

Для расчета статически неопределимых систем уравнения статики дополняют необходимым числом уравнений деформаций, для составления которых используют условия совместности деформаций. Число этих уравнений должно равняться степени статической неопределимости системы K . Условия совместности деформаций формулируются исходя из требований сохранения целостности системы и ее способности выполнять свое функциональное назначение при заданной приложенной нагрузке. В статически неопределимой системе усилия в ее элементах могут возникать как вследствие внешних нагрузок, так и за счет перераспределения деформаций, вызванных изменением температурных режимов работы системы (температурные напряжения) или неточностью изготовления этих элементов (монтажные напряжения).

Порядок выполнения задания:

- 1) составить уравнения статики для заданной системы;
- 2) определить степень статической неопределимости системы;
- 3) построить схему перемещений системы;
- 4) составить уравнения совместности деформаций;
- 5) выразить уравнения совместности деформаций через усилия или напряжения, используя закон Гука;
- 6) решить систему уравнений статики и совместности деформаций относительно усилий (напряжений);
- 7) исходя из условий прочности, подобрать величины площадей элементов системы при заданном соотношении площадей элементов.

В данных методических указаниях приводятся примеры расчета двух вариантов заданий с различной степенью сложности.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Задание I

Рассчитываемая система представляет собой стержневую конструкцию с одной шарнирной опорой и двумя деформируемыми тягами. Один из вариантов задания изображен на рис. I.

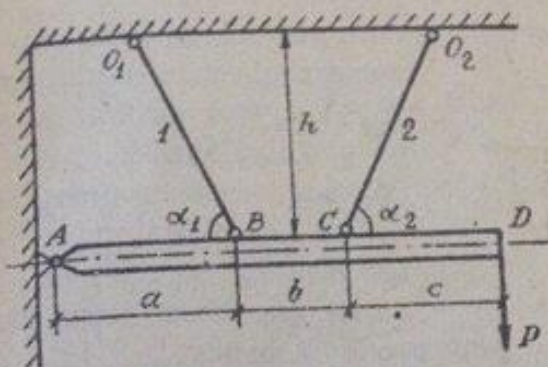


Рис. 1

Заданы материалы стержней:
 стержень 1 - сталь, стержень
 2 - медь; упругие модули на рас-
 тяжение (сжатие): $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа;
 $E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа; внешняя сила
 $P = 2 \cdot 10^5$ Н; коэффициенты ли-
 нейного расширения материалов
 стержней $\alpha_1^t = 12 \cdot 10^{-6}$ $^{\circ}\text{C}^{-1}$,
 $\alpha_2^t = 16 \cdot 10^{-6}$ $^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Неточность изготовления
 элемента системы: стержень 2
 изготовлен длинее на величину
 $\delta = 0,002 l_2$.

Изменение температуры системы $\Delta T = 20^{\circ}\text{C}$.

Допустимые напряжения для материалов каждого из стержней:

$$[\sigma]_1 = 160 \text{ МПа}, [\sigma]_2 = 100 \text{ МПа}.$$

Конструктивное соотношение площадей стержней $F_1/F_2 = 2$.

Геометрические размеры: $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м,

$$\alpha_1 = 30^{\circ}, \alpha_2 = 60^{\circ}.$$

Определить величины F_1, F_2 , учитывая, что балка AD (рис. 1)
 предполагается абсолютно жесткой и невесомой.

I. Определение усилий от внешней силы P ($\Delta T = 0, \delta = 0$).
 Вычертим расчетную схему балки с указанием всех размеров. Для
 расчета усилий используем метод сечений. Сечения проведем через
 оба стержня. Рассмотрим равновесие нижней части системы, заме-
 няя действие отбрасываемой верхней части стержней внутренними
 усилиями реакций S_1, S_2 (рис. 2).

