Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного университета
информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, ул. Саблинская, д. 14

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Игнотенко

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

I семестр

Санкт-Петербург
2004

Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий,
механики и оптики

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

по высшей математике

Методические указания и задачи для студентов
I семестр

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург
2004

УДК 517.0(075.8)
Типовые расчеты по высшей математике.
1 семестр\Методические указания и задачи для студентов.-
СПб: СПбГУ ИТМО, 2004. - 49 с.

Составители : Н.А. Бодрова, В.В. Войницкая,
С.Ю. Гарнаев, С.Н. Кузнецова, И.А. Лапин, С.В. Петрас,
Л.С. Ратафьева, Т.В. Родина, А.Е. Рыжков, Н.П. Стреляева,
И.А. Суслина, В.Ю. Тертычный, В.М. Фролов,
Ю.В. Экало, Д.А.Зубок.

Под общей редакцией профессора И.А.Лапина.

Рецензенты : доктор физ.-мат. наук проф. С.А. Козлов,
канд. физ.-мат. наук доц. К.К.Боярский

Одобрено на заседании кафедры 11 июня 2003 г.,
протокол № 5.

Одобрено на заседании методической комиссии ЕНФ
17 июня 2003 г., протокол № 7.

Общие рекомендации

Студенты первого курса дневного отделения обязаны выполнить четыре типовых расчета: два в первом и два во втором семестре. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе. Каждый типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, чертежи и рисунки необходимо исполнить на миллиметровке, подклеить затем их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач необходимо делать достаточно подробные пояснения. Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая которые во внимание и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
"КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ"

Методические указания

Типовой расчет содержит шесть заданий.

1. Выполнение первого задания требует знания канонических уравнений кривых второго порядка и уравнения прямой линии на плоскости.

Решим типовую задачу.

Задача 1. Фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Эллипс проходит через точку $M(-2;1,5)$. Составить уравнение этого эллипса.

Решение. Обозначим через a_1 и b_1 полуоси данной гиперболы, через a и b - полуоси искомого эллипса. Имеем $a_1^2=9, b_1^2=4$, откуда $c_1^2=a_1^2+b_1^2=13$. Так как фокусы эллипса совпадают с фокусами данной гиперболы, то и для эллипса $c^2=c_1^2=13$. Уравнение эллипса ищем в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Так как точка $M(-2;1,5)$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса и, кроме того, выполнено соотношение $a^2-b^2=13$. Таким образом, для определения a и b имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{(-2)^2}{a^2} + \dfrac{(1,5)^2}{b^2} = 1; \\ a^2 - b^2 = 13. \end{cases}$$

Обозначив $b^2 = t \ (t > 0)$ и $a^2 = 13 + t$,

получим $\dfrac{4}{13+t} + \dfrac{9}{4t} = 1, a^2 = 13 + t.$

Решая, находим $t = b^2 = 3, a^2 = 16$ (рис.1).

Ответ: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{3} = 1.$

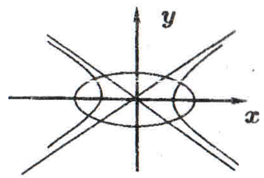

Рис.1

II. ***Во втором задании требуется привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, выполнив последовательно поворот, а затем параллельный перенос координатных осей.***

Задача 2. Дано уравнение кривой второго порядка $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$. Выполнив поворот и параллельный перенос координатных осей, получить каноническое уравнение кривой и построить ее в исходной системе координат.

Решение. Выполняем поворот осей по формулам $x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$; $y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$. Подставим эти выражения для x и y в исходное уравнение и выделим коэффициент при $x_1 y_1$:

$$5(x_1^2 \cos^2\alpha - 2x_1 y_1 \cos\alpha \sin\alpha + y_1^2 \sin^2\alpha) + 4(x_1^2 \cos\alpha \sin\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) x_1 y_1 - \\ - y_1^2 \sin\alpha\cos\alpha) + 8(x_1^2 \sin^2\alpha + 2x_1 y_1 \sin\alpha\cos\alpha + y_1^2 \cos^2\alpha) - \\ -52(x_1\cos\alpha - y_1 \sin\alpha) - 64(x_1 \sin\alpha + y_1\cos\alpha) + 164 = 0 \qquad (1)$$

Приравняв нулю коэффициент при $x_1 y_1$, получаем:

$$-10\cos\alpha\sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 16\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

откуда $(tg\alpha)_1 = 2; (tg\alpha)_2 = -1/2$.

Зная $tg\alpha$, можно найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам тригонометрии:

$\sin\alpha = \pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}; \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$. Если угол поворота α условиться считать острым, то в этих формулах надо брать знак плюс, и для $tg\alpha$ надо

взять также положительное решение. Выберем, например, угол поворота $\alpha : tg\alpha = 2$, найдем $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, подставим их в (1).

После вычисления коэффициентов получим уравнение:

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 36\sqrt{5}x_1 + 8\sqrt{5}y_1 + 164 = 0.$$

В полученном уравнении выделим полные квадраты двучленов $x_1 + x_0$ и $y_1 + y_0$:

$$9(x_1 - 2\sqrt{5})^2 + 4(y_1 + \sqrt{5})^2 - 36 = 0.$$

Выполнив параллельный перенос по формулам $x_1 - 2\sqrt{5} = X, y_1 + \sqrt{5} = Y$, получим в системе $XO'Y$ уравнение кривой $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$: это эллипс с полуосями 2 и 3 соответственно (рис.2).

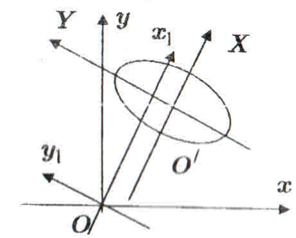

Рис. 2

III. ***Выполнение третьего задания предполагает знание уравнений прямой на плоскости и в пространстве и уравнений плоскости.***

Решим типовую задачу.

Задача 3. Провести плоскость через перпендикуляры из точки $A(5;2;-1)$ к плоскостям $2x - y + 3z + 23 = 0$ и $2x + 2y + z - 8 = 0$. Найти расстояние от основания первого перпендикуляра до второй плоскости.

Решение.

1. Обозначим через α_1 первую плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$, а через α_2 - вторую плоскость $2x + 2y + z - 8 = 0$. Очевидно, что в качестве нормального вектора $\overline{N}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\overline{n_1} = \{2;-1;3\}$ и $\overline{n_2} = \{2;2;1\}$ данных плоскостей α_1 и α_2:

$$\overline{N} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k}.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(5;2;-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{-7;4;6\}$, получаем $-7(x-5) + 4(y-2) + 6(z+1) = 0$ или $-7x + 4y + 6z + 33 = 0$.

2. Найдем проекцию Р точки $A(5;2;-1)$ на плоскость α_1. Вектор $\overline{n_1} = \{2;-1;3\}$ будет направляющим вектором перпендикуляра АР, то есть $\overline{s_1} = \{2;-1;3\}$. Поэтому каноническое уравнение этого перпендикуляра имеет вид $\dfrac{(x-5)}{2} = \dfrac{(y-2)}{-1} = \dfrac{(z+1)}{3}$.

Приводим данные уравнения к параметрическому виду, приравнивая к t каждое из трех данных отношений: $x = 5 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = -1 + 3t$.

Подставляя полученные значения x, y, z в уравнение плоскости α_1: $2x - y + 3z + 23 = 0$, получаем: $2(5+2t) - (2-t) + 3(-1+3t) + 23 = 0$, откуда находим значение параметра, соответствующее точке Р пересечения прямой АР с данной плоскостью $\alpha_1 : t = -2$.

Находим координаты P: $x_0 = 5 + 2(-2) = 1$; $y_0 = 2 - (-2) = 4$;
$z_0 = -1 + 3(-2) = -7$,то есть $P(1;4;-7)$.

3.Используя формулу расстояния от точки P до плоскости α_2, находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 7 - 8|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 5/3.$$

Ответ: искомая плоскость $-7x + 4y + 6z + 33 = 0$, а расстояние от основания перпендикуляра AP на плоскость α_1 до плоскости α_2 равно 5/3.

IV. ***Четвертое задание предлагает изобразить тело, ограниченное заданными поверхностями второго порядка и плоскостями.***

Решим конкретную задачу.

