Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Методы оптимальных решений

Контрольные задания для студентов-заочников, обучающихся по направлениям подготовки

Института экономики и социальных технологий:

38.03.02 – Менеджмент
38.03.01 – Экономика

Института бизнес-коммуникаций:

38.03.02 – Менеджмент

Составители:
Э. Н. Осипова
В. В. Потихонова
Л. И. Король

Санкт-Петербург
2016

Утверждено
на заседании кафедры
10.02.2016 г., протокол № 5
Рецензент О. Б. Тёрушкина

Контрольные задания включают задачи по следующим разделам: векторные пространства, экономико-математические модели, графический и симплекс методы решения задач линейного программирования, элементы теории двойственности, транспортная задача. Приводятся примеры решения задач по всем разделам.

Оригинал-макет подготовлен составителями
Подписано в печать 27.06.16. Формат 60x841/16
Усл. печ. л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ 583/16
http://publish.sutd.ru
Отпечатано в типографии ФГБОУВО «СПбГУПТД»
191028, С.-Петербург, ул. Моховая, 26

В течение семестра Вы должны выполнить и сдать на проверку одну контрольную работу, которая включает темы, приведенные ниже в таблице. Работа должна быть представлена на проверку строго по учебному графику данных направлений подготовки.

В контрольной работе каждый студент должен решить и представить на рецензию 4 задачи.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради с соблюдением правил, обязательных для выполнения всех предыдущих работ по математике. Если все задания выполнены без ошибок, то студент допускается к защите работы, которая происходит во время экзаменационной сессии перед экзаменом или зачетом по этой дисциплине.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в этой же тетради и прислать на повторную проверку.

При выполнении контрольной работы на титульном листе указывается:

Фамилия, имя, отчество;
номер студенческого билета;
институт (факультет), группа,

название дисциплины, номер варианта.

При интернет-проверке присылать необходимо **только отсканированные рукописные** работы, собранные в один файл с последовательной нумерацией страниц.

Номер варианта соответствует последней цифре номера студенческого билета. Например, номер кончается на 5, то номера примеров 1.5, 2.5, 3.5, 4.5.

Литература

Учебники

1. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. http://www.iprbookshop.ru/52071. – ЭБС «IPRbooks».
2. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002.
3. Исследование операций в экономике / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2013.

Сборники задач

4. Практикум по высшей математике для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2013.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002.
6. Лунгу, К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач / К. Н. Лунгу. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Основные темы и рекомендуемая литература для их изучения

№ п/п	**Тема**	**Литература**
01	Векторные пространства	(1) Глава 3 (3.1 – 3.7, упражнения) (2) А.2 (2.1 – 2.6), А.7 (7.1 – 7.3)
02	Математические модели экономических задач	(2) Д.1 (1.1 – 1.4), (3) Глава 1 (1.1 – 1.3, упражнения)
03	Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования	(2) Д.2 (2.1 – 2.2), Д.3 (3.1 –3.3), (3) Глава 4 (1.1 – 1.3, упражнения)
04	Симплексный метод	(2) Д.4 (4.1 – 4.6) (3) Глава 5 (5.1 – 5.7, упражнения)
05	Понятие двойственности в линейном программировании	(2) Д.5 (5.1 – 5.2) (3) Глава 6 (6.1 – 6.2)
06	Транспортная задача	(2) Д.6 (6.1 – 6.9) (3) Глава 7 (7.1 – 7.3, упражнения)

При изучении предлагаемого материала не пропускайте решенных в учебниках типовых примеров.

Если их окажется недостаточно для того чтобы успешно выполнить предлагаемые задачи, обратитесь к соответствующим главам в сборниках задач (4) и (5).

Если и этого окажется недостаточно, тогда обратитесь за консультацией к преподавателям на кафедру математики СГПТУ.

Задача 1

Даны векторы $A_1, A_2, A_3, B \in R^3$**. Требуется:**

1) доказать, что векторы A_1, A_2, A_3 **образуют базис пространства** R^3**.**

2) разложить вектор ***B*** **в этом базисе.**

.

1\. 01. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$

1.02 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -21 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix}$

1.03 $A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -32 \\ -20 \\ -17 \end{pmatrix}$

1.04 $A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -25 \\ 30 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.05 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$

1.06 $A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -35 \\ 30 \\ -11 \end{pmatrix}$

1.07 $A_1=\begin{pmatrix}2\\9\\11\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}9\\-2\\8\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}1\\10\\11\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-16\\6\\-13\end{pmatrix}$

1.08 $A_1=\begin{pmatrix}6\\7\\13\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}7\\-6\\2\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}5\\8\\13\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-36\\42\\-1\end{pmatrix}$

1.09 $A_1=\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}5\\-3\\3\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-12\\12\\-4\end{pmatrix}$

1.10 $A_1=\begin{pmatrix}4\\7\\11\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}7\\-4\\4\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}3\\8\\11\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-24\\20\\-9\end{pmatrix}$

Пример. Доказать, что векторы A_1, A_2, A_3 образуют базис пространства $\mathbf{R}^3$ и разложить вектор **в** в этом базисе.

$$A_1=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}10\\12\\-1\end{pmatrix}$$

Решение. Векторы A_1, A_2, A_3 принадлежат трёхмерному пространству, поэтому базис могут образовать любые три линейно независимых вектора.

Проверим линейную независимость векторов A_1, A_2, A_3. Для этого покажем, что определитель матрицы, столбцами которого они являются, не равен нулю.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&2&0\\3&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&0\\1&2\end{vmatrix}=2-12=-10\neq 0.$$

Определитель вычислен разложением по первой строке. Так как определитель не равен нулю, то система векторов A_1, A_2, A_3 является базисом.

Для разложения вектора по базису запишем векторное уравнение:

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=B.$$

Перепишем это векторное уравнение в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Решим уравнение методом Гаусса.

Первое уравнение разделим на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} :2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \\ \\ \end{array},$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную соответственно на 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-2), \\ \\ \end{array}$$

2-ую строку делим на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1). \\ \\ \end{array}$$

К 1 и 3 строке прибавляем 2-ю строку, умноженную соответственно на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5/2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ :(5/2) \end{array}$$

3-ую строку делим на 5/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

К 1 и 2 строке прибавляем 3 строку, умноженную соответственно на -½ и ½:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Таким образом, разложение вектора ***B*** имеет вид $B = 4A_1 + A_2 - A_3$

Задача 2

Составить математическую модель задачи, решить задачу графическим и симплекс-методом.