Составим уравнения статики:

$$\Sigma M_A = S_1 a \sin \alpha_1 + S_2 (a+b) \sin \alpha_2 - P(a+b+c) = 0 \quad (2)$$

или

$$S_1 a \sin \alpha_1 + S_2 (a+b) \sin \alpha_2 = P(a+b+c). \quad (3)$$

Остальные уравнения статики можно не составлять, так как они

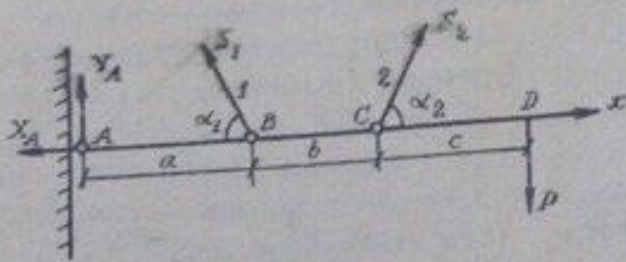


Рис.2

необходима лишь при определении реакций в шарнире X_A, Y_A , чего не требуется по условию задачи. Таким образом, степень статической неопределимости системы $K = 1$, так как мы имеем два неизвестных уси-

лия S_1, S_2 и одно уравнение равновесия статики. Для составления одного уравнения совместности деформаций необходимо рассмотреть схему перемещений системы (рис.3). Под

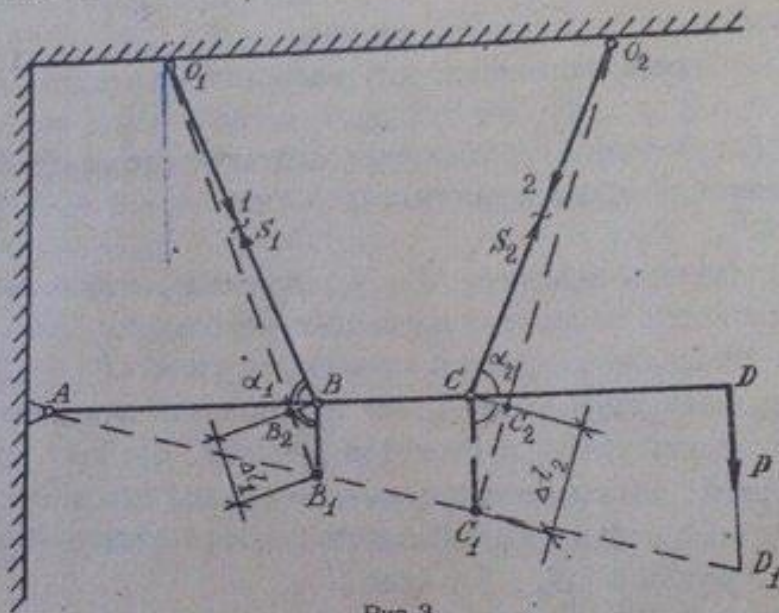


Рис.3

действием внешней силы P первый стержень удлинится на величину Δl_1 , а второй - на величину Δl_2 , при этом жесткая балка AD повернется в положение AD_1 . Звуду малости упругих деформаций горизонтальными смещениями точек B и C , лежащих на оси балки, пренебрежем и будем считать, что точки B и C в ходе деформирования системы переместятся строго вертикально и займут положение B_1 и C_1 . Положение этих точек определяется пересечением линий AD и перпендикуляров, проведенных к первоначальному направлению осевой линии балки AD в точки B и C .

Удлинения Δl_1 и Δl_2 находим также графически, для чего из точек B и C опустим перпендикуляры на линии O_1B_1 и O_2C_1 , соответствующие новым положениям стержней 1 и 2 после приложения нагрузки P . Отрезки B_1B_2 и C_1C_2 определяют удлинения соответственно Δl_1 и Δl_2 .

Уравнения совместности деформаций в данном случае проще всего составить, воспользовавшись подобием треугольников ABB_1 и ACC_1 :

$$\frac{BB_1}{a} = \frac{CC_1}{a+b} \quad (4)$$

Из $\triangle BB_1B_2$ и $\triangle CC_1C_2$ определим

$$BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha_1}; \quad CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha_2} \quad (5)$$

Подставив равенства (5) в формулу (4), получим уравнение совместности деформаций заданной стержневой системы

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a}{a+b} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (6)$$

или $\Delta l_1 = \Delta l_2 k,$

где

$$k = \frac{a}{a+b} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

безразмерный коэффициент, учитывающий особенности геометрической конфигурации системы. Используя закон Гука для каждого из стержней