Задача 4. Нарисовать тело, ограниченное указанными поверхностями. Указать тип поверхностей, ограничивающих данное тело:

$$x^2 + y^2 = 4\ (0 \le y \le 4),\ y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2},\ y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Решение. В плоскости Oxz уравнение $x^2 + z^2 = 4$ задает окружность радиуса 2 с центром в начале координат. В пространстве этому уравнению соответствует цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны Oy, а направляющей служит вышеупомянутая окружность. Неравенство $0 \le y \le 4$ указывает, что берется часть этой поверхности, ограниченная плоскостями $y = 0$ и $y = 4$.

Рассмотрим уравнение $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$. Возведя в квадрат левую и правую части, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Это сфера радиуса $r = 2$ с центром в начале координат. Значит, уравнение $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$ задает левую половину сферы.

Наконец, уравнение $y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}$ преобразуем так:
$(y - 6)^2 = (-\sqrt{x^2 + z^2})^2$.

Будет $x^2 + z^2 = (y - 6)^2$ - это конус с вершиной в точке $M(0;6;0)$, вытянутый вдоль оси Oy.

Уравнение $y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}$ задает левую его часть.

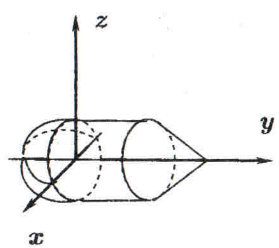

Рис.3

А теперь только остается нарисовать тело, ограниченное рассмотренными поверхностями (рис.3).

V. ***В пятом задании требуется решить линейную неоднородную систему.***

Задача 5. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 14 \end{cases}$$

Решение.Обозначим через A и A^r основную и расширенную матрицы системы соответственно.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^r = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 & 14 \end{array}\right).$$

Сначала надо определить, имеет ли эта система решения и сколько. Для этого возьмем расширенную матрицу A^r и элементарными преобразованиями строк (только!) приведем ее к трапециевидной форме:

$$A^r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{A}^r.$$

При этом матрица A перейдет в $\tilde{A}$.

Отсюда $rangA = rangA^r = 3$. Обозначим $rangA$ через r.Так как ранги A и A^r совпадают, то система имеет бесконечное множество решений.

Решение неоднородной системы в этом случае может быть получено как сумма общего решения соответствующей однородной и какого-либо решения неоднородной. Общее решение однородной системы представляет из себя линейную комбинацию фундаментальной системы решений, которая состоит из $m - r$ векторов, что в нашем примере равно двум.

Чтобы найти решения однородной системы, запишем сначала эквивалентную ей систему с матрицей $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ -4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

За базисный минор возьмем минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы A, то есть минор, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3. Тогда, придавая оставшимся переменным (x_4, x_5) любые значения, неизвестные x_1, x_2, x_3 можно получить единственным образом. Чтобы найти фундаментальную систему, надо перебрать всевозможные наборы свободных переменных, такие, что в каждом наборе одна переменная равна 1, а остальные 0.

Взяв $x_4 = 1, x_5 = 0$ из системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -2 \\ -4x_3 = 3 \end{cases}$$

получим $x_3 = -3/4,\ x_2 = -2,\ x_1 = -1/4$ и вектор решений $X_1 = (-1/4, -2, -3/4, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Затем, аналогично, взяв $x_4 = 0, x_5 = 1$, получим $X_2 = (-1/4, 0, -3/4, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

Общее решение однородной системы имеет вид $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2$, где c_1 и c_2 - произвольные числа.

Теперь найдем какое-либо решение неоднородной системы. Система, соответствующая матрице A^r, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 14 \\ -4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -68 \end{cases}$$

и эквивалентна данной. Из соображений, указанных выше, положим $x_4 = x_5 = 0$. Тогда $x_3 = 17, x_2 = 14, x_1 = 2 \cdot 14 - 17 = 11$, и вектор решений $Z = (11, 14, 17, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, общее решение системы будет иметь вид $X = Y + Z$ или

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2 \\ -3/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

VI. ***Рассмотрим теперь задачи шестого типа, где предлагается привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм.***

Рассмотрим общее уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 +$$
$$+2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0,$$

которое только при специально выбранной системе координат будет являться каноническим (простейшим) уравнением поверхности рассмотренного выше вида.

Выпишем отдельно слагаемые второго порядка относительно координат x, y, z. Они образуют так называемую квадратичную форму $\Phi(x,y,z)$, которую можно записать так:

$$\Phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz +$$
$$+a_{21}yx + a_{22}y^2 + a_{23}yz +$$
$$+a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2.$$

(здесь $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,2,3$).

Матрица этой квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

нетрудно заметить, что она симметричная, то есть является матрицей самосопряженного оператора А. Если ввести в рассмотрение матрицу-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то квадратичную форму $\Phi(x,y,z)$ в матричном виде можно записать так: $\Phi(x,y,z) = X^{\mathrm{T}} A X$. С помощью ортогонального преобразования $X = TX'$, которому с геометрической точки зрения в общем случае соответствует поворот координатных осей и, может быть, изменение их направления, приведем квадратичную форму к простейшему (каноническому) виду

$$\Phi(x', y', z') = (X')^{\mathrm{T}} A' X'.$$

Матрица A' имеет диагональный вид, по главной диагонали ее стоят собственные числа матрицы $A: \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. В координатной форме канонический вид квадратичной формы записывается так:

$$\Phi'(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Столбцы ортогональной матрицы преобразования формируются из координат единичных собственных векторов матрицы $A: \Gamma_1^0, \Gamma_2^0, \Gamma_3^0$.

Таким образом, задача свелась к нахождению собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и соответствующих им единичных собственных векторов матрицы A. Для нахождения собственного вектора

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

имеем уравнение $A\Gamma = \lambda\Gamma$ или $(A - \lambda E)\Gamma = 0$. Обозначим $\tilde{A} = A - \lambda E$.

В координатной форме оно имеет вид

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

найдя его корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и подставляя по очереди $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3$ в систему (2), найдем три ненулевых решения этой системы, то есть три собственных вектора.

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \Gamma_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Пронормировав, то есть разделив координаты каждого вектора на его длину $|\Gamma| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, найдем три единичных собственных вектора $\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, \Gamma_3^0$. Записав координаты этих векторов в качестве столбцов, построим матрицу преобразования T. Заметим, что преобразованию с матрицей T будет соответствовать правая система координат, если $\det \mathrm{T} = 1$, чего нетрудно добиться, переставляя векторы Γ_i^0.

В координатной форме преобразование $X = TX'$ запишется так:

$$x = t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z',$$
$$y = t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z',$$
$$z = t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z'.$$

В результате уравнение поверхности второго порядка приняло вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1' x' + 2b_2' y' + 2b_3' z' + c' = 0.$$

Осуществив преобразование параллельного переноса, как это делалось и для кривых второго порядка, по формулам

$$x' = x_0 + X,$$
$$y' = y_0 + Y,$$
$$z' = x_0 + Z.$$

приведем уравнение поверхности к каноническому виду. По каноническому виду нетрудно определить тип поверхности и сделать его схематический рисунок.

Задача 6. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $2xz - 3y^2 = 0$ с помощью теории квадратичных форм. Сделать рисунок.

Решение. Напишем уравнение этой поверхности в общем виде, выписывая и коэффициенты, равные нулю:

$$0x^2 + 0xy + 1xz +$$
$$+0yx - 3y^2 + 0yz +$$
$$+1zx + 0xy + 0z^2 = 0.$$

Теперь нетрудно записать и матрицу этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

или $(3 + \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$.

Его корни, очевидно, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$.

Найдем соответствующие им единичные собственные векторы Γ_1^0, Γ_2^0, Γ_3^0. Решим систему

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=0.$$

Подставляем по очереди $\lambda=\lambda_1=1,\ \lambda=\lambda_2=-3,\ \lambda=\lambda_3=-1$.
При $\lambda=1$ имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}=0.$$

Элементарными преобразованиями приводим матрицу системы к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$rangA=2$, следовательно система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от параметра.

Возьмем γ_1 за параметр, тогда $\alpha_1=\gamma_1, \beta_1=0$.
Полагаем $\gamma_1=1$, тогда

$$\Gamma_1=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ При $\lambda=-3$ имеем $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}=0.$$

Матрицу A приводим к виду

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$rangA=2,\ \alpha_2=\gamma_2=0,\ \beta_2$-параметр.
Полагаем $\beta_2=1$, следовательно

$$\Gamma_2=\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda=-1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}=0,$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\square\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$rangA=2,\ \alpha_3=-\gamma_3,\ \beta_3=0, \gamma_3$-параметр.
Полагая $\gamma_3=1$, получаем

$$\Gamma_3=\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируем собственные векторы. $|\Gamma_1|=\sqrt{2}$, откуда

$$\Gamma_1^0=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$|\Gamma_2|=1$ и значит,

$$\Gamma_2^0=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$|\Gamma_3|=\sqrt{2}$, и

$$\Gamma_3^0=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Формируем матрицу преобразования T, беря в качестве ее столбцов собственные векторы $\Gamma_1^0,\ \Gamma_2^0,\ \Gamma_3^0$.