2.01. Для изготовления двух видов изделий P_1 и P_2 используется три вида сырья S_1, S_2, S_3. Общее количество сырья, а также расход сырья на производство единицы каждого вида изделия, а также прибыль от реализации единицы изделий приведены в таблице. Найти оптимальный план производства изделий P_1 и P_2, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид ресурса	Вид изделия		Объем ресурсов, кг
	P_1	P_2	
Сырье S_1 (кг)	4	3	120
Сырье S_2 (кг)	1	10	200
Сырье S_3 (кг)	0	15	180
Прибыль, ден. ед.	5	6	

2.02. Для производства столов и книжных шкафов мебельная фабрика использует три вида древесины D_1, D_2, D_3. Запасы древесины, нормы расхода древесины на производство единицы каждого вида изделия, а также прибыль от реализации единицы изделий приведены в таблице. Найти оптимальный план производства столов и шкафов, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид ресурса	Вид изделия		Запас древесины, куб. м.
	стол	шкаф	
Сырье D_1 куб. м.	0,2	0,1	40
Сырье D_2 куб. м.	0,1	0,3	60
Сырье D_3 куб. м.	1,2	1,5	371
Прибыль, ден. ед.	6	18	

2. 03. Предприятие выпускает два вида изделий, P_1 и P_2. Каждое изделие требует обработки на трех видах оборудования: M_1, M_2, M_3. Фонд полезного времени работы каждого оборудования, нормы затрат времени на обработку единицы изделия каждого вида, а также прибыль от реализации единицы изделий приведены в таблице. Найти оптимальный план производства изделий P_1 и P_2, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид оборудования	Вид изделия		Фонд полезного времени работы оборудования, ч
	P_1	P_2	
M_1	3	8	24
M_2	2	7	14
M_3	4	12	24
Прибыль, ден. ед.	2	3	

2.04. Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок K_1 и K_2. Для производства кирпича применяется глина трех видов S_1, S_2, S_3. Нормы расхода глины каждого вида на 1 кирпич каждой марки, запасы глины, а также прибыль от реализации 1 кирпича каждой марки приведены в таблице. Найти оптимальный план производства кирпичей K_1 и K_2, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид глины	Вид изделия		Запасы глины, усл. ед.
	K_1	K_2	
S_1	4	2	32
S_2	2	3	32
S_3	1	4	36
Прибыль, ден. ед.	5	8	

2.05. Для изготовления шкафов и буфетов мебельная фабрика использует древесину 4 видов D_1, D_2, D_3 и D_4. Запасы древесины, нормы расхода древесины на производство единицы каждого вида изделия, а также прибыль от реализации единицы изделий приведены в таблице. Найти оптимальный план производства столов и шкафов, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид ресурса	Вид изделия		Запас древесины, куб. м.
	шкаф	буфет	
Сырье D_1 куб. м.	0	4	120
Сырье D_2 куб. м.	4	1	160
Сырье D_3 куб. м.	2	2	120
Сырье D_4 куб. м.	1	4	180
Прибыль, усл. ден. ед.	2	3	

2.06. Кондитерская фабрика для производства двух видов карамели K_1 и K_2 использует три вида основного сырья: сахар, патоку, фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 тонны карамели каждого вида, запасы сырья, а также прибыль от реализации 1 т карамели приведены в таблице. Найти оптимальный план производства карамели K_1 и K_2, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид сырья	Вид карамели		Запасы сырья, т
	K_1	K_2	
Сахар	0,5	0,8	80
Патока	0,4	0,3	60
Фруктовое пюре	0,1	0,1	12
Прибыль, усл. ден. ед.	108	112	

2.07. Предприятие выпускает два вида изделий, P_1 и P_2. Каждое изделие требует обработки на 4 видах оборудования: M_1,
M_2, M_3 и M_4 Фонд полезного времени работы каждого оборудования, нормы затрат времени на обработку единицы изделия каждого вида, а также прибыль от реализации единицы изделий приведены в таблице. Найти оптимальный план производства изделий P_1 и P_2, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид оборудования	Вид изделия		Фонд полезного времени работы оборудования, ч
	P_1	P_2	
M_1	2	1	16
M_2	1	1	10
M_3	0	1	6
M_4	1	0	7
Прибыль, усл. ден. ед.	3	4	

2.08 Трикотажная фабрика для производства свитеров и жакетов использует чистую шерсть, силон и нитрон. Нормы расхода пряжи каждого вида (в кг) на производство 1 изделия каждого вида, запасы пряжи, а также прибыль от реализации 1 жакета и 1 свитера приведены в таблице. Найти оптимальный план производства этих изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид пряжи	Вид изделия		Запасы пряжи, кг
	свитер	жакет	
Чистая шерсть	0,4	0,3	900
Вискозное волокно	0,2	0,1	400
Нитроновое волокно	0,1	0,1	300
Прибыль, ден. ед.	600	500	

2.09. В цехе имеется три группы станков B_1, B_2, B_3 в количествах 19, 40 и 41 соответственно. Цех предполагает изготовлять изделия двух видов A_1 и A_2. Известно, что каждое изделие A_1 обрабатывается на 1 станке группы B_1, на 5 станках группы B_2 и 4 станках группы B_3. Каждое изделие A_2 обрабатывается на 3 станках группы B_1, на 4 станках группы B_2 и 5 станках группы B_3. Прибыль от реализации одного изделия вида A_1 составляет 8 ден. ед, а изделия вида A_2 10 ден. ед. Условия задачи можно кратко записать в виде следующей таблицы.

Виды станков	Вид изделия		Станочный парк
	A_1	A_2	
B_1	1	3	19
B_2	5	2	40
B_3	4	5	41
Прибыль, ден. ед.	6	10	max

Найти оптимальный план производства изделий, который должен обеспечивать получение наибольшей прибыли от их реализации.

2.10. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудования для производства 2 видов товара. Найти оптимальный план производства продукции, который должен обеспечивать получение наибольшей прибыли от продажи изделий. Цифровые данные приведены в таблице.

Виды ресурсов	Вид товара		Объем ресурсов, кг
	T_1	T_2	
Сырье (кг)	2	5	70
Рабочая сила (часы)	4	3	75
Оборудование (станко-часы)	1	2	30
Прибыль, ден. ед.	8	10	max

Пример. Для изготовления двух видов изделий А и В используется три вида сырья S_1, S_2, S_3. Общее количество сырья, расход сырья на производство единицы каждого вида изделия, а также прибыль от реализации единицы изделий приведены в таблице. Найти оптимальный план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль.

Составить математическую модель задачи, решить задачу графическим и симплекс-методом. Составить двойственную задачу и найти ее решение, используя соотношения двойственности и решение исходной задачи.

Вид ресурса	Вид изделия		Объем ресурсов, кг
	A	B	
Сырье S_1 (кг)	5	2	90
Сырье S_2 (кг)	2	7	70
Сырье S_3 (кг)	3	3	60
Прибыль, ден. ед.	6	10	

Под планом производства будем понимать ответ на вопрос: сколько изделий А и сколько изделий В надо выпустить, чтобы прибыль была максимальна.

Ведем переменные задачи: пусть x_1 - объем выпуска изделия А, x_2 - объем выпуска изделия В. Тогда на выпуск изделия А будет израсходовано $5x_1 + 2x_2$ кг сырья первого вида, $2x_1 + 7x_2$ кг сырья второго вида, $3x_1 + 3x_2$ - третьего вида. Суммарная прибыль составит $6x_1 + 10x_2$ денежных единиц. Так как нельзя израсходовать сырья больше, чем имеется, то **математическая модель задачи** будет иметь вид:

1) система ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 90, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 70, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 60; \end{cases} \tag{1}$$

2) по смыслу задачи переменные

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \tag{2}$$

(условие неотрицательности переменных);

3) целевая функция - суммарная прибыль от реализации изделий:

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 10x_2 \to \max. \tag{3}$$

Поскольку задача содержит две переменные, она допускает **графическое решение**.