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2},$$

из уравнения (6) получим

$$\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} k.$$

Учитывая, что $l_1 = h/\sin\alpha_1$; $l_2 = h/\sin\alpha_2$ (рис. I), последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$S_1 = S_2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a}{(a+b)} \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2} \quad (7)$$

Далее решаем совместно систему уравнений (3) и (7):

$$S_2 = P \frac{(a+b+c)}{(a+b)\sin\alpha_2} \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a(a+b+c)}{(a+b)^2} \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}; \quad S_1 = P \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3 \alpha_2} \quad (8)$$

Из выражений (8) при известном отношении F_1/F_2 находим численные значения усилий:

$$S_1 = 19,4 \cdot 10^4 \text{ Н (растяжение),}$$

$$S_2 = 29,1 \cdot 10^4 \text{ Н (растяжение).}$$

Проверка правильности найденных численных значений производится путем подстановки $S_1 = 19,4 \cdot 10^4 \text{ Н}$ и $S_2 = 29,1 \cdot 10^4 \text{ Н}$ в уравнение равновесия (3):

$$19,4 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 0,5 + 29,1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3 \cdot 2 \cdot 10^5.$$

2. Определение напряжений, вызванных неточностью изготовления ($P = 0$, $\Delta T = 0$, $\delta \neq 0$).

Пусть первый стержень изготовлен с неточностью по длине $+\delta_1$, а второй — с неточностью $+\delta_2$, т.е. с фактической длиной несколько большей номинальной. Тогда при сборке в них появятся внутренние напряжения. Расчетная схема при этом будет выглядеть так, как показано на рис. 4. Знаки внутренних усилий будут разными, так как при сборке необходимо второй стержень растянуть на величину $-\Delta l_2$ и в нем появятся растягивающие усилия S_2 . Первый стержень будет сопротивляться этому, что приведет

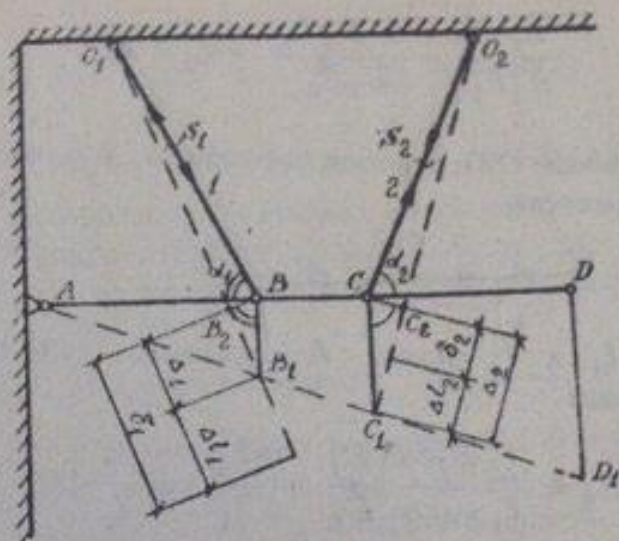


Рис. 4

к необходимости его сжатия на величину Δl_1 , и в нем возникнут сжимающие усилия S_1 .

Уравнение равновесия для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид:

$$-S_1 a \sin \alpha_1 + S_2 (a+b) \sin \alpha_2 = 0. \quad (9)$$

Для перемещений (рис. 4) получим

$$B_2 B_1 = \Delta_1 - \delta_1 - \Delta l_1; \quad C_2 C_1 = \Delta_2 = \delta_2 + \Delta l_2. \quad (10)$$

Соотношение между Δ_1 и Δ_2 находим аналогично п. I (см. уравнение (6)):

$$\Delta_1 = \Delta_2 k. \quad (11)$$

Подставив выражения (10) в равенство (11), получим уравнение совместности деформаций

$$\delta_1 - \Delta l_1 = (\delta_2 + \Delta l_2) k. \quad (12)$$

Выразив согласно закону Гука удлинения Δl_1 и Δl_2 через усилия S_1, S_2 , преобразуем уравнение (12):

$$\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} + \frac{k S_2 l_2}{E_2 F_2} = \delta_1 - k \delta_2. \quad (13)$$

Перейдем в уравнении (13) к новым переменным, в качестве которых выберем напряжения

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}, \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}.$$

