Лабораторная работа №7

Вычисление определенного интеграла численными методами

Цель работы: освоить вычисление определенного интеграла методами прямоугольников, трапеций и Симпсона и научиться применять их для решения практических задач оптотехники.
Решаемые в лабораторной работе задачи:
1. Вычислить определенный интеграл тремя указанными способами;
2. Вычислить объем линзы численным способом

Порядок выполнения работы.

Вычисление определенного интеграла методом прямоугольников

1. Зададим в MathCAD подинтегральную функцию f(x) и границы интегрирования а и б. Вычислим значение интеграла с помощью встроенной в MathCAD функции вычисления определенного интеграла

$$a := 1$$

$$b := 3$$

$$f(x) := 1 + x^2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 10.667$$

2. Рассмотрим интеграл как функцию $I = \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i + h/2)$,

где h - ширина основания прямоугольников, площадь которых соответствует площади фигуры, ограниченной подинтегральной функцией и прямыми x = a и x = b (рис.1).
Определим количество прямоугольников n1, необходимых для вычисления интеграла, исходя из заданной погрешности вычисления интеграла $\Delta I = 0.01$. Функция ceil позволяет округлить полученный результат. Ширина основания h вычисляется по формуле $h = (b-a)/n1$.

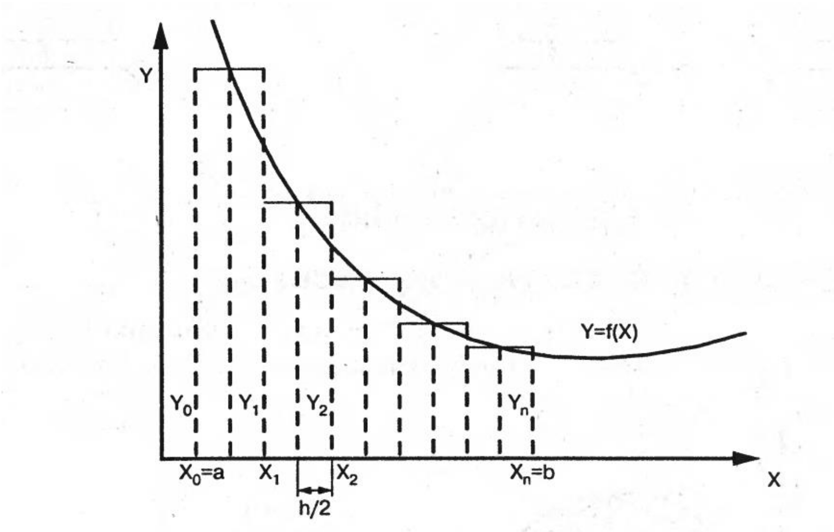


Рис. 1. Графическая интерпретация метода средних прямоугольников

$$\Delta I := 0.01$$

$$n1 := \mathrm{ceil}\left[\frac{(b-a)}{\Delta I}\right]$$

$$n1 = 200$$

3. После этого вычисляем интеграл с помощью программного модуля, который последовательно рассчитывает и складывает площади прямоугольников. При условии, что интервал [a, b] разбит на достаточно большое количество интервалов, результат вычисления получается аналогичным к результату вычисления с помощью встроенного оператора.

$$Ip(a,b,n1,f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{n1} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f\left(x_i - \dfrac{h}{2}\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow S \cdot h \end{array} \right.$$

$$Ip(a,b,n1,f) = 10.667$$

Вычисление интеграла методом трапеций

1. В этом случае вместо площади прямоугольников под кривой, описывающей функцию f(x), рассчитываются площади трапеций (рис. 2).