Получаем

$$T=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\det \mathrm{T} = +1$, то есть система $0x'y'z'$ будет правой системой координат. Итак, имеем преобразование $X = TX'$. В координатной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} = x'\sqrt{2} - z'\sqrt{2} \\ y = y' \qquad (*) \\ = x'/\sqrt{2} + z'/\sqrt{2} \end{array}$$

Если принять во внимание формулы преобразования при повороте координатных осей

$$x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha.$$
$$z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha.$$

то нетрудно видеть, что преобразованию (*) соответствует поворот координатных осей Ox, Oz вокруг оси Oy на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Заметим, что y при этом преобразовании не меняется. Очевидно, что $\sin\alpha = \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, то есть $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Относительно новых осей квадратичная форма $\Phi'\left(x', y', z'\right) = X'^{\mathrm{T}} A' X'$. Нетрудно найти матрицу квадратичной формы в новом базисе: $A' = T^{\mathrm{T}} A T$. Имеем

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение поверхности относительно нового базиса:

$$x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 0.$$

Ясно, что это конус, вытянутый вдоль оси $0x'$, с вершиной в начале координат. Так как уравнение не содержит линейных относительно x', y' и z' слагаемых, то параллельного переноса не требуется (рис.4).

Оси Ox', Oz' лежат в плоскости zOx

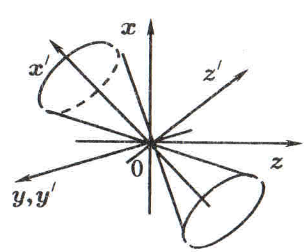

Рис.4

Расчетные задания

I

1. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 2$ с прямой $x + y - 2 = 0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}25$.

3. Написать уравнение такой окружности, чтобы ее диаметром оказался отрезок прямой $x + y = 4$, заключенный между осями координат.

4. Большая ось эллипса втрое больше его малой оси. Составить каноническое уравнение этого эллипса, если он проходит через точку $M\left(3, \sqrt{3}\right)$.

5. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4,6)$ и имеющего фокусы, которые совпадают с фокусами данной гиперболы.

6. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 8x$ с эллипсом, у которого правый фокус совпадает с фокусом этой параболы, большая полуось равна 4 и фокусы лежат на оси $0x$.

7. Фокусы гиперболы лежат в точках $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ и $F_2(\sqrt{7}, 0)$. Гипербола проходит через точку $A(2,0)$. Найти уравнения ее асимптот.

8. Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

9. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 4x$ с прямой, проходящей через фокус этой параболы параллельно ее директрисе.

10. Через правый фокус гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Определить точки пересечения этих прямых с гиперболой.

11. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой совпадает с фокусом параболы $y^2 = 8x$.

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

13. Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса

совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

14. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3,-1)$, и ее действительная ось лежит на оси $0x$, а центр - в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2+y^2=10$.

15. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а осью симметрии является ось $0x$, если известно, что расстояние от ее фокуса до центра окружности $x^2+y^2-10x-8y+25=0$ равно 5.

16. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2-y^2=8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2=12x$ с гиперболой $8x^2-y^2=8$.

17. Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.

18. Найти точки пересечения параболы $y^2=x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси $0x$ и радиус, равный 5.

19.Составить уравнение эллипса, если его фокусы совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, а эксцентриситет эллипса равен 3/5.

20. Окружность имеет центр в левой вершине гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ и радиус, равный вещественной полуоси этой гиперболы. Найти точки пересечения этой окружности с асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$.

21. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon=3/2$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$.

22. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x+y=4$, вырезанной параболой $y^2=2x$.

23. Найти расстояние от фокуса параболы $y=\frac{1}{8}x^2$ до прямой $3x+4y+2=0$.

24. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M(3,0)$ и $N(-1,2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $x-y+2=0$.

25. Вычислить расстояние от центра окружности $x^2+y^2=10x$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

26. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.

27. В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

28. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5,0)$ и $B(1,4)$, если центр ее лежит на прямой $x+y=3$.

29. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0,8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.

30. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\sqrt{40},2\right)$ и имеющей асимптоты $y=\pm\frac{1}{3}x$.

II

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

1. $3x^2-4xy+4=0$
2. $13x^2-10xy+13y^2+18\sqrt{2}x-54=0$
3. $x^2+2xy+y^2-2x-2y-4=0$
4. $x^2+4xy+y^2+6x+6y-6=0$
5. $3x^2+10xy+3y^2-24\sqrt{2}x-24\sqrt{2}y+64=0$
6. $x^2+xy+y^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-1=0$
7. $2xy-4x-2y+3=0$
8. $4xy+3y^2-4y-36=0$
9. $5x^2+4xy+8y^2-36=0$
10. $x^2-2xy+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-4=0$
11. $3x^2+6xy+3y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-20=0$
12. $4x^2+24xy+11y^2-24x-2y-19=0$
13. $4x^2-8xy+4y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0$
14. $4xy+3y^2-4x-6y-33=0$
15. $3x^2-4xy+3y^2+6x-4y-2=0$
16. $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2+48\sqrt{3}x-48y+144=0$

17. $x^2-2xy+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+8=0$
18. $5x^2+8xy+5y^2-20x-16y+11=0$
19. $3x^2+10xy+3y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+6=0$
20. $5x^2+8xy+5y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0$
21. $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-10x-2\sqrt{3}y-7=0$
22. $5x^2+6xy+5y^2-8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y=0$
23. $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x-6y-9=0$
24. $7x^2-48xy-7y^2+40x-30y-75=0$
25. $5x^2+8xy+5y^2-8x-10y-4=0$
26. $18x^2+48xy+32y^2-20x+15y-100=0$
27. $5x^2+8xy+5y^2-20x-16y+11=0$
28. $5x^2+8xy+5y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0$
29. $4x^2+8xy+4y^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+4=0$
30. $x^2+3xy-3y^2+7x-14=0$

III

1.Составить уравнения проекции прямой
$$\begin{cases}5x-4y-2z=2\\ x+2z-2=0\end{cases}$$
на плоскость $2x-y+z=1$.

2.Вычислить расстояние между двумя прямыми: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ и $\begin{cases}2x-y=2\\ y+2z=-2\end{cases}$, предварительно убедившись в их параллельности.

3. Проверить, лежат ли в одной плоскости прямые: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ и $x=3t+7,\ y=2t+2,\ z=-2t+1$. Если "да", то составить уравнение этой плоскости.

4. Найти расстояние от точки $M(1,2,-2)$ до плоскости, проходящей через две прямые $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+4}{1}$ и $x=2t, y=5+2t, z=-5+t$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$x=0, y+z=1$

и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом 6ед^3.

6. Убедившись, что прямые параллельны, найти расстояние между ними: $x=t+5,\ y=2t-1,\ z=3t-2$ и $\begin{cases}x+y-z=3\\ x-2y+z=-11\end{cases}$.

7. Принадлежат ли две прямые
$$\begin{cases}2x+y-2z=4\\ x-2y+z=-5\end{cases},\quad \begin{cases}x=t\\ y=2t+2\\ z=3t-1\end{cases}$$
одной плоскости? Если "да",то написать уравнение этой плоскости.

8. Через две точки $A(2,3,-1)$ и $B(1,1,1)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $2x+4y-3z=3$.

9. Найти проекцию точки $M(3,4,-5)$ на прямую $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{8-z}{4}$.

10. Проверить, лежат ли прямые
$$\begin{cases}8x+y-8z=0\\ y-4z=4\end{cases},\quad \begin{cases}x=t-11\\ y=8t+16\\ z=2t-19\end{cases}$$
в одной плоскости? Если "да", то составить уравнение этой плоскости.

11. Даны вершины треугольника $A(3,6,2)$, $B(-1,3,2)$, $C(9,6,-6)$. Найти канонические уравнения его биссектрисы, проведенной из угла А. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника АВС и содержащей указанную биссектрису.

12. Убедившись, что данная плоскость $x+y-3z=10$ параллельна плоскости, проходящей через три точки $A(5,4,3)$, $B(1,2,1)$, $C(3,6,3)$, найти расстояние между ними.