Тогда, выразив l_1 и l_2 через h , уравнению (13) можно придать следующий вид:

$$\sigma_1 + \sigma_2 k \frac{l_2 \sin \alpha_1 E_1}{l_1 \sin \alpha_2 E_2} = \left(\frac{\delta_1}{l_1} - k \frac{\delta_2}{l_1} \right) E_1. \quad (14)$$

Перепишем уравнение (9) в напряжениях:

$$\frac{S_1}{F_1} a \sin \alpha_1 = \frac{S_2}{F_2} \frac{F_2}{F_1} (a+b) \sin \alpha_2$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{(a+b) \sin \alpha_2}{a \sin \alpha_1} \frac{F_2}{F_1} = \sigma_2 \frac{F_2}{F_1} \frac{1}{k}. \quad (15)$$

Решим систему уравнений (14), (15) относительно неизвестных напряжений σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{\left(\frac{\delta_1}{l_1} - k \frac{\delta_2}{l_1} \right) \frac{F_1}{F_2} \frac{a}{(a+b)} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} E_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3 \alpha_2}};$$

$$\sigma_1 = \frac{\left(\frac{\delta_1}{l_1} - k \frac{\delta_2}{l_1} \right) E_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3 \alpha_2}}.$$

При заданных величинах $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0,002 l_2$ из уравнений (16) получим

$$\sigma_1 = -55,9 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -32,3 \text{ МПа}.$$

Отрицательные значения найденных напряжений означают, что приняты направления усилий в стержнях S_1 и S_2 противоположны фактическим, т.е. первый стержень растягивается, а второй — сжимается:

$$\sigma_1 = 55,9 \text{ МПа (растяжение)}; \quad \sigma_2 = -32,3 \text{ МПа (сжатие)}.$$

3. Расчет температурных напряжений ($P = 0$, $\delta = 0$, $\Delta T \neq 0$).
Предположим, что оба стержня системы нагреты до температуры $T_k + \Delta T$, где T_k — комнатная температура. Тогда их длины получат соответствующие приращения

$$\Delta l_1^t = \alpha_1^t l_1 \Delta T, \quad \Delta l_2^t = \alpha_2^t l_2 \Delta T. \quad (17)$$

Эти приращения можно формально рассматривать как неточности изготовления стержней и воспользоваться для определения возникающих при этом температурных напряжений результатами решения п.2 (см. уравнения (16)), заменив в окончательных выражениях δ_1 на Δl_1^t , δ_2 на Δl_2^t . Тогда для температурных напряжений σ_1^t и σ_2^t будут справедливы соотношения

$$\sigma_1^t = \frac{(\alpha_1^t - k \alpha_2^t) \Delta T E_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3 \alpha_2}}; \quad k = k \frac{l_2}{l_1}; \quad (18)$$

$$\sigma_2^t = \frac{(\alpha_1^t - k \alpha_2^t) \Delta T E_1 \frac{F_1}{F_2} \frac{1}{k}}{1 + \frac{E_1 F_2}{E_2 F_2} \frac{a^2}{(a+b)^2} \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3 \alpha_2}}.$$

При $\Delta T = 20^\circ \text{C}$ и заданных геометрических и физических параметрах системы из уравнений (18) получим

$$\sigma_1^t = -31,3 \text{ МПа (сжатие)}; \quad \sigma_2^t = 18,1 \text{ МПа (растяжение),}$$

4. Подбор сечений элементов системы.

При расчете сечений учитывается одновременное действие всех нагружающих факторов: внешней нагрузки, внутренних монтажных и температурных напряжений. Полученные в пп. 1, 2, 3 данные представим в виде табл. I.