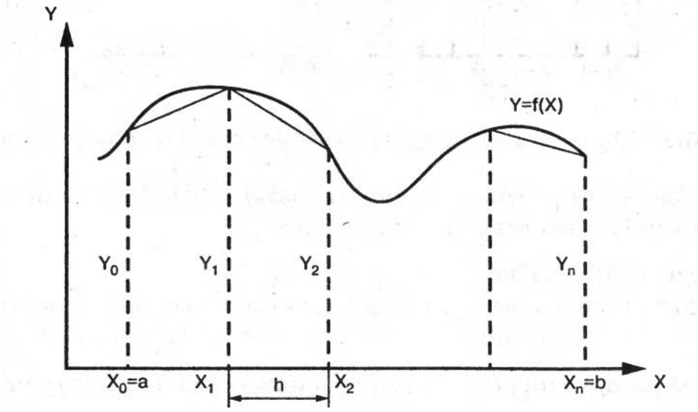


Рис. 2 Геометрическая интерпретация метода трапеций

Количество трапеций, необходимых для достижения заданной точности, рассчитывается исходя из выражения, приведенного ниже. Видно, что количество трапеций должно быть на порядок меньшим, чем количество прямоугольников.

$$n2 := \mathrm{ceil}\left[\sqrt{\frac{(b-a)^2}{\Delta I}}\right]$$

$$n2 = 20$$

2. Вычисляем площадь трапеций с помощью формулы

$$I = \int_a^b f(x)dx = h\left(\left(f(a)+f(b)\right)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

, где $h = (b-a)/n$ - ширина основания трапеции. Программный модуль, реализующий это выражение, приведен ниже. Полученный результат несколько отличается от результата, полученного при использовании встроенного в MathCAD алгоритма, но эта разница находится в пределах допуска

$$It(a,b,n2,f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{n2} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n2-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f(x_i) \end{array} \right. \\ S \leftarrow h \cdot \left[\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \right) + S \right] \end{array} \right.$$

$$It(a,b,n2,f) = 10.67$$

Вычисление интеграла методом Симпсона

1. В этом случае площадь фигуры задается совокупностью криволинейных трапеций (рис. 3), количество которых может быть определено из формулы

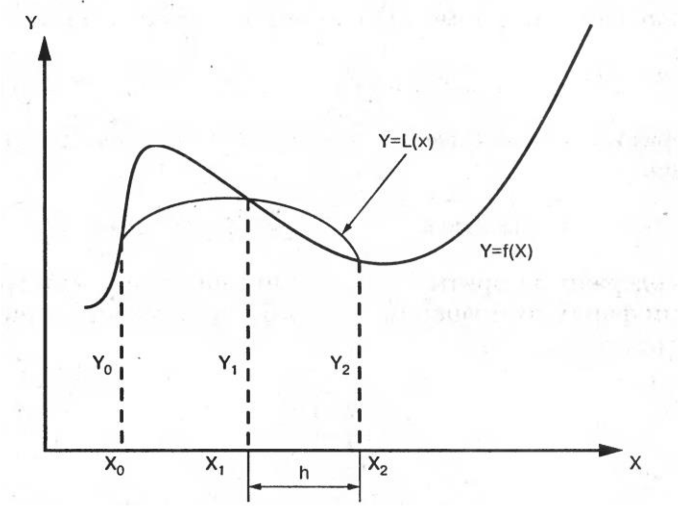


Рис. 3 Геометрическая интерпретация интегрирования по методу Симпсона.

$$n3 := \text{ceil}\left[\sqrt[4]{\frac{(b-a)^4}{\Delta I}} \right]$$

$$n3 = 7$$

2. Интеграл вычисляется по формуле

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + f(b)\big) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} p\, f(x_i) \right)$$

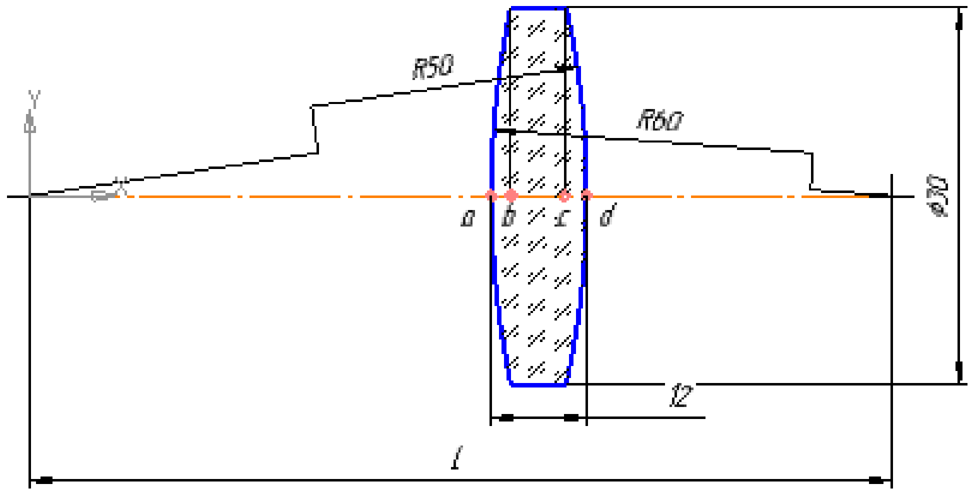
где p = 6 - p, p = 4. Результат применения соответствующего вычислительного блока приведен ниже