13. Составить уравнение проекции прямой $x=-t+4,\ y=t-3,\ z=3t-1$ на плоскость $2x+4y-3z=-1$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\begin{cases}3x+y-3z=-19\\ 2y-3z=-26\end{cases}$$
перпендикулярно к плоскости $4x-3y+5z=46$.

15. Даны вершины треугольника: $A(3,0,1)$, $B(1,3,-2)$, $C(7,-1,-2)$. Найти параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины А. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника АВС и содержащей указанную медиану.

16. Доказать, что данная плоскость $3x-2y+z=8$ параллельна плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{1}$ и точку $M(1,-1,-1)$. Найти расстояние между этими плоскостями.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$ и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом $V=4\,\text{ед}^3$.

18. Найти проекцию точки $M(-2,1,0)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A(1,0,-1)$, $B(3,1,-2)$, $C(2,4,-5)$.

19. Доказать перпендикулярность прямых:

$$l_1:\begin{cases}x+y-3z-1=0\\2x-y-9z-2=0\end{cases},\quad l_2:\begin{cases}2x+y+2z+5=0\\2x-2y-z+2=0\end{cases}.$$

Написать уравнение плоскости, содержащей l_1 и перпендикулярной к l_2.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,-3,1)$ и отсекающей от координатных осей равные отрезки. Написать канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

22. Найти расстояние от точки $N(-3,4,-5)$ до плоскости, содержащей в себе прямую $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$ и точку $M\ (1,2,0)$.

23. Найти уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$ и $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{3}$.

24. Проверить, являются ли две прямые $\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{x-1}{5}$ и $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{-1}$ скрещивающимися. Если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые.

25. Найти проекцию точки $M\ (-3,1,2)$ на прямую

$$\begin{cases}2x+4y-2z=1\\x-3y+z=2.\end{cases}$$

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases}3x+8y-4z=5\\x-8y+3z=5\end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $x+5y-z=1$.

27. Составить уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ на плоскость $x+4y=8$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=1+t$, $y=-1+2t$, $z=2+4t$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

29. Найти проекцию точки $M\ (1,2,0)$ на прямую $x=2t-1,\ y=t-4,\ z=-3t+1$.

30. Проверить, будут ли прямые

$$x=t-1,\ y=-t+3,\ z=4t-5 \text{ и } \begin{cases}2x-3y+z=5\\x+y-5z=4\end{cases}$$

скрещивающимися. Если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые.

IV

Изобразить тело, ограниченное данными поверхностями. Указать тип поверхностей, ограничивающих тело.

1. a) $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}-2$
   b) $y=x^2+z^2,\ y=4$
2. a) $z=x^2+y^2,\ z=4$
   b) $y=-\sqrt{4-x^2-z^2}, y=0$
3. a) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=4$
   b) $x^2+z^2=4\ (0\le y\le 4),\ y=-\sqrt{4-x^2-z^2},\ y=4$
4. a) $x^2+y^2=4,\ z=2-y,\ z=0$
   b) $y^2=x^2+z^2,\ y=-2,\ y=4$
5. a) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=y\ (z\le y)$
   b) $y=2\sqrt{x^2+z^2},\ y=4$
6. a) $z^2=x^2+y^2,\ z=-2,\ z=4$
   b) $x^2+z^2=4,\ y=\sqrt{4-x^2-z^2},\ y=-4$

7. а) $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad z=-2\sqrt{x^2+y^2}+4$

б) $y=x^2+z^2-4, \ y=0$

8. а) $z=x^2+y^2-4, \ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

б) $x^2+z^2=4, \ z=6-y, \ y=0$

9. а) $x^2+y^2=4, \ z-y=4, \ z=0$

б) $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, \ z=4-x^2-y^2$

10. а) $z=4-\sqrt{x^2+y^2}, \ z=0$

б) $x^2+z^2=1, \ z=1-y, \ y=0$

11. а) $x^2+y^2=4, \ z=y+2, \ z=0$

б) $y=-2\sqrt{x^2+z^2}, \ y=-4-\sqrt{4-x^2-z^2}$

12. а) $z=x^2+y^2, \ z=8-2\sqrt{x^2+y^2}$

б) $y=2-\sqrt{x^2+z^2}, \ y=-\sqrt{4-x^2-z^2}$

13. а) $x^2+y^2-z=0, \ z=2-y$

б) $x^2+z^2=4, \ z+y=4, \ y=0$

14. а) $z=\sqrt{x^2+y^2}, \ z=2-\sqrt{x^2+y^2}$

б) $x^2+z^2=4, \ y=x^2+z^2-4, \ y=3$

15. а) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \ z=\sqrt{x^2+y^2}-2$

б) $x^2+y^2-z^2=0, \ z=\pm 4$

16. а) $z=\sqrt{x^2+y^2}, \ z=6-x^2-y^2$

б) $x^2+z^2=4, \ z=2+y, \ y=2-z$

17. а) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \ z=x^2+y^2-4, \ y=0 \ (y\le 0)$

б) $x^2+z^2=4, \ y=2-\sqrt{x^2+z^2}, \ y=-4$

18. а) $x^2+y^2=4, \ z=8-x^2-y^2, \ z=0$

б) $x^2+z^2=4, \ z=4+y, \ y=0$

19. а) $z=x^2+y^2-8, \ z=-2\sqrt{x^2+y^2}$

б) $x^2+z^2=4, \ y=\sqrt{x^2+z^2}-2, \ y=2$

20. а) $z=x^2+y^2, \ z=2-x^2-y^2$

б) $y=2\sqrt{x^2+z^2}-4, \ y=\sqrt{4-x^2-z^2}$

21. а) $z=4-x^2-y^2, \ z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$

б) $x^2+z^2=4, \ z=-y, \ z=y+4$

22. а) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \ z=\sqrt{x^2+y^2}-2$

б) $x^2+z^2=4, \ y=4-x^2-z^2, \ y=-4$

23. а) $2y=x^2+z^2+y^2, \ y+z=1 \ (z\le 1-y)$

б) $y=x^2+z^2-4, \ y=\sqrt{4-x^2-z^2}$

24. а) $x^2+y^2=4, \ z=\sqrt{4-x^2-y^2}+4, \ z=0$

б) $y=-\sqrt{4-x^2-z^2}, \ y=-\sqrt{x^2+z^2}+2$

25. а) $z=2-\sqrt{x^2+y^2}, \ z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$

б) $x^2+z^2=4, \ z=y+6, \ y=6$

26. а) $z^2=x^2+y^2, \ z=2, \ z=4$

б) $x^2+z^2=4, \ y=-\sqrt{4-x^2-z^2}, \ y=4$

27. а) $z=4-x^2-y^2, \ z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$

б) $x^2+y^2=1, \ z=\sqrt{1-x^2-y^2}+2, \ z=0$

28. а) $z=x^2+y^2, \ z=2-\sqrt{x^2+y^2}$

б) $y^2=x^2+z^2, \ y=-4, \ y=2$

29. а) $x^2+y^2=4, \ z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, \ z=4$