Введем систему декартовых координат на плоскости $x_1 0 x_2$ и построим области, описываемые системой ограничений (1).

Каждое из неравенств определяет полуплоскость с границей, задаваемой прямой. Множество решений системы есть пересечение полуплоскостей, представляющее собой выпуклый многоугольник или выпуклую незамкнутую многоугольную область.

Выпишем соответствующие уравнения граничных прямых:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 90; \\ 2x_1 + 7x_2 = 70; \\ 3x_1 + 3x_2 = 60. \end{cases}$$

Проведем на плоскости эти прямые (*рис. 2.1*)

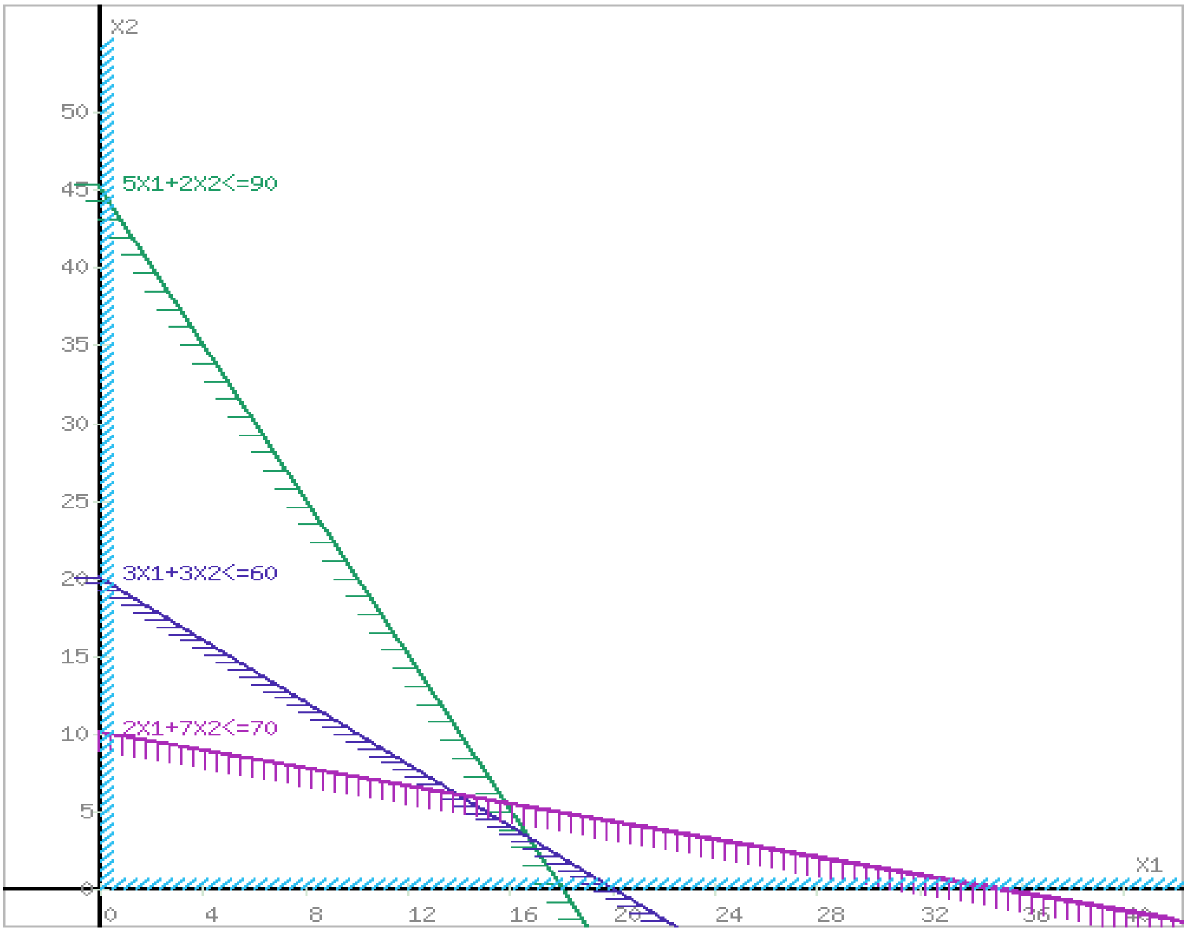

Рис. 2.1

Направление полуплоскости можно определить по одной точке, принадлежащей ей, например, точке O(0,0). В нашем случае при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ все неравенства обращаются в верные числовые неравенства:
$0 < 90;\ 0 < 70;\ 0 < 60$. Следовательно, точка O(0,0) принадлежит всем трем полуплоскостям. Покажем эти полуплоскости штриховкой на *рис. 2.1*.
Так как $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$, то многоугольник решений представляет общую часть полуплоскостей, попавшую в первую координатную четверть. Обозначим его ABCDE (*рис. 2.2*).