$$
\mathrm{Is}(a,b,n3,f) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{n3} \\
S \leftarrow 0 \\
p \leftarrow 4 \\
\text{for } i \in 1..n3-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f(x_i) \cdot p \\ p \leftarrow 6 - p \end{array} \right. \\
S \leftarrow \dfrac{h}{3} \cdot [(f(a) + f(b)) + S]
\end{array}
\right.
$$

$$\mathrm{Is}(a,b,n2,f) = 10.667$$

2. Вычисление объёма линзы численными методами

1. Вычислим объем линзы с помощью численных методов. Пусть мы имеем линзу со следующими конструктивными параметрами:
Радиусы кривизны линзы R1 = 60, R2 = -50 мм;
Толщина линзы по оси d = 12 мм
Диаметр линзы D = 30 мм.
Изобразим линзу в системе координат XY так, чтобы центр кривизны ее второй поверхности совпадал с началом координат.



Тогда уравнение окружности радиуса R1 будет иметь вид $(x-L)^2+y^2=R1^2$, где $L=R1+R2-d$, уравнение окружности радиуса R2 $x^2+y^2=R2^2$, уравнение образующей цилиндрической поверхности $y=D/2$.

2. Представим линзу как совокупность двух шаровых сегментов и цилиндра, тогда ее объем можно найти как сумму интегралов

$$V=\pi\int_a^b f1(x)^2\,dx+\pi\int_b^c f2(x)^2\,dx+\pi\int_c^d f3(x)^2\,dx$$

, где f1(x), f2(x), f3(x) - уравнения окружности с R1, прямой $y=D/2$ и окружности R2. Координаты границ интегрирования a и d определяются рисунка: a = R2 - d, d = R2. Координаты точек b и c определяются из решения систем уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=R1^2 \\ y=D/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-L)^2+y^2=R2^2 \\ y=D/2 \end{cases}$$

Программа, выполняющая вычисление объема линзы приведена ниже. Количество криволинейных трапеций при расчете объема шарового сегмента было взято равным 10. Количество прямоугольников при расчете объема цилиндра - 200.

$R1 := 60 \quad R2 := -50 \quad d := 12 \quad D := 30$

$L := |R1| + |R2| - d$

$a := |R2| - d$

$d := |R2|$

$L = 98 \quad a = 38 \quad d = 50$

$y := 0 \quad x := 0$

Given

$(x - L)^2 + y^2 - R1^2 = 0$

$\left(y - \frac{D}{2}\right) = 0$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 15\cdot\sqrt{15} + 98 & 98 - 15\cdot\sqrt{15} \\ 15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156.095 & 39.905 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Given

$x^2 + y^2 - R2^2 = 0$

$\left(y - \frac{D}{2}\right) = 0$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 5\cdot\sqrt{91} & -5\cdot\sqrt{91} \\ 15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.697 & -47.697 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

$b := 39.905$

$c := 47.697$

$n1 := 10$

$f1(x) := R1^2 - (x - L)^2$

$$V1(a,b,n1,f1) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{n1} \\ S \leftarrow 0 \\ p \leftarrow 4 \\ \text{for } i \in 1..n1-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f1(x_i) \cdot p \\ p \leftarrow 6 - p \end{array} \right. \\ S \leftarrow \dfrac{\pi \cdot h}{3} \cdot [(f1(a) + f1(b)) + S] \end{array} \right.$$