б) $y=-2+\sqrt{x^2+z^2}, \ y=\sqrt{4-x^2-z^2}$

30. а) $z=4-x^2-y^2, \ z=\sqrt{x^2+y^2}-2$

б) $y=\sqrt{9-x^2-z^2}+3, \ x^2+z^2=9, \ y=0$

V

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-2x_4+x_5=0\\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=-9\\ 2x_1-2x_2+2x_3-2x_4+x_5=4\\ x_1+x_3=4\\ 4x_1-6x_2+4x_3-6x_4+3x_5=4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=3\\ 2x_1-x_2-2x_3-x_4=-1\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_5=0\\ x_1+5x_2+3x_3+x_4+2x_5=1\\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4+3x_5=-3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4+3x_5=2\\ x_1-2x_2-x_3+2x_4-x_5=3\\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_4+x_5=9\\ 2x_1+x_2+3x_3-4x_4+2x_5=6\\ 4x_1+x_2+4x_3-3x_4+4x_5=11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=-1\\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=1\\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4-x_5=0\\ x_1-4x_2+x_3+2x_4-3x_5=-1\\ 2x_1-3x_2+2x_3+4x_4-2x_5=-2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5=0\\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5=1\\ x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5=3\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4-3x_5=-2\\ 3x_1+3x_2-x_4+3x_5=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=4\\ 2x_1-x_2+2x_3+x_5=-2\\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=-2\\ x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5=0\\ 2x_1-2x_2-x_4+x_5=-6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=1\\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4-x_5=8\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4-2x_5=2\\ 3x_1+3x_2+2x_3+2x_4-x_5=3\\ 2x_1-3x_2-2x_3+3x_4+2x_5=7 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=2\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=1\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4+x_5=-6\\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=-8\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4+2x_5=-7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=0\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-3\\ -2x_1+2x_2+x_3+2x_4-x_5=3\\ 3x_1-4x_2-3x_4=-6\\ 5x_1-5x_2-x_3-2x_4+x_5=-6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=4\\ 2x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5=11\\ x_1-3x_2+x_3-x_4+x_5=2\\ 2x_1-4x_2+2x_3-2x_4+3x_5=6\\ x_1+4x_2-4x_3+3x_4-2x_5=9 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-x_4+x_5=3\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=-1\\ x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=-3\\ 2x_1-2x_2+4x_3-2x_4-3x_5=2\\ 2x_1+4x_2+3x_5=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4-x_5=1\\ 3x_1+2x_2-5x_3+2x_4-x_5=6\\ x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=4\\ 5x_1-4x_3+2x_4=11\\ 2x_1+3x_2-7x_3+3x_4-3x_5=2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=3\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_5=0\\ 3x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=4\\ x_1-4x_2-x_4=4\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4=7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4+2x_5=6\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5=3\\ 4x_1+x_2-2x_3+x_5=-3\\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4-x_5=-9\\ 2x_1+2x_2-4x_3+x_4+2x_5=-6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5=6\\ 5x_1-x_2+10x_3+x_4=15\\ 2x_1+3x_3-x_5=7\\ x_1-x_2+4x_3+x_4+2x_5=1\\ 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4-2x_5=13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+2x_4-x_5=1\\ x_1-x_2+3x_3-x_4+x_5=2\\ 2x_1+2x_2-3x_3+x_4=5\\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4-x_5=3\\ 2x_1+3x_2-4x_3+x_5=9 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=-3\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0\\ x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=3\\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4=-7\\ x_1-3x_2+2x_4-x_5=-7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-2x_4+x_5=2\\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=4\\ -x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=2\\ x_1+5x_2+4x_3-5x_4+3x_5=6\\ 2x_1+4x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+x_4-2x_5=1\\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=11\\ 3x_1+x_2-3x_3+3x_4-x_5=12\\ 3x_1-x_2+x_3+3x_4+x_5=24\\ x_1-3x_2+2x_3+x_4=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4-2x_5+x_6=-2\\ 5x_1-2x_2+2x_3-x_4+x_5=15\\ x_1-x_2+5x_3+2x_4-x_5+2x_6=18\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4+3x_5-x_6=17 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=1\\ 4x_1-x_2-4x_3+x_4+x_5=4\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=11\\ 2x_1-2x_2-5x_3+2x_4+x_5=-7\\ 2x_1+4x_2+7x_3-4x_4-x_5=29 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4-x_5=4\\ 3x_1-x_2-3x_3+x_4-x_5=0\\ 4x_1+3x_2-3x_3-x_5=1\\ x_1+4x_2-x_4=1\\ 3x_1+x_2-6x_3+x_4=-3 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = -1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = -3 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -4 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 12 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$

VI

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Сделать рисунок.

1. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 = 0$
2. $x^2 + 4xy + y^2 + 2z^2 - 6 = 0$
3. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 = 0$
4. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 12 = 0$
5. $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 = 0$
6. $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0$
7. $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2z^2 - 50 = 0$
8. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2z^2 = 0$

9. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2z^2 - 100 = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 = 0$
11. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 - 12 = 0$
12. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 12 = 0$
13. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 = 0$
14. $3x^2 - 2yz = 0$
15. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 - 15 = 0$
16. $2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$
17. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 0$
18. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$
19. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz + 36 = 0$
20. $2x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 - 1 = 0$
21. $2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 + 1 = 0$
22. $2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 - 12 = 0$
23. $x^2 - y^2 - yz - z^2 = 0$
24. $x^2 - 3y^2 - 2yz - 3z^2 - 1 = 0$
25. $x^2 + 3y^2 + 2yz - 3z^2 + 1 = 0$
26. $3x^2 - 3y^2 - 2yz - 3z^2 = 0$
27. $2x^2 - 3y^2 - 2yz - 3z^2 - 1 = 0$
28. $-x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 10 = 0$
29. $x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 - 10 = 0$
30. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 = 0$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
"ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ"

Методические указания

Типовой расчет содержит пять заданий.

I. При выполнении первого задания следует провести полное исследование предложенной функции, а затем построить ее график. Исследование функции рекомендуется проводить по такой схеме:
1.Определить область существования функции.
2.Выяснить,является ли данная функция четной или нечетной.
3.Найти точки, подозрительные на экстремум, и выяснить их характер с помощью первой или второй производной. Вычислить экстремумы.
4.Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба.
5.Найти асимптоты (наклонные, вертикальные и горизонтальные).
6.Найти точки пересечения графика функции с координатными осями и вычислить значение функции в нескольких контрольных точках.
7.Построить график функции.

Задача 1. Исследовать функцию $y = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$. Построить ее график.

Решение.

1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm 2$.

2. Функция нечетная, поэтому достаточно исследовать функцию только для $x \ge 0$. Ее график симметричен относительно начала координат.

3. Первая производная $y' = \dfrac{2x^2\left(x^2-12\right)}{(x^2-4)^2}$ на промежутке $[0,+\infty)$ обращается в нуль только для $x_1 = 0$ и $x_2 = 2\sqrt{3} \approx 3.46$. В точке x_1 первая производная не меняет своего знака, то есть экстремума в точке x_1 функция не имеет. В точке x_2 производная меняет знак с минуса на плюс, то есть в точке x_2 функция имеет минимум, $y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. Острых экстремумов нет, так как знаменатель производной равен нулю только в тех точках, где функция не определена.

4. Вторая производная $y'' = \dfrac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ обращается в нуль только в точке $x = 0$, которая является точкой перегиба. При $0 \le x \le 2$ $y'' < 0$, то есть выпуклость графика вверх, а при $2 < x < \infty$ $y'' > 0$, то есть выпуклость графика вниз.

5. Так как при $x \to 2$ $|y(x)| \to \infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Ищем уравнение $y = k \cdot x + b$ наклонной асимптоты :

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{(x^2-4)} = 2,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right] = 0.$$

График функции имеет правую наклонную асимптоту $y = 2x$. Напоминаем, что график функции симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная.

6. Точки пересечения графика с осями координат: $x = 0,\ y = 0$ (рис.5).

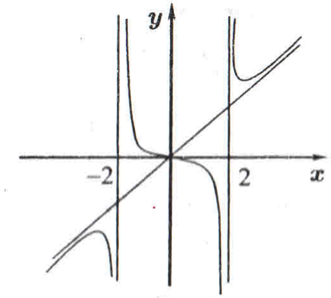

Рис. 5

II. ***Второе задание: решить задачу на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции одной переменной на отрезке*** $[a,b]$.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее(наименьшее).

Задача 2. Найти такой цилиндр, который бы имел наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота равна h.Тогда $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h$,то есть $h = \dfrac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}$. Следовательно, объем цилиндра $V = V(x) = S_{\text{осн}} h = \pi x^2 h = \pi x^2 \dfrac{S-2\pi x^2}{2\pi x} = \dfrac{S}{2}x - \pi x^3$. Задача сводится к исследованию функции $V(x)$ на наибольшее значение на отрезке $\left[0; \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}\right]$. Найдем значение функции на концах отрезка:

$V(0)=V(\sqrt{\frac{S}{2\pi}})=0$. Так как объем – величина неотрицательная, то, очевидно, функция достигает максимума внутри интервала. Найдем $\frac{dV}{dx}=\frac{S}{2}-3\pi x^2$ и приравняем ее нулю, откуда $x=\pm\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Так как $x>0$, то нас интересует только $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. В точке $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ объем имеет наибольшее значение, причем $h=\frac{S-2\pi S/6\pi}{2\pi\sqrt{S/6\pi}}=2x$, то есть осевое сечение цилиндра – квадрат.

Ответ: $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

III. ***В задаче третьего типа предлагается написать общее уравнение*** $Ax+By+Cz+D=0$ ***плоскости*** π, ***касательной к поверхности*** S ***в точке*** $M_0=M(x_0,y_0,z_0)\in S$. Поверхность S задана неявно $F(x,y,z)=0$ и точка M_0 фиксирована.

В том случае, если поверхность задана неявно, имеем для коэффициентов A,B,C:

$$A=\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0},\quad B=\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0},$$

$C=\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}$, $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, где, например,

$\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right|_{M_0}$ - значение частной производной от функции $F(x,y,z)$ по переменной x, вычисленное в точке M_0.

