 90, 50 и 80 единиц соответственно. Для получения единицы объема краски требуется: 1 ед. сырья А, 1 ед. сырья В и 2 ед. сырья С, для получения единицы объема лака соответственно 1, 3, 1.25 единиц сырья. Доход от реализации одной единицы объема краски и лака соответственно 1 и 1.4 у.е.

Составить план выпуска, обеспечивающий максимальный доход.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого У1 и У2 имеют исходные значения У10 и У20. Эффективность обработки материала оценивается с помощью критерия

$$\mathbf{КР=К1*(У1\text{-}У10)^2+К2*(У2\text{-}У20)^2,}$$

где К1, К2 – весовые коэффициенты.

Известно, что показатель У1 после обработки должен быть не меньше У1Н, а У2 не меньше У2Н. Но в силу различного рода ограничений показатель У1 не может быть выше У1В, а У2 - выше У2В. Кроме того, поскольку между показателями У1 и У2 существует взаимосвязь, сумма этих показателей

$$А1*У1+А2*У2$$

не может быть больше некоторой величины В.

Найти, при каких значениях У1 и У2 критерию КР будет обеспечено минимальное и максимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

К1	К2	У10	У20	У1Н	У1В	У2Н	У2В	А1	А2	В
1	2	8	2.5	4	12	1.0	3.0	0.5	12.5	50

Вариант №6

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Составить смесь, содержащую не менее 6 ед. вещества А, не более 36 ед. вещества В и не более 42 ед. вещества С. Вещества А, В, С содержатся в двух видах сырья (I и II), стоимость условной единицы которых соответственно 2 и 3 у.е. В условной единице сырья I содержится 2 ед.вещества А, 4 ед.вещества В, 7 ед. вещества С, а в условной единице сырья II соответственно 1, 9 и 6 ед. Стоимость смеси должна быть минимальной.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого (XI, X2) имеют исходные значения X10, X20. Эффективность обработки материала тем лучше, чем выше значение критерия.

$$\mathbf{L=K1*(X10-X1K)^2+K2*(X20-X2K)^2}$$

где K1, K2 – весовые коэффициенты,

X1K, X2K – значения качественных показателей после обработки материала.

Известно, что показатель X1 после обработки должен быть не меньше X1MH, а X2 не меньше X2MH. Но в силу различного рода ограничений показатель XI не может быть больше, чем X1MK, а X2 больше, чем X2MK. Кроме того, поскольку между показателями существует взаимосвязь, сумма их X1+X2 не может быть больше некоторой величины В.

Найти, при каких значениях X1K, X2K критерию L будет обеспечено максимальное и минимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

K1	K2	X1M H	X1MK	X2MH	X2MK	X10	X20	B
1	1	3	11	3	8	6	4	15

Вариант №7

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Радиозавод выпускает две модели радиоприемников А, В, прибыль от реализации которых соответственно 8 и 5 у.е. Для производства 10 приемников моделей А, В требуется соответственно 3 и 3.5 часа на изготовление деталей, 4 и 5 часов на сборку и 1 и 1.5 часа на упаковку. В течение недели может быть израсходовано 150 часов на производство деталей, 200 часов на сборку и 60 часов на упаковку. Общий выпуск радиоприемников должен быть не менее 200 штук, кроме того приемников модели В должно быть выпущено не более 150.

Составить план выпуска, обеспечивающий заводу максимум прибыли.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого (XI, X2) имеют исходные значения X10, X20. Эффективность обработки материала тем лучше, чем выше значение критерия.

$$L=K1*(X10-X1K)^2+K2*(X20-X2K)^2$$

где К1, К2 – весовые коэффициенты,
X1K, X2K – значения качественных показателей после обработки материала.

Известно, что показатель X1 после обработки должен быть не меньше X1MH, а X2 не меньше X2MH. Но в силу различного рода ограничений показатель XI не может быть больше, чем X1MK, а X2 больше, чем X2MK. Кроме того, поскольку между показателями существует взаимосвязь, сумма их X1+X2 не может быть больше некоторой величины B.