$V1(a,b,n1,f1) = 676.816$

$n := 200$

$f2(x) := \left(\dfrac{D}{2}\right)^2$

$$V2(b,c,n2,f2) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{(c-b)}{n2} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow b + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f2\left(x_i - \dfrac{h}{2}\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow \pi \cdot h \cdot S \end{array} \right.$$

$V2(b,c,n2,f2) = 5.508 \times 10^3$

$n3 := 10$

$f3(x) := R2^2 - x^2$

$$V3(c,d,n3,f3) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{(d-c)}{n3} \\ S \leftarrow 0 \\ p \leftarrow 4 \\ \text{for } i \in 1 .. n3-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow c + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f3(x_i) \cdot p \\ p \leftarrow 6 - p \end{array} \right. \\ S \leftarrow \dfrac{\pi \cdot h}{3} \cdot [(f3(c) + f3(d)) + S] \end{array} \right.$$

$V3(c,d,n3,f3) = 820.329$

$V := V1(a,b,n1,f1) + V2(b,c,n2,f2) + V3(c,d,n3,f3) = 7.005 \times 10^3$

3. Проверить правильность полученных результатов можно, пользуясь формулами для расчета объема шарового сегмента и цилиндра

$$V1 := \pi \cdot (b-a) \cdot \frac{\left[3 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (b-a)^2\right]}{6} = 676.902$$

$$V2 := \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot (c-b) = 5.508 \times 10^3$$

$$V3 := \pi \cdot (d-c) \cdot \frac{\left[3 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (d-c)^2\right]}{6} = 820.343$$

$$V := V1 + V2 + V3 = 7.005 \times 10^3$$

Варианты заданий

1. Вычислить определенный интеграл от заданной функции на интервале [a; b] с погрешностью 0.01

№	Интеграл
1	$f(x) = x^4(1+x^2)^{-1}, \quad a=1, \quad b=2.$
2	$f(x) = x^2 e^{-2x}, \quad a=0, \quad b=1{,}6.$
3	$f(x) = x^{-0{,}5} \ln x, \quad a=1, \quad b=3.$
4	$f(x) = x \sin 3x, \quad a=0, \quad b=1.$
5	$f(x) = \sqrt{x+1} \lg(x+1) \quad a=0{,}1, \quad b=1{,}1.$
6	$f(x) = x^2 \ln x, \quad a=1, \quad b=2.$
7	$f(x) = x^2(x+1)^{-2}, \quad a=1, \quad b=4.$
8	$f(x) = x \cos 2x, \quad a=0, \quad b=1.$
9	$f(x) = x^2 \ln x, \quad a=1, \quad b=2.$
10	$f(x) = \sqrt{x} \ln x, \quad a=1, \quad b=4.$
11	$f(x) = x^3 / \sqrt{1-x^2}, \quad a=-0{,}5, \quad b=0{,}5.$
12	$f(x) = e^{-x} \cos x, \quad a=0, \quad b=2.$
13	$f(x) = \sqrt{x} /(x+1), \quad a=1, \quad b=4.$
14	$f(x) = e^{-\sqrt{x}}, \quad a=1, \quad b=4.$
15	$f(x) = x arctg x, \quad a=0, \quad b=1.$
16	$f(x) = x \arccos x, \quad a=-0{,}5, \quad b=0{,}5.$

2. Вычислить объем линзы, имеющей следующие конструктивные параметры

№	Радиус первой поверхности R1 мм	Радиус второй поверхности R2 мм	Толщина линзы d мм	Диаметр линзы D мм
1	-60.8	38	2.8	30
2	123.3	-47.4	6	30
3	-22	18	0.8	10
4	69	-18	3.5	16
5	71.6	60.2	20	100
6	19.1	-81.3	3.1	14.5
7	-19.5	22.4	1.6	12
8	56.4	429.5	6.9	50

9	76.9	-129.7	12	32
10	30	1100	5.7	28.6
11	-74	30	1.9	28.6
12	88.8	441.8	8.6	68
13	46.8	-39.9	11	36.5
14	66.5	26.5	2.5	39.5
15	30.4	-134.8	10.5	39.5
16	-56	31.9	1.7	36.5