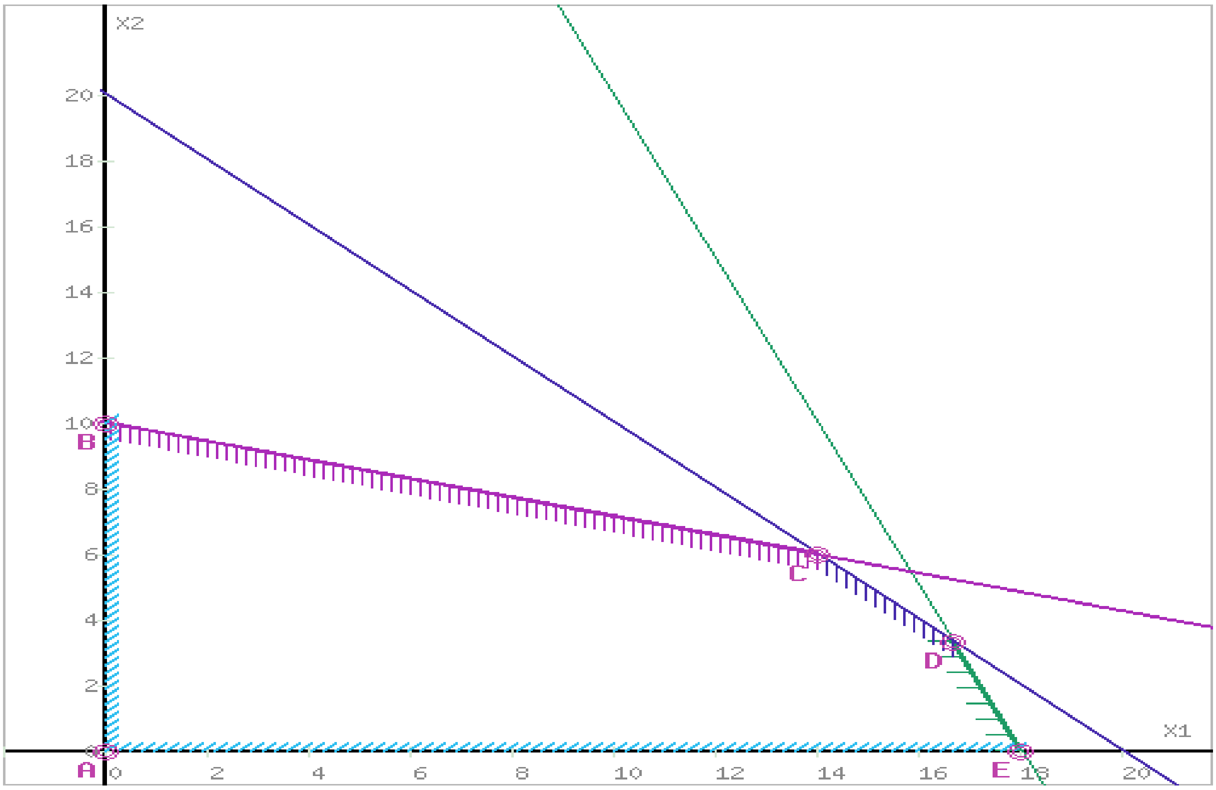

Рис. 2.2. Многоугольник решений системы ограничений

Рассмотрим целевую функцию задачи $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 10x_2 \to \max$. Эту функцию можно изобразить на плоскости в виде сетки параллельных прямых. Построим прямую, отвечающую значению функции Z = 0: $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 10x_2 = 0$. Вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации $Z(X)$. Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (6; 10). Будем двигать эту прямую параллельным образом. Поскольку нас интересует максимальное решение, поэтому двигаем прямую до последнего касания обозначенной области. На графике эта прямая обозначена пунктирной линией (*рис. 2.3*).

Прямая $Z(X)$= const пересекает область в точке С. Так как точка С получена в результате пересечения прямых (2) и (3), то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 70; \\ 3x_1 + 3x_2 = 60. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $x_1 = 14,\ x_2 = 6$.

Откуда найдем максимальное значение целевой функции:

$Z(X) = 6x_1 + 10x_2 = 6 \cdot 14 + 10 \cdot 6 = 144$.

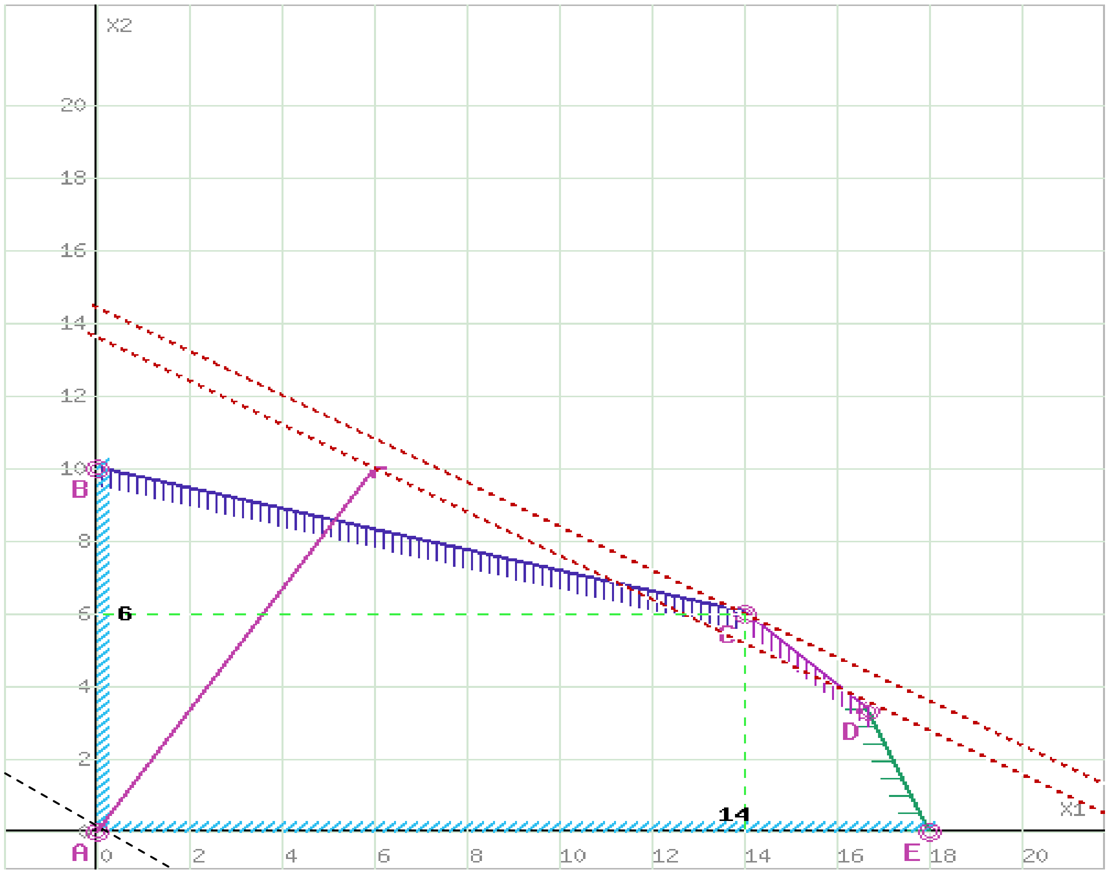

Рис. 2.3. Графическое решение задачи

Таким образом, для того, чтобы получить максимальную прибыль, равную 144 ден. ед., следует выпускать 14 изделий А и 6 изделий В.

Решим теперь эту же задачу симплекс-методом.

Поскольку система ограничений задачи (1) состоит из неравенств, то задача (1) – (3) является задачей линейного программирования в общем виде. Для решения задачи симплекс-методом необходимо привести ее к каноническому виду. Введя дополнительные переменные $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ в каждое неравенство системы ограничений, получим основную задачу вида:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 90; \\ 2x_1 + 7x_2 \qquad + x_4 = 70; \\ 3x_1 + 3x_2 \qquad\qquad + x_5 = 60; \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1 \div 5); \tag{5}$$

$$Z(X) = 6x_1 + 10x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max . \tag{6}$$

Теперь система ограничений состоит только из уравнений, правые части которых неотрицательны, и в каждом уравнении содержится разрешенная (базисная) переменная, следовательно, основная задача является канонической.

Запишем ее в векторной форме:

$$Z(X) = CX \to \max$$

при ограничениях $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = B;$ *и условии* $X \geq 0$,
где CX – скалярное произведение векторов $C = (6, 10, 0, 0, 0)$ и $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$,

векторы $A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}$

(их называют векторами условий).
Заполним теперь симплексную таблицу.