Найти, при каких значениях X1K, X2K критерию L будет обеспечено максимальное и минимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

K1	K2	X1M H	X1MK	X2MH	X2MK	X10	X20	B
1	2	3	11	3	8	6	4	15

Вариант №8

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Завод по производству лакокрасочных изделий имеет возможность реализовать два технологических процесса, ориентированных на получение нитроэмали. Расходы, связанные с реализацией этих процессов, определяются трудозатратами и расходами материалов сырьевых материалов А, В, С. Нормы трудозатрат, материалов, ресурсы завоза и доходы от реализации единицы продукции, полученной на 1 и 2 процессах, приведены в таблице.

	На единицу продукции		Ресурсы
	процесс 1	процесс 2	
Трудозатраты, человеко-смена	1,0	1,0	15
Материал А, [кг]	8,5	5,0	120
Материал В, [кг]	3,0	12,5	100
Материал С, [кг]	1	2	20
Доход на единицу продукта, [у.е.]	4	10	

Определить максимальный план выпуска нитроэмали на обоих процессах, обеспечивающих максимальную прибыль.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого (XI, X2) имеют исходные значения X10, X20. Эффективность обработки материала тем лучше, чем выше значение критерия.

$$\mathbf{L=K1*(X10-X1K)^2+K2*(X20-X2K)^2}$$

где K1, K2 – весовые коэффициенты,

X1K, X2K – значения качественных показателей после обработки материала.

Известно, что показатель X1 после обработки должен быть не меньше X1MH, а X2 не меньше X2MH. Но в силу различного рода ограничений показатель XI не может быть больше, чем X1MK, а X2 больше, чем X2MK. Кроме того, поскольку между показателями существует взаимосвязь, сумма их X1+X2 не может быть больше некоторой величины B.

Найти, при каких значениях X1K, X2K критерию L будет обеспечено максимальное и минимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

K1	K2	X1M H	X1MK	X2MH	X2MK	X10	X20	B
2	1	3	11	3	8	6	4	15

Вариант №9

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Фабрика спортивного инвентаря выпускает беговые лыжи и сноуборды. На изготовление этих изделий необходим пластик двух видов. Для изготовления одной пары лыж требуется 1,5 м^2 пластика I вида и 1,25 м^2 пластика II вида. Для изготовления одного сноуборда необходимо 2 м^2 пластика I вида и 1 м^2 пластика II вида. Запасы сырья на фабрике составляют: пластик I вида – 150 м^2, пластик II вида – 100 м^2. За смену фабрика должна выпустить не менее 20 пар лыж и не менее 30 скейтбордов. Цена одной пары лыж составляет 100 у.е., одного скейтборда – 80 у.е. Составить план выпуска изделий, обеспечивающих максимальную прибыль.

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого (XI, X2) имеют исходные значения X10, X20. Эффективность обработки материала тем лучше, чем выше значение критерия.

$$\mathbf{L=K1*(X10-X1K)^2+K2*(X20-X2K)^2}$$

где K1, K2 – весовые коэффициенты,
X1K, X2K – значения качественных показателей после обработки материала.

Известно, что показатель X1 после обработки должен быть не меньше X1MH, а X2 не меньше X2MH. Но в силу различного рода ограничений показатель XI не может быть больше, чем X1MK, а X2 больше, чем X2MK. Кроме того, поскольку между показателями существует взаимосвязь, сумма их X1+X2 не может быть больше некоторой величины B.

Найти, при каких значениях X1K, X2K критерию L будет обеспечено максимальное и минимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

K1	K2	X1M H	X1MK	X2MH	X2MK	X10	X20	B
1	1	2	7	2	9	6	4	13

Вариант №10

1. Получить графическое решение следующей задачи линейного программирования.

Цех выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 7 кг трансформаторного железа и 2 кг медной проволоки, а на один трансформатор второго вида – 2 кг трансформаторного железа и 1 кг медной проволоки.

В соответствии с указанной металлоемкостью трансформаторов изделие первого вида реализуется предприятием по цене втрое большей, чем изделие второго вида.

Сколько трансформаторов каждого вида должен выпускать цех, чтобы получить наибольшую прибыль, если в цеху имеется 1000 кг трансформаторного железа и 300 кг медной проволоки?

2. Получить графическое решение следующей задачи квадратичного программирования.