Задача 3.

$$\frac{\sin(\pi x/2y)}{\sqrt{y^2+z^3}}-\frac{\cos(\pi(z/x))}{\sqrt{z^3+z^4}}=0,\ M_0\,(1,1,1)$$

Здесь $F(x,y,z)=\frac{\sin(\pi x/2y)}{\sqrt{y^2+z^3}}-\frac{\cos(\pi(z/x))}{\sqrt{z^3+z^4}}$. Таким образом,

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=\frac{(\pi/2y)\cos(\pi x/2y)}{\sqrt{y^2+z^3}}+\frac{\pi z\sin(\pi(z/x))}{\sqrt{z^3+z^4}},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=0$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=\frac{\cos(\pi x/2y)\left(\frac{-\pi x}{2y^2}\right)\sqrt{y^2+z^3}-\sin(\pi x/2y)\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^3}}}{\sqrt{y^2+z^3}},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{\sin(\pi x/2y)}{\left(y^2+z^3\right)^{3/2}}\cdot\frac{3}{2}z^2+\frac{\sin(\pi(z/x))\cdot\frac{\pi}{x}\cdot\sqrt{z^3+z^4}}{z^3+z^4}+$$

$$+\frac{\cos(\pi z/x)\left(3z^2+4z^3\right)}{2\left(z^3+z^4\right)^{3/2}},\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Таким образом, $A=0$, $B=-1/2$, $C=1/\sqrt{2}$, $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Окончательно, уравнение $-\frac{1}{2}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1-\sqrt{2}}{2}=0$ представляет собой общее уравнение плоскости, касательной к поверхности S в точке $(1,1,1)$.

Ответ: $-\frac{1}{2}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1-\sqrt{2}}{2}=0$

IV. ***В четвертом задании студентам предложено вычислить два предела функций:***

- в пункте (а) предполагается раскрытие неопределенности арифметического типа обычными методами (с использованием замены переменной, алгебраических преобразований, замечательных пределов, эквивалентных бесконечно малых), то есть без привлечения правила Лопиталя-Бернулли.
- в пункте (б) следует, преобразовав посредством применения основного логарифмического тождества степенно-показательную неопределенность в арифметическую, раскрывать последнюю с использованием правила Лопиталя.

Приведем решения типовых задач.

Задача 4,а. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$.

Решение. Очевидно, что следует раскрыть неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Сделав замену переменной $x = y + \dfrac{1}{2}$, добьемся того, чтобы новая переменная y стремилась к 0, что необходимо для использования известных эквивалентных бесконечно малых. При этом:

$\ln(4x-1) = \ln(4(y+0{,}5)-1) = \ln(1+4y)$;

$\cos\pi x = \cos\pi(y+0{,}5) = \sin\pi y$.

Обозначив искомый предел через L_1, получим:

$$L_1 = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+4y)}{(1+\sin\pi y)^{1/2}-1}.$$

Известно, что $\ln(1+z) \sim z$ при $z\to 0$.

Поэтому $\ln(1+4y)\sim 4y$ (так как при $y\to 0$ получим $4y\to 0$).

Кроме того, $(1+z)^k - 1 \sim kz$ при $z\to 0$.

Поэтому $(1+\sin\pi y)^{1/2} - 1 \sim \dfrac{1}{2}\sin\pi y$ (так как $\sin\pi y\to 0$ при $y\to 0$).

Итого: $L_1 = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{4y}{(1/2)\sin\pi y}$.

Учитывая, что $\sin\pi y \sim \pi y$ (так как при $y\to 0$ и $\pi y\to 0$), получаем окончательно: $L_1 = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{4y}{(1/2)\pi y} = \dfrac{8}{\pi}$

Ответ: $\dfrac{8}{\pi}$.

Задача 4,б. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 0} (2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}.$$

Решение. Здесь присутствует степенно-показательная неопределенность типа $\left[1^{\infty}\right]$. Обозначим искомый предел за L_2. Используя основное логарифмическое тождество $\exp(\ln a) = a$, имеем:

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}\right). \qquad (3)$$

Учитывая тот факт, что функция $y = \exp(x)$ является непрерывной на всей оси, в формуле (3) можно поменять местами знаки вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0}$ и вычисления показательной функции; то есть получить, что

$$L_2 = \exp(\lim_{x\to 0} \ln(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}) = \exp(A).$$

Вычислим предел A:

$$A = \lim_{x\to 0} \ln(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos 3x)}{\ln(1+x^2)}.$$

Здесь была использована формула логарифма степени. В последнем пределе неопределенность имеет тип $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, что позволяет применить для ее раскрытия правило Лопиталя:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(2-\cos 3x))'}{(\ln(1+x^2))'} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-\cos 3x)^{-1}\cdot \sin 3x \cdot 3}{(1+x^2)^{-1}\cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot 3\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(3\sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{2} = \frac{9\cdot\cos 0}{2} = \frac{9}{2}.$$

Здесь в процессе вычислений выражения $\dfrac{1}{2-\cos 3x}$ и $\dfrac{1}{1+x^2}$ были заменены на 1 (в соответствии с теоремами о конечных пределах). Окончательно: $L_2 = \exp(A) = \exp(4{,}5)$.

Ответ: $\exp(4{,}5)$.

V. ***В задаче пятого типа предлагается вычислить наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных в замкнутой ограниченной области.***

Наибольшее и наименьшее значение функция $u = f(M)$ может принимать не только в критических точках(то есть в стационарных точках, либо в точках, в которых хотя бы одна из частных производных первого порядка не существует),но и на границе замкнутой области.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений:

1. Находятся все критические точки функции.
2. Из всех критических точек выбираются те, которые находятся в исследуемой области.
3. Исследуется граница области.
4. Среди всех точек, подозрительных на экстремум, выбираются точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 - 2y^2 + 8y$ в области D, заданной неравенствами: $x^2 + y^2 \le 1$, $y - x \le 1$, $y \ge 0$.

Решение. Изобразим область:

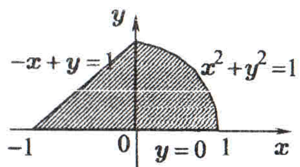

Рис. 6

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4y+8 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x^2 = 0 \\ -4y+8=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$.

2. Точка $M(0;2)$ не принадлежит области D.

3. Граница Γ области D состоит из трех гладких частей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где Γ_1, Γ_2 и Γ_3 заданы уравнениями :

$\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1$;

$\Gamma_2 : y - x = 1; \Gamma_3 : y = 0$.

3.1. На части Γ_1 границы Γ $x^2 = 1 - y^2$, следовательно на Γ_1 $z = 3(1-y^2) - 2y^2 + 8y = 3 - 5y^2 + 8y$, где $0 \le y \le 1$. Теперь встала задача нахождения наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной $z_1(y) = 3 - 5y^2 + 8y$ на промежутке $[0;1]$. Так как $z_1'(y) = -10y + 8$, то точка $y = 0{,}8$ является стационарной точкой функции $z_1(y)$, и эта точка принадлежит промежутку $[0;1]$.
Этому значению переменной y на Γ_1 соответствует значение $x = \sqrt{1-0.8^2} = 0{,}6$. Соответствующая точка - $M_1(0.6;0.8)$.

3.2. На части Γ_2 границы Γ $x = y - 1$, следовательно, на Γ_2 $z = 3(y-1)^2 - 2y^2 + 8y = y^2 + 2y + 3$, где $0 \le y \le 1$. Исследуем функцию $z_2(y) = y^2 + 2y + 3$ на промежутке $[0;1]$. Так как $z_2'(y) = 2y + 2$, то точка $y = -1$ является стационарной точкой функции $z_2(y)$, но эта точка не принадлежит промежутку $[0;1]$.

3.3. На части Γ_3 границы Γ $y = 0$, следовательно на Γ_3 $z = 3x^2$, где $-1 \le x \le 1$. Исследуем функцию $z_3(x) = 3x^3$ на промежутке $[-1;1]$.
Так как $z_3'(x) = 6x$, то точка $x = 0$ является стационарной точкой функции $z_3(x)$, и эта точка принадлежит промежутку $[-1;1]$. Соответствующая точка $M_3(0;0)$.

4. Таким образом, имеется всего пять точек, в которых нужно вычислить значения функции $z(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 8y$: $M_1(0,6;0,8)$;

$M_3(0;0)$; $M_4(1;0)$; $M_5(0;1)$; $M_6(-1;0)$. В результате вычислений получаем: $z_1 = z(0,6;0,8) = 6,2$; $z_3 = z(0;0) = 0$; $z_4 = z(1;0) = 3$; $z_5 = z(0;1) = 6$; $z_6 = z(-1;0) = 3$. Следовательно, $z_{\text{наим}} = z(0;0) = 0$, $z_{\text{наиб}} = z(0.6;0.8) = 6.2$.