Т а б л и ц а 2.1

Базис	$C_б$	B	6	10	0	0	0	Оценочные отношения
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	90	5	2	1	0	0	
A_4	0	70	2	7	0	1	0	
A_5	0	60	3	3	0	0	1	

В верхнюю строку таблицы внесены значения целевой функции.
Векторы A_3 A_4, A_5 образуют естественный ортонормированный базис, поэтому запишем их в первый столбец таблицы. Переменные x_3, x_4, x_5 являются базисными переменными. Приравняв нулю свободные переменные ($x_1 = x_2 = 0$), получаем начальное базисное решение $X_0 = (0, 0, 90, 70, 60)$. При этом значение целевой функции $Z_0(X_0) = 0$. Его значение получено как скалярное произведение векторов $C_б$ и $\boldsymbol{B}$.

С помощью вышеприведённой таблицы мы выполнили шаг решения задачи ЛП симплексным методом или ***нулевую итерацию***.

Чтобы проверить оптимальность найденного решения, нужно для каждого вектора A_j при неизвестном x_j вычислить оценку Δ_j по формуле:
$\Delta_j = C_б A_j - c_j$, где $C_б A_j$ - скалярное произведение векторов $C_б$ *и* A_j. Иначе:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j$$

Вычислим соответствующие оценки

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} - 6 = -6;\quad \Delta_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix} - 10 = -10;\quad \Delta_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 = 0; \Delta_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 0 = 0.$$

Найденные значения впишем в индексную строку симплексной таблицы (*табл. 2.2*).

Т а б л и ц а 2. 2

Базис	$C_б$	B	6	10	0	0	0	Оценочные отношения
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3 $\leftarrow A_4$ A_5	0 0 0	90 70 60	5 2 3	2 **7** 3	1 0 0	0 1 0	0 0 1	$\theta_i = \min\begin{Bmatrix}\frac{90}{2}\\ \frac{70}{7}\\ \frac{60}{3}\end{Bmatrix} = \frac{70}{7} = 10$
$\mathbf{\Delta_j}$	$Z_0(X_0) = 0$		-6	-10 $\Uparrow$	0	0	0	

В индексной строке имеется две отрицательные оценки $\Delta_1 = -6$ и $\Delta_2 = -10$. Согласно критериям оценки оптимальности задачи на максимум найденное решение $X_0 = (0, 0, 90, 70, 60)$ неоптимальное и его можно улучшить за счет введения в ортонормированный базис одного из векторов, имеющих отрицательные оценки. Лучше всего для этого выбрать вектор с максимальной по абсолютной величине оценкой $\Delta_j < 0$. В нашем примере это $\Delta_2 = -10$ и, следовательно, вектор A_2 будем вводить в базис. Пометим его стрелочкой, а весь столбец выделен серым цветом, этот столбец называется ***разрешающим***.

Для определения вектора, выводимого из базиса, составим так называемые оценочные отношения, вычисляемые по формулам $\theta_i = \begin{cases} \infty, & \text{если } a_{ij} \le 0; \\ \frac{b_i}{a_{ij}}, & \text{если } a_{ij} > 0 \end{cases}$.

В строке с минимальным отношением θ_i>0 находится вектор, выводимый из базиса. Эту строку будем называть ***разрешающей строкой***. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится ***разрешающий элемент***.

Значения оценочных отношений для нашего примера внесены в последний столбец таблицы. $\theta_{\min}=10$. Следовательно, разрешающий элемент находится на пересечении второй строки и второго столбца (выделен жирным шрифтом и подчеркнут) и, таким образом, вектор A_4 выводится из базиса, а вектор A_2 вводится. Теперь вектор, вводимый в базис, должен стать ортом, т.е. единичным вектором. Эта операция выполняется методом Гаусса:

1) Разрешающую строку делим на разрешающий элемент (если он не равен 1, как в нашем случае), получаем новую разрешающую строку для следующей симплексной таблицы;

2) все остальные элементы разрешающего столбца обнуляем с помощью новой разрешающей строки.

В результате получим новую симплексную таблицу (*табл. 3*) ***(первая итерация)***.

$X_1=(0,10,70,0,30)$ - новое базисное решение, значение целевой функции при этом решении $Z_1(X_1)=100$.

Т а б л и ц а 2. 3

Базис	$C_б$	B	6	10	0	0	0	Оценочные отношения
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	90	5	2	1	0	0	$\theta_i=\min\left\{\frac{90}{2};\ \frac{70}{7};\ \frac{60}{3}\right\}=\frac{70}{7}=10$
$\leftarrow A_4$	0	70	2	**<u>7</u>**	0	1	0	
A_5	0	60	3	3	0	0	1	
Δ_j	$Z_0(X_0)=0$		-6	-10 ↑	0	0	0	$X_0=(0,0,90,70,60)$
A_3	0	70	31/7	0	1	-2/7	0	$\theta_i=\min\left\{\frac{70}{31/7};\ \frac{10}{2/7};\ \frac{30}{15/7}\right\}=14$
A_2	10	10	2/7	1	0	1/7	0	
$\leftarrow A_5$	0	30	**<u>15/7</u>**	0	0	-3/7	1	

Окончание т а б л. 2.3

Базис	$C_б$	B	6 A_1	10 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	Оценочные отношения
Δ_j	$Z_1(X_1)=100$		-22/7 ↑					
A_3 A_2 A_1	0 10 6	8 6 14	0 0 1	0 1 0	1 0 0	3/5 1/5 -1/5	-31/15 -2/15 7/15	
Δ_j	$Z_2(X_2)=144$		0	0	0	4/5	22/15	$X_2=(14,6,8,0,0)$

Вновь вычисляются оценки индексной строки, при этом опять одна оценка оказалась отрицательной $\Delta_1=-22/7$. Следовательно, решение X_1 – неоптимальное. Вектор A_1 надо вводить в базис. Для выявления вектора, выводимого из базиса, вновь составляем оценочные отношения и находим их минимальное значение. Новый разрешающий элемент находится на пересечении первого столбца и третьей строки (выделен жирным шрифтом). Все элементы системы вновь пересчитываются. В результате получена новая таблица - ***третья итерация***. Видим, что все оценки неотрицательны. Следовательно, в результате трех итераций получено оптимальное решение $X^*=(14,6,8,0,0)$.

Поскольку исходная задача содержала две переменные, то отбросим значения дополнительных переменных: $X^*=(14,6)$. Оптимальное значение целевой функции: $Z_{\max}(X^*)=144$.

Задача 3

Прядильно-ниточное предприятие выпускает нитки с лавсаном (н/л) и нитки с капроном (н/к), для изготовления которых использует хлопок I сорта (хл.1), а также и хлопок II сорта (хл.2). На изготовление 1 тонны (н/л) требуется A кг (хл.1) и B кг (хл.2), на изготовление 1 т (н/к) требуется C кг (хл.1) и D кг (хл.2). Запасы хлопка на предприятии составляют соответственно: P кг - (хл.1) и Q кг - (хл.2). Прибыль от реализации 1 т (н/л) составляет R у. е., а от реализации 1 т (н/к) - S у. е.

Какой должен быть план производства, чтобы суммарная прибыль оказалась максимальной?