На обработку поступает материал, два качественных показателя которого (XI, X2) имеют исходные значения X10, X20. Эффективность обработки материала тем лучше, чем выше значение критерия.

$$\mathbf{L=K1*(X10-X1K)^2+K2*(X20-X2K)^2}$$

где K1, K2 – весовые коэффициенты,

X1K, X2K – значения качественных показателей после обработки материала.

Известно, что показатель X1 после обработки должен быть не меньше X1MH, а X2 не меньше X2MH. Но в силу различного рода ограничений показатель XI не может быть больше, чем X1MK, а X2 больше, чем X2MK. Кроме того, поскольку между показателями существует взаимосвязь, сумма их X1+X2 не может быть больше некоторой величины B.

Найти, при каких значениях X1K, X2K критерию L будет обеспечено максимальное и минимальное значения.

Значения коэффициентов приведены в таблице:

K1	K2	X1M H	X1MK	X2MH	X2MK	X10	X20	B
1	2	2	7	2	9	6	4	13

Контрольная работа №2 «Разработка алгоритмов методов решения оптимизационных задач»

Разработать алгоритм в виде блок-схемы и представить графическую иллюстрацию его реализации для следующих методов оптимизации:

Вариант 1. Метод золотого сечения.

Вариант 2. Метод локализации экстремума.

Вариант 3. Метод с использованием чисел Фибоначчи.

Вариант 4. Метод поочередного варьирования переменных.

Вариант 5. Метод наискорейшего спуска.

Вариант 6. Симплексный метод.

Вариант 7. Комплексный метод Бокса.

Вариант 8. Метод деформируемого многогранника (Нелдера – Мида).

Вариант 9. Метод Хука – Дживса.

Вариант 10. Метод Розенброка Пауэлла.

Номер варианта выбирается в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

При решении вариантов целесообразно руководствоваться примером решения оптимизационной задачи методом дихотомии, представленном в разделе 2.3.2.

Контрольная работа №3 «Основные понятия и положения теории оптимизации»

При выполнении вариантов контрольной работы рекомендуется использовать учебное пособие: Смирнов, И.А. Методы оптимизации. Базовый курс: учебное пособие / И.А. Смирнов. – СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010. 102 – с.

Номер варианта выбирается в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

Вариант 1. Сформулируйте постановку задачи оптимизации в общем виде. Расскажите о нормировании переменных.

Вариант 2. Дайте определение понятию «размерность» задачи оптимизации. Расскажите о постановке задачи одномерной оптимизации и методах ее решения.

Вариант 3. Сформулируйте понятие критерия оптимальности. Приведите наглядное изображение поверхности отклика для функций двух переменных. Покажите графическое отображение ограничения. Расскажите об основных методах условной минимизации.

Вариант 4. Приведите классификацию методов оптимизации по способам решения задачи. Дайте краткую характеристику каждого способа.

Вариант 5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие наличия экстремума в точке функции одной переменной. Укажите способы проверки на достаточность.

Вариант 6. Расскажите о классах задач оптимизации.

Вариант 7. Дайте определение методам прямого поиска минимума целевой функции. Расскажите об использовании регулярного симплекса при поиске экстремума.

Вариант 8. Расскажите об аналитических методах нелинейного программирования на примере минимизации целевой функции на заданном множестве.

Вариант 9. Расскажите о решении задачи минимизации аналитическим методом при ограничениях типа равенств. Дайте определение функции Лагранжа. Сформулируйте условие Куна – Таккера.

Вариант 10. Сформулируйте необходимое и достаточное условие наличия экстремума функции нескольких переменных.

Литература

1. Смирнов, И.А. Алгоритмы реализации методов нелинейного программирования (на базе автоматизированного обучающего комплекса): учеб. пособие / И.А. Смирнов, О.В.Ершова, Р.И. Белова.– СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2005. – 58 с.

2. Лесин, В.В. Основы методов оптимизации / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 341 с.

3. Аттетков, А.В. Методы оптимизации: учеб. для вузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.

4. Бояринов, А.И., Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. – 2-е изд. – М.: Химия, 1975. – 576 с.

5. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование: пер. с англ. / Д. Химмельблау. – М.: МИР, 1975. – 536 с.

6. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс: пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.