Т а б л и ц а

Внутренние усилия от силы P , МН	Напряжения, МПа			F_1/F_2
	от δ	от ΔT	допустимые	
$S_1 = 0,194$	$\sigma_1 = 55,9$	$\sigma_1^t = 31,3$	$[\sigma]_1 = 160$	2
$S_2 = 0,291$	$\sigma_2 = -32,3$	$\sigma_2^t = 18,1$	$[\sigma]_2 = 160$	

Условия прочности для каждого из стержней записываются в виде неравенств

$$\frac{S_1}{F_1} + \sigma_1 + \sigma_1^t \leq [\sigma]_1; \quad \frac{S_2}{F_2} + \sigma_2 + \sigma_2^t \leq [\sigma]_2. \quad (19)$$

Отсюда

$$F_1 \geq \frac{S_1}{[\sigma]_1 - \sigma_1 - \sigma_1^t}, \quad F_2 \geq \frac{S_2}{[\sigma]_2 - \sigma_2 - \sigma_2^t}. \quad (20)$$

При выбранных численных значениях для F_1 и F_2 получим

$$F_1 \geq 14,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad F_2 \geq 25,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \quad (21)$$

Учитывая заданное отношение $F_1/F_2 = 2$, находим площадь первого стержня:

$$F_1' = 2F_2 = 50,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

второго -

$$F_2' = 0,5F_1 = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Первому из неравенств (21) удовлетворяет значение $F_1' = 50,8 \times 10^{-4} \text{ м}^2$, при значениях F_2' второе неравенство не выполняется. Окончательно выбираем

$$F_1 = 50,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad F_2 = 25,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Очевидно, что при этом напряжения в первом стержне будут меньше допустимых, т.е. $\sigma_1 < [\sigma]_1$, во втором - $\sigma_2 = [\sigma]_2$.

На рис.5 приведены схемы, в табл.2 и 3 - исходные данные для выполнения задания по вариантам.