1) В условие задачи **3.01 - 3.10** вместо буквенных данных подставьте соответствующие числовые, взятые из нужной Вам строки нижеследующей таблицы.
2) Составьте математическую модель этой задачи.
3) Составьте двойственную к ней задачу, приняв за неизвестные условные цены на хлопок.
4) Решив обе задачи графическим методом, проверьте выполнение основного принципа двойственности.

Т а б л и ц а числовых данных к задачам 3.01 - 3.10.

	Расход хл.1 (кг/т)		**Расход хл.2 (кг/т)**		**Запас хлопка (кг)**		**Прибыль за 1 т (у. е.)**	
	A	**C**	**B**	**D**	**P**	**Q**	**R**	**S**
	н/л	н/к	н/л	н/к	хл.1	хл.2	н/л	н/к
3.1	34	14	4	161	266	350	588	1995
3.2	51	16	6	184	456	600	1053	2880
3.3	68	18	8	207	684	900	1632	3915
3.4	85	12	10	138	570	750	1605	2412
3.5	51	14	6	161	399	525	945	2331
3.6	85	16	10	184	760	1000	1965	3648
3.7	34	18	4	207	342	450	732	3051
3.8	102	14	12	161	798	1050	2268	3339
3.9	51	10	6	115	285	375	729	1395
3.10	68	14	8	161	532	700	1344	2667

Пример. Прядильно-ниточное предприятие выпускает нитки с лавсаном (н/л) и нитки с капроном (н/к), для изготовления которых использует хлопок I сорта (хл.1), а также и хлопок II сорта (хл.2). На изготовление 1 тонны (н/л) требуется **85** кг (хл.1) и **10** кг (хл.2), на изготовление 1 т (н/к) требуется **6** кг (хл.1) и 69 кг (хл.2). Запасы хлопка на предприятии составляют соответственно: **285** кг - (хл.1) и 375 кг - (хл.2).

Прибыль от реализации 1 т (н/л) составляет **1065** у. е., а от реализации 1 т (н/к) **963** у. е.

Какой должен быть план производства, чтобы суммарная прибыль оказалась максимальной?

Решение

Возможная формулировка двойственной задачи.

В условиях поставленной задачи требуется определить такие условные цены на 1 кг хлопка 1 сорта (хл.1), и 1 кг хлопка 2 сорта (хл.2), чтобы не потерять доход, продав его, не производя ниток, и чтобы при этом суммарные затраты покупателей оказались минимальными.

Составляем исходную и двойственную задачи:

Исходная	*Двойственная*
$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0;$	$y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0;$
$\begin{cases} 85x_1 + 6x_2 \le 285 \\ 10x_1 + 69x_2 \le 375 \end{cases}$	$\begin{cases} 85y_1 + 10y_2 \ge 1065 \\ 6y_1 + 69y_2 \ge 963 \end{cases}$
$Z(x) = 1065x_1 + 963x_2 \to \max$	$F(y) = 285y_1 + 375y_2 \to \min$

Здесь x_1 – объем производства ниток с лавсаном, а x_2 – ниток с капроном.

Решим исходную задачу графически.

Область допустимых решений представляет собой четырёхугольник ABCD. Построим линию уровня целевой функции $1065x_1 + 963x_2 = 0$ и вектор $grad\, Z = 0{,}05 \cdot (1065; 963)$

Перемещая линию уровня по области допустимых решений параллельно самой себе в направлении вектора grad Z, видим, что max Z находится в точке C.

Найдем координаты точки C:

$$\begin{cases} 85x_1 + 6x_{2.} = 285; \\ 10x_1 + 69x_2 = 375. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

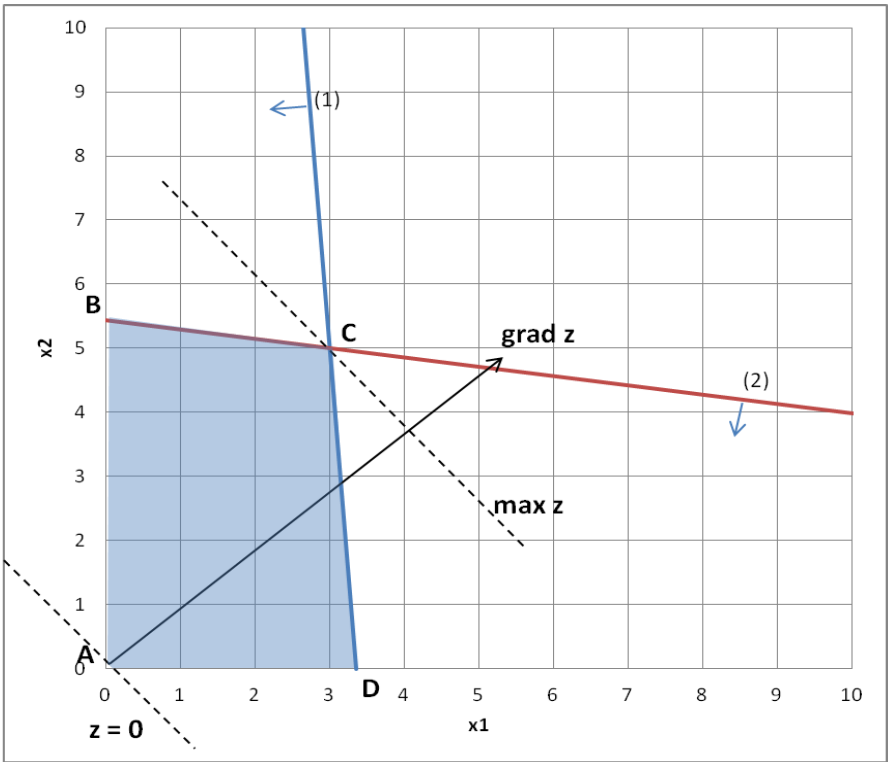

Рис. 3.1. Графическое решение прямой задачи

Имеем: $Z_{\max} = Z(3;5) = 1065 \cdot 3 + 963 \cdot 5 = 8010$.

Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 8010 у. е. необходимо производить 3 тонны нити с лавсаном и 5 тонн нити с капроном.

Решим теперь графически двойственную задачу.

Область допустимых решений представляет собой открытую область. min F находится в точке A.