***Ответ**:* $z_{\text{наим}} = 0$; $z_{\text{наиб}} = 6.2$.

Расчетные задания

I

Исследовать функцию и построить ее график.

1. а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, б) $y = 2arctgx + x$.

2. а) $y = 2 + (x^2(2-x))^{1/3}$, б) $y = \dfrac{1}{2} x e^{1/x}$.

3. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$, б) $y = x \ arctgx$.

4. а) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, б) $y = x + e^{-x}$.

5. а) $y = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, б) $y = 2x - e^{2x}$.

6. а) $y = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2 - 1}$, б) $y = 5(x+1) + e^{-5x}$.

7. а) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$, б) $y = (x+6)e^{1/x}$.

8. а) $y=\dfrac{x^2}{1-2x}$, б) $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

9. а) $y=2x^{5/3}-5x^{2/3}+1$, б) $y=e^{1/x}-x$.

10. а) $y=\left(x^3-2x^2\right)^{1/3}$, б) $y=\dfrac{e^x+1}{x+1}$.

11. а) $y=5+3(x-3)^{2/3}$, б) $y=x^3e^{-4x}$.

12. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y=3\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$, б) $y=x^2e^{1/x}$.

14. а) $y=\dfrac{3x^3}{3x^2+4x+4}$, б) $y=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

15. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, б) $y=xe^{-x}$.

16. а) $y=\dfrac{x^2+5}{x+2}$, б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

17. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$, б) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

18. а) $y=\dfrac{2}{3}x+(x+2)^{2/3}$, б) $y=\dfrac{3}{x}\ln\dfrac{x}{3}$.

19. а) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$, б) $y=3xe^x$.

20. а) $y=x-\dfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}$, б) $y=x^3e^{x}$.

21. а) $y=(x+1)^3x^{2/3}$, б) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$.

22. а) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$, б) $y=2x+e^{-2x}$.

23. а) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, б) $y=(x+2)e^{1/x}$.

24. а) $y=\left(x^3-3x\right)^{1/3}$, б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

25. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$, б) $y=5x-e^{5x}$.

26. а) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, б) $y=(x+2)e^{1/x}$.

27. а) $y=(x^2(6-x))^{1/3}$, б) $y=x+2\,\mathrm{arctg}\,x$.

28. а) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$, б) $y = x - 2arctgx$.

29. а) $y = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$, б) $y = x^{2/3}e^{-x}$.

30. а) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, б) $y = -3x - 7arctgx$.

II

1. Изготовить из жести ведро без крышки данного объема цилиндрической формы. Каковы должны быть высота цилиндра и радиус основания, чтобы на изготовление ведра ушло наименьшее количество материала ?

2. Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была бы наибольшей?

3. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения продольному сжатию пропорционально площади этого сечения. Определить размеры балки, вырезанной из круглого бревна с диаметром α так, чтобы ее сопротивление сжатию было наибольшим.

4. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

5. На странице книги печатный текст должен занимать S см^2.Верхние и нижние поля должны быть по a см., левое и правое - по b см. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

6. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом . Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

8. Найти основание и высоту равнобочной трапеции, которая при данной площади S имеет наименьший периметр. Угол при большем основании трапеции равен α.

9. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

10. Какова должна быть сторона основания правильной треугольной призмы данного объема V, чтобы полная поверхность призмы была бы наименьшей?

11. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

12. На верхнее основание прямого кругового цилиндра поставлен прямой конус с таким же основанием. Высота конуса равна радиусу основания. Сумма площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса равна 625 см^2. Когда объем тела, составленного цилиндром и конусом, будет максимальной?

13. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

14. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

15. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из оставшейся части круга свернута воронка. При каком значении угла α вместимость воронки будет наибольшей?

16. Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра α, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

17. Резервуар, открытый сверху имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его лужение пошло наименьшее количество материала, если он должен вместить 108 литров воды?

18. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема(плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать).

19. Из квадратного листа жести площадью 30 см^2 требуется сделать открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

20. На отрезке AB длины d, соединяющем два источника света A(a свечей) и B(b свечей), найти точку M наименьшей освещенности (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника).

21. Из полосы жести шириной 11см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого должно иметь форму равнобочной трапеции. Дно желоба имеет ширину 7см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

22. Найти отношение радиуса основания цилиндра к его высоте, при котором при данном объеме V цилиндр имеет наименьшую полную поверхность.

23. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах(радиус R и высота H)это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если его объем $V = 45\pi$ дм^3?

24. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

25. На оси $0y$ найти точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом, если $A(2;0)$ и $B(8;0)$.

26. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30^0 вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

27. В прямоугольной системе координат через точку $M(1;2)$ проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с Осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

28. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки $A(1;4)$ и $B(3;0)$. Найти на данном эллипсе третью точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была бы наибольшей.

29. Из круглого брезна диаметром α вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b, а высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность пропорциональна bh^2?

30. Требуется вырыть яму конической формы(воронку) с образующей, равной a м. При какой глубине объем воронки будет наибольшим?

III

Написать общее уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ плоскости π касательной к поверхности σ в указанной точке $\mathbf{M}_o$.

Поверхность задана неявно $F(x, y, z)=0$.

1. $\dfrac{\log_2(\sqrt{x}+y^7)}{\sqrt[3]{z}+\sqrt{xy^3}} - \dfrac{\log_2(\sqrt{z}+y^3)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{zy^2}} = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

2. $\dfrac{\log_3\left(\sqrt[3]{x}+y^6\right)}{\sqrt{z}+y\sqrt{x}} - \dfrac{\log_3(\sqrt[3]{z}+y^2)}{\sqrt{x}+y^{\frac{5}{3}}\sqrt{z}} = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

3. $\dfrac{\log_2\left(\dfrac{x}{z}+\sqrt[3]{y}\right)}{z+x} - \dfrac{\cos(z-y)}{\sqrt[3]{y}+x^2} = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

4. $\dfrac{\log_2\left(\dfrac{x^2}{z^2}+y^3\right)}{z+x} - \dfrac{\cos(z^2-y^2)}{y^3+x^3} = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

5. $\dfrac{\log_2\left(\dfrac{1}{xz^3}+\sqrt{y}\right)}{z^3+x^2} - \dfrac{\cos(z^3-y^2)}{\sqrt{y}+x} = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

6. $\dfrac{\log_2\left(zx^3+y\right)}{z^{-1}+x} - \dfrac{\cos(z-y)}{y+x^4} = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

7. $x\exp(\sqrt{x}yz^2) - y\exp(z\sqrt{y}x^2) = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

8. $\dfrac{\pi}{2}\cos\left(\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{z^4}}-y^2\right) - arcctg\left(x^5-\sqrt[3]{\dfrac{y^7}{z^8}}\right) = 0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

9. $\dfrac{\cos(\sqrt[3]{x}\cdot z)}{x+y+z} - \dfrac{\exp(y^2-y)}{\sqrt{x+y^2+z^3}} = 0$, $\mathbf{M}_o(0,1,2)$.

10. $\dfrac{\cos\sqrt{x-z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{yz}}}-\dfrac{\cos\sqrt{y-x}}{\sqrt{z+2\sqrt{yx}}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

11. $x^2\sqrt{y}\cdot\exp(xz)-z^2\cdot\sqrt{x}\exp(y\sqrt{z})=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

12. $\sqrt{x}\exp(\sqrt{yz^3})-\sqrt{y}\exp(z\sqrt{x})=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,0)$.

13. $x\sqrt{z}\exp(\sqrt{x}y^2)-zy\exp(\sqrt{z}x^2)=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

14. $\dfrac{\exp(\sqrt[3]{x^3/z^2})}{\sqrt[3]{y+z^4}}-\dfrac{\exp(\sqrt[4]{y^4/z^3})}{\sqrt[3]{x+z^3}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

15. $\dfrac{\exp(x/z)}{\sqrt{y^4+z^5}}-\dfrac{\exp(y/z)}{\sqrt{x^4+z^5}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

16. $\dfrac{2^{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt{z^3+x}}-\dfrac{2^{\sqrt[3]{z^2}+x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y^2}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

17. $\dfrac{3^{\cos(x\cdot y)}}{\sqrt{x+y^2}}-\dfrac{3^{\cos(yz)}}{\sqrt{z+y}}=0$, $\mathbf{M}_o(0,1,0)$.