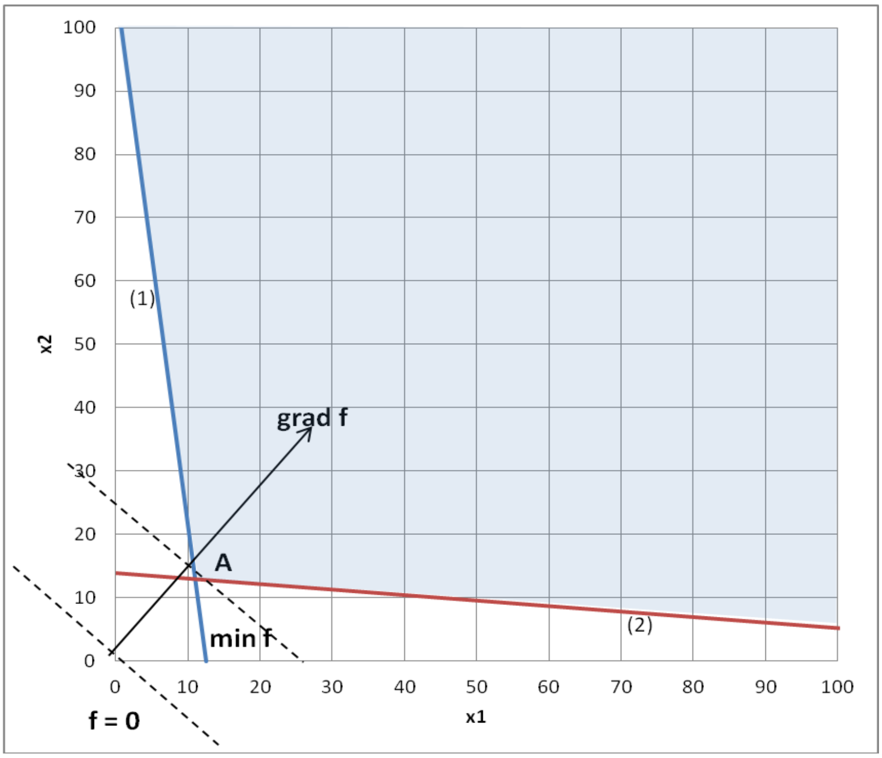

Рис. 3.2. Графическое решение двойственной задачи

Найдем координаты точки А:

$$\begin{cases} 85y_1 + 10y_2 = 1065; \\ 6y_1 + 69y_2 = 963. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $y_1 = 11$, $y_2 = 13$.

Получаем решение двойственной задачи:

$F_{\min} = F(11;13) = 285 \cdot 11 + 375 \cdot 13 = 8010$.

Видим, что основной принцип двойственности выполняется: $F_{\min} = Z_{\max} = 8010$.

Если из пары двойственных задач одна обладает оптимальным решением (планом), то и другая имеет решение, причем для экстремальных значений целевых функций выполняется соотношение $\max Z(X) = \min F(Y)$.

Задача 4

Решить транспортную задачу методом потенциалов. Первоначальный опорный план составьте методом северо-западного угла.

Имеются три ткацких фабрики A1, A2 и A3, которые поставляют ткань на три швейные фабрики в пределах России B1, B2 и B3. Известны запасы ткани на каждой ткацкой фабрике (в рулонах) и потребности в ней на каждой швейной фабрике. Известна также стоимость перевозки одного рулона ткани (у. е.) от каждого поставщика к каждому потребителю. Найти такой план перевозок, при котором суммарные затраты оказались бы минимальными.

Условия (запасы, потребности и цена перевозки каждого рулона ткани) для каждого номера задачи приведены в таблицах.

4.01					4.02				
	запас	B1	B2	B3		запас	B1	B2	B3
A1	**50**	3	8	9	A1	**22**	7	6	3
A2	**18**	3	4	5	A2	**18**	8	4	2
A3	**12**	2	7	6	A3	**16**	2	3	1
потребность		**14**	**20**	**22**	**потребность**		**20**	**12**	**8**
4.03					4.04				
	Запас	B1	B2	B3		запас	B1	B2	B3
A1	**20**	3	6	4	A1	**90**	5	6	8
A2	**90**	5	9	3	A2	**65**	6	9	10
A3	**60**	4	8	6	A3	**75**	4	7	5
потребность		**25**	**40**	**35**	**потребность**		**40**	**120**	**170**
4.05					**4.06**				
	запас	B1	B2	B3		запас	B1	B2	B3
A1	**15**	6	7	5	A1	**20**	5	8	3
A2	**8**	5	6	4	A2	**10**	2	4	2
A3	**20**	9	10	6	A3	**12**	7	6	3
потребность		**16**	**20**	**35**	**потребность**		**19**	**31**	**10**
4.07					4.08				
	запас	B1	B2	B3		запас	B1	B2	B3
A1	**30**	9	7	4	A1	**32**	9	8	4
A2	**15**	5	3	2	A2	**15**	8	7	3
A3	**45**	10	8	5	A3	**7**	4	3	2
потребность		**20**	**18**	**17**	**потребность**		**18**	**40**	**12**

4.09					4.10				
	запас	В1	В2	В3		запас	В1	В2	В3
А1	**18**	5	8	2	А1	**25**	4	5	9
А2	**22**	8	9	4	А2	**10**	2	3	3
А3	**15**	6	7	3	А3	**12**	4	6	8
потребность		**12**	**19**	**9**	**потребность**		**14**	**20**	**30**

Пример. Имеются три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 (ткацкие фабрики) и три пункта B_1, B_2, B_3 потребления этого груза (швейные предприятия). В пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз в количествах 10, 20, 30 ед. В пункты B_1, B_2, B_3 требуется доставить соответственно 17, 8, 10 ед. груза. Тарифы перевозок заданы в *табл. 4.1*. Найти оптимальный план перевозок, при котором суммарные затраты оказались бы минимальными.

Т а б л и ц а 4.1

Поставщики	запас	B_1	B_2	B_3
A_1	**10**	1	2	4
A_2	**20**	2	3	1
A_3	**30**	5	7	8
Запросы потребителей		**17**	**8**	**10**

Для решения задачи необходимо выполнение следующего условия: суммарные запасы продукции у поставщиков должны равняться суммарной потребности потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (уравнения баланса)

Здесь a_i - запасы поставщиков; b_j - запросы потребителей. Такая задача называется задачей ***закрытого типа***.

Прежде всего, проверим, является ли поставленная задача закрытой.

Запасы поставщиков: 10 + 20 + 30 = 60 единиц продукции.

Потребность потребителей: 17 + 8 + 10 = 35 единиц продукции.

Разница в 25 единиц продукции. Уравнение баланса не выполнено, следовательно, это транспортная задача ***открытого типа***: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Такая задача сводится к закрытой введением фиктивного потребителя B_4, с потребностью 25 единиц продукции.

Стоимость доставки единицы продукции от всех поставщиков к потребителю B_4 принимаются равными нулю (*табл. 4.2*)

Т а б л и ц а 4. 2

поставщики	запас	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	**10**	1	2	4	0
A_2	**20**	2	3	1	0
A_3	**30**	5	7	8	0
Запросы потребителей		**17**	**8**	**10**	**25**

Теперь суммарные запасы продукции у поставщиков равны суммарной потребности потребителей.

Решение будем строить непосредственно в транспортной таблице (*табл. 4.3*). Начальный план строим ***методом северо-западного угла.***

Т а б л и ц а 4. 3

Итерация №1		$V_1 = 2$	$V_2 = 3$	$V_3 = 1$	$V_4 = -7$	V_j / U_i
поставщики	запас	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	**10**	1 **10**	2	4	0	$U_1 = -1$
A_2	**20**	2 **7**	3 **8**	1 **5**	0	$U_2 = 0$
A_3	**30**	5	7	8 **5**	0 **25**	$U_3 = 7$
Запросы потребителей		**17**	**8**	**10**	**25**	

Первой заполняем верхнюю левую клетку (северо-западный угол). У первого поставщика имеется 10 ед. груза, а потребности первого потребителя составляют 17 ед., поэтому 10 ед. мы забираем у первого поставщика, а недостающие 7 ед. – у второго поставщика. Теперь первый потребитель полностью обеспечен. У второго поставщика еще остается 13 единиц груза, 8 из которых помещаем во второй столбец, полностью удовлетворив запрос второго потребителя, а 5 направим третьему потребителю. Недостающие третьему потребителю 5 ед. груза возьмем у третьего поставщика. Оставшиеся у третьего поставщика 25 ед. груза отправим четвертому потребителю. Весь груз распределен. Получено начальное решение задачи.

Стоимость доставки продукции для начального решения составит:
$Z_0 = 10\cdot 1 + 7\cdot 2 + 8\cdot 3 + 5\cdot 1 + 5\cdot 8 + 25\cdot 0 = 93$ ден. ед.

Проверим количество заполненных клеток. Для нашей задачи число их должно составлять 3+4-1=6. Поскольку заполнено 6 клеток, то полученный план ***невырожденный.*** В том случае, если число заполненных клеток окажется меньше, то такой план называется ***вырожденным***. Тогда в одну из пустых клеток надо поставить нулевую перевозку.

Проверим оптимальность начального решения методом потенциалов.
Каждому поставщику A_i ставим в соответствие некоторое число U_i, называемое потенциалом поставщика. Каждому потребителю B_j ставим в соответствие некоторое число V_j, называемое потенциалом потребителя. К табл.3 добавим сверху ещё одну строку и справа ещё один столбец.
В строке будем записывать потенциалы V_j, а в столбце потенциалы U_i.

Для заполненных клеток, сумма потенциалов поставщика и потребителя равна тарифу задействованного маршрута, т.е. $U_i + V_j = C_{ij}$, где C_{ij} – тариф перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j.

Значение одного потенциала необходимо задать. Пусть $U_2 = 0$. Тогда для **заполненных** клеток:

(2;1): $U_2 + V_1 = 2, \Rightarrow 0 + V_1 = 2 \ V_1 = 2;$

(2;2): $U_2 + V_2 = 3 \Rightarrow 0 + V_2 = 3, \ V_2 = 3;$

(2;3): $U_2 + V_3 = 1 \Rightarrow 0 + V_3 = 1, \ V_3 = 1;$

(1;1): $U_1 + V_1 = 1 \Rightarrow U_1 + 2 = 1, \ U_1 = -1;$

(3;3): $U_3 + V_3 = 8 \Rightarrow U_3 + 1 = 8, \ U_3 = 7;$

(3;4): $U_3 + V_4 = 0 \Rightarrow 7 + V_4 = 0, \ V_4 = -7.$

Для каждой **незанятой** клетки сумма потенциалов должна не превышать стоимость перевозки, стоящей в этой клетке, т.е. $U_i + V_j \le C_{ij}$. Если хотя бы одна клетка не удовлетворяет этому условию, то план является неоптимальным и его можно улучшить.
Найдем оценки пустых клеток по формуле $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij}$.

$\Delta_{12} = \left(-1+3\right) - 2 = 0;$

$\Delta_{13} = \left(-1+1\right) - 4 = -4;$

$\Delta_{14} = \left(-1-7\right) - 0 = -8;$

$\Delta_{24} = \left(0-7\right) - 0 = -7;$

$\Delta_{31} = \left(7+2\right) - 5 = 4 > 0;$

$\Delta_{32} = \left(7+3\right) - 7 = 3 > 0.$

Две оценки оказались положительными, следовательно, найденный план перевозок неоптимален, его можно улучшить.

Для клетки (3,1) (у нее положительная оценка максимальна) строим цикл пересчета (*табл. 4.4*)

Т а б л и ц а 4. 4

Итерация №2		$V_1 = 2$	$V_2 = 3$	$V_3 = 1$	$V_4 = -7$	V_j / U_i
поставщики	запас	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	**10**	1 **10**	2	4	0	$U_1 = -1$
A_2	**20**	_ 2 **7**	3 **8**	1 **5+**	0	$U_2 = 0$
A_3	**30**	5 +	7	8 **5_**	0 **25**	$U_3 = 7$
Запросы потребителей		**17**	**8**	**10**	**25**	

Клетка (3.1) – вершина цикла. Она находится в пустой клетке, остальные вершины – в заполненных клетках. Клетка (3.1) помечена знаком «+», далее последовательно расставлены знаки «-« и «+». Среди клеток, помеченных знаком «-« обычно определяют наименьшее значение перевозки и его перемещают по циклу. В нашем случае эта величина составила 5 единиц груза. Перемещаем грузы по циклу.

В клетки со знаком «+» добавляем 5 единиц груза, а со знаком минус уменьшаем на 5. Получаем новый план, представленный в *табл. 4.5*.

Т а б л и ц а 4. 5

Итерация № ё3		$V_1 = 2$	$V_2 = 3$	$V_3 = 1$	$V_4 = -3$	V_j / U_i
поставщики	запас	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	**10**	1 **10**	2	4	0	$U_1 = -1$
A_2	**20**	2 **2**	3 **8**	1 **10**	0	$U_2 = 0$
A_3	**30**	5 **5**	7	8	0 **25**	$U_3 = 3$
Запросы потребителей		**17**	**8**	**10**	**25**	

Стоимость доставки продукции для нового плана составит:
$Z_1 = 10 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 25 \cdot 0 = 73$ ден. ед.

Для оценки его оптимальности снова строим систему потенциалов, принимая $U_2 = 0$.

Для заполненных клеток:

(2;1): $U_2 + V_1 = 2, \Rightarrow 0 + V_1 = 2 \ V_1 = 2;$

(2;2): $U_2 + V_2 = 3 \Rightarrow 0 + V_2 = 3, \ V_2 = 3;$

(2;3): $U_2 + V_3 = 1 \Rightarrow 0 + V_3 = 1, \ V_3 = 1;$

(1;1): $U_1 + V_1 = 1 \Rightarrow U_1 + 2 = 1, \ U_1 = -1;$

(3;1): $U_3 + V_1 = 5 \Rightarrow U_3 + 2 = 5, \ U_3 = 3;$

(3;4): $U_3 + V_4 = 0 \Rightarrow 3 + V_4 = 0, \ V_4 = -3.$

Оценки пустых клеток:

$\Delta_{12} = (-1 + 3) - 2 = 0;$

$\Delta_{13} = (-1 + 1) - 4 = -4;$

$\Delta_{14} = (-1 - 3) - 0 = -4;$

$\Delta_{24} = (0 - 3) - 0 = -3;$

$\Delta_{32} = (3 + 3) - 7 = -1;$

$\Delta_{33} = (3 + 1) - 8 = -4.$

Все оценки неположительные, следовательно, план оптимален.

Запишем ответ задачи: $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$

Поскольку последний столбец оптимального плана соответствует фиктивному потребителю, из окончательного ответа он должен быть исключен. Отброшенные 25 ед. груза поставщика A_3 останутся нераспределенными. Окончательный ответ:

$$X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Z_{опт.}\left(X^*\right) = 73 \text{ ден. ед.}$$