18. $\dfrac{\cos(\sqrt{z}-\sqrt{x})}{\sqrt{2x+y^2z}}-\dfrac{\cos(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{2z+yx}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

19. $\dfrac{\exp(x/z)}{\sqrt[4]{x^2+z^3}}-\dfrac{\exp(y/z)}{\sqrt[4]{x^2+z^2}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

20. $\dfrac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\exp(\sqrt{y})}{\sqrt{z}+\sqrt{y}}-\dfrac{\exp(\sqrt{z})}{\sqrt{x}}=0$, $\mathbf{M}_o$ $(1,1,1)$.

21. $\dfrac{\exp(x/z)}{\sqrt[4]{y^3+z^2}}-\dfrac{\exp(y/z)}{\sqrt[4]{x^3+z^3}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

22. $\dfrac{\exp(x/z)}{\sqrt{y^3+z^4}}-\dfrac{\exp(y/z)}{\sqrt{x^3+z^5}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

23. $\dfrac{\exp(xz^{-3/4})}{\sqrt[3]{y^5+z^3}}-\dfrac{\exp(yz^{-2/3})}{\sqrt[3]{x^5+z^4}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

24. $x^5y^3\exp(\sqrt{xyz})-zx^3\exp\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

25. $\dfrac{\exp(x(y-z))}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{\exp(z(x-y))}{\sqrt{z+y}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

26. $\dfrac{\cos(\sqrt[3]{x}\cdot z)e^{y^2-y}}{\sqrt{x+y^2+z^3}}-\dfrac{1}{x+y+z}=0$, $\mathbf{M}_o(0,1,2)$.

27. $\cos\left(\dfrac{2^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{y}}}{z}\right)-\dfrac{z}{2x^2-y^2}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

28. $\dfrac{\cos(x^2-z\sqrt{y})}{1+\sqrt{z}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

29. $z\cos\left(\dfrac{\pi}{2}xy^2z^3\right)-y\sin\left(\pi(y^2-x^3)\right)=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

30. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi\sqrt[3]{x^5}}{4\sqrt[5]{y^3}}+\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{x}\right)}{\sqrt{y^3+z^2}}-\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{z}{x}}+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)}{\sqrt{y^2+x^5}}=0$, $\mathbf{M}_o(1,1,1)$.

IV

Вычислить пределы функций:

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\ln(1+x^{1/3})\right]^{x/\sin^4(x^{1/3})}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$. б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{1/(x^{1/3}-1)}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\exp(\sin x))^{ctg\pi x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{(4-x^2)}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})}$. б) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(x^{1/3}-2)}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$. б) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{ctg 2x/\sin 3x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg\pi x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\exp(x^2))^{(\ln(1+tg^2(\pi x/3)))^{-1}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{arctg^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\exp(tg 2x)-\exp(-\sin 2x)}{\sin x-1}$. б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{tg(\pi x/6)}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$. б) $\lim\limits_{x\to 1}(2\exp(x-1)-1)^{x/(x-1)}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1+\ln^2 x\right)^{1/3}-1}{1+\cos\pi x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\exp(\arcsin^2\sqrt{x}))^{3/x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\left(x^3-\pi^3\right)\sin 5x}{\exp(\sin^2 x)-1}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^2)}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$. б) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2 x)^{1/\ln(1+3x^2)}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\exp(\sin^2 6x)-\exp(\sin^2 3x)}{\log_3\cos 6x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/x^2}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+tg^2 3x)}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(5x)-\exp(3x)}{\sin 2x-\sin x}$. б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{tg2x-\sin x}$. б) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{tg(\pi x/2a)}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{\exp(\sin\pi x)-1}$. б) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{5/(tg5x\sin 2x)}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2x}{x\sin 3x}$. б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6tgxtg3x}$.

22. а) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(5+x)^{1/3}-2}{\sin\pi x}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\sec x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(\alpha x)-\exp(\beta x)}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sin(\pi x/2)/\ln x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\exp(x)-\exp(-x))}{\exp(x^3+1)-\exp(1)}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\ln(3+2x)/\ln(2-x)}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{(x+1)}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+x\exp(x)})}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x)^{18\sin x/ctgx}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln(tg(\frac{\pi}{4}+ax))}$, б) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctg\dfrac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$.

V

Найти наименьшее и наибольшее значения функций $z=f(x,y)$ в области D.

1. $z=2x^2-y^2-x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $x\ge 0$.
2. $z=2x^2-y^2+y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $y\ge 0$.
3. $z=2x^2-y^2-5y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x-y\le 1$, $y\le 0$.
4. $z=4x^2+2y^2+7x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $x\le 0$.
5. $z=2x^2+y^2+y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $y\le 0$.
6. $z=x^2+2y+x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $x\ge 0$.
7. $z=5x^2-y^2+6y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $y\ge 0$.
8. $z=2x^2+y^2-3y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x-y\le 1$, $y\le 0$.
9. $z=2x^2+y^2-x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $x\le 0$.
10. $z=4x^2-3y^2-13y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $y\le 0$.
11. $z=x^2-3y^2-y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x-y\le 1$, $y\le 0$.
12. $z=3x^2-y^2-y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x-y\le 1$, $y\le 0$.
13. $z=2x^2-3y^2+8x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $x\le 0$.
14. $z=3x^2+2y^2-4x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $x\ge 0$.
15. $z=3x^2+2y^2-y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $y\ge 0$.
16. $z=3x^2+2y^2-y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x-y\le 1$, $y\le 0$.
17. $z=5x^2-2y^2-8y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x-y\le 1$, $y\le 0$.
18. $z=x^2+3y^2-5x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $x\le 0$.
19. $z=3x^2+y^2+x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $x\ge 0$.
20. $z=5x^2-4y^2+15y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\le 1$, $y\ge 0$.
21. $z=4x^2-y^2+x$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $x\le 0$.
22. $z=3x^2-2y^2-y$, $D: x^2+y^2\le 1$, $x+y\ge -1$, $y\le 0$.

23. $z = x^2 - 4y^2 - 9x$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x + y \le 1$, $x \ge 0$.

24. $z = 2x^2 + 5y^2 + 8y$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x - y \le 1$, $y \le 0$.

25. $z = 3x^2 + y^2 + y$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x - y \le 1$, $y \le 0$.

26. $z = x^2 + 3y^2 - x$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x + y \ge -1$, $x \le 0$.

27. $z = 4x^2 - y^2 - 6y$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x + y \ge -1$, $y \le 0$.

28. $z = 2x^2 + 3y^2 + 3x$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x + y \le 1$, $x \ge 0$.

29. $z = 2x^2 + 4y^2 - y$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x - y \le 1$, $y \le 0$.

30. $z = 5x^2 - 4y^2 - 16y$, $D: x^2 + y^2 \le 1$, $x - y \le 1$, $y \le 0$.

Оглавление

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1930 году. Первым заведующим кафедрой ВМ был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной.

В декабре 1944 года заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. В.А. Тартаковский – крупнейший советский алгебраист. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность также получили его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений. Методы, разработанные В.А. Тартаковским, оказали значительное влияние на дальнейшие изыскания во многих областях современной математики не только в нашей стране, но и за рубежом.

Обладая исключительной энергией и темпераментом, В.А. Тартаковский уделял много внимания научно-общественной работе. Еще в Тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при МВ ССО СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране, был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский учавствовал в организации Ленинградского отделения математического института АН СССР им. В.А. Стеклова и был первым его директором. Он воспитал многих талантливых математиков, среди них академик Ю.В. Линник – крупнейший специалист по теории чисел, теории вероятностей и математической статистики.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков.

В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярев, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов.

С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра является одной из самых многочисленных в университете по числу преподавателей. Среди сотрудников ; доктора и 15 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют в научной работе как в области фундаментальных исследований по математике и теоретической физике, так и в прикладных исследованиях. Сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных изданиях. Преподаватели принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. Областью научных интересов профессора А.Г. Петрашеня являются теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов - специалист по теории групп в квантовой механике. Профессор В.Ю. Тертычный, член Нью-Йоркской академии и Соросовский профессор, занимается теорией оптимального управления механическими системами.

Типовые расчеты по высшей математике.
I семестр/Методические указания и задачи для студентов

В редакции составителей.
Дизайн обложки А.В.Спирин
Зав.редакционно-издательским отделом Н.Ф.Гусарова

Лицензия № 020945 от 29.11.94 Подписано к печати 05.07.04
Отпечатано на ризографе Тираж 1300экз. Заказ №48.