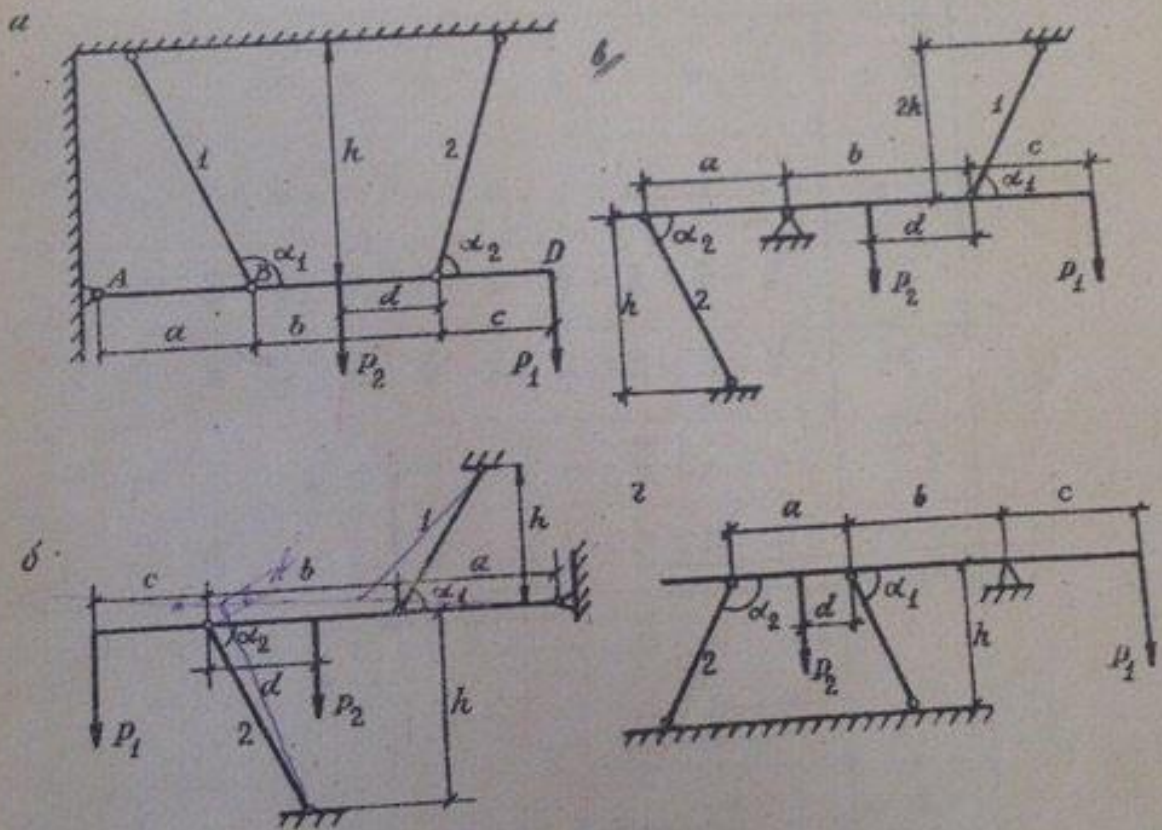


Рис.5

Таблица 2

Номер варианта	Расчетная схема (рис. 5)	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$d, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	α_1	α_2	$P_1 \cdot 10^{-4}, \text{ Н}$	$P_2 \cdot 10^{-4}, \text{ Н}$	F_2/F_1	Материал стержней	$\Delta T, \text{ }^\circ\text{C}$	δ
1	а	1	1,5	1	0,5	1	45°	45°	4	1	1	Сталь Сталь	30 -	0,0004 -
2	а	1	1,5	1	0,5	2	90	60	3	0	2	Сталь Медь	20 -	0,0003 -
3	а	2	1	0,5	0,5	1,5	120	90	2	3	3	Медь Алюминий	- 15	- 0,0002
4	а	1,5	1,5	1	1	1	135	90	4	0	1	Сталь Сталь	25 -	0,0003 -
5	а	2	2	1	1	2	90	45	5	1	2	Медь Сталь	10 10	-0,0005 -
6	а	1	2	1,5	1	2	60	60	4	0	0,5	Алюминий Медь	15 15	- 0,0001
7	а	1,5	0,8	0,5	0,4	1	60	45	5	3	1	Алюминий Сталь	30 -	-0,0002 -
8	а	2	2	1	1	1	120	45	3	0	0,4	Сталь Сталь	15 -	-0,0003 -
9	б	1	1	1	0,4	2	90	60	2	3	2	Сталь Сталь	10 -	0,0003 -
10	б	1,5	2	1,5	0,6	1	60	90	2	4	1	Сталь Сталь	20 -	-0,0002 -
11	б	1	2	1	0,8	1	90	75	2	3	3	Сталь Медь	- 15	- 0,0002

Продолжение табл. 2

Номер варианта	Расчетная схема (рис. 5)	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$d, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	α_1	α_2	$P_1 \cdot 10^{-4}, \text{ Н}$	$P_2 \cdot 10^{-4}, \text{ Н}$	F_2/F_1	Материал стержней	$\Delta T, \text{ }^\circ\text{C}$	δ
12	б	3	2	1	1	1,5	45°	90°	4	2	4	Сталь Алюминий	- 30	0,0003 -
13	б	2	1,5	1,5	0,5	1,5	90	60	5	4	3	Сталь Медь	- 25	- -0,0001
14	б	1,5	1,5	1,5	0,5	1,5	120	90	3	3	2	Медь Алюминий	30 -	- -0,0002
15	б	1	1,5	1	0,5	1	135	90	2	3	2	Медь Алюминий	25 -	0,0004 -
16	б	1	1	2	0,5	1	60	60	4	2	4	Сталь Алюминий	- 30	0,0001 -
17	в	2	2	1	1	0,5	60	90	2	2	2	Алюминий Алюминий	15 -	- 0,0003
18	в	2	1,5	1,5	0,5	1	90	60	3	4	2	Сталь Сталь	- 25	-0,0003 -
19	в	1	1,5	1	1	0,75	45	90	2	3	0,5	Алюминий Сталь	30 -	0,0003 -
20	в	1	1,5	1	0,5	1,2	120	60	4	5	0,5	Медь Сталь	30 -	-0,0002 -
21	в	1,5	1	1,5	0,4	0,8	120	90	5	2	0,5	Медь Сталь	- 15	-0,0004 -
22	в	1,5	1	1,5	0,6	0,5	60	75	3	4	2	Сталь Сталь	35 -	-0,0002 -

Номер варианта	Расчетная схема (рис. 5)	a, м	b, м	c, м	d, м	h, м	α_1	α_2	$P_1 \cdot 10^{-4}$, Н	$P_2 \cdot 10^{-4}$, Н	F_2/F_1	Материал стержней	ΔT , °C	δ
23	в	2	2	2	1	0,5	45°	60°	5	3	3	Медь Алюминий	25 -	0,0005 -
24	в	2	2	1,5	1,5	0,6	45	90	2	4	1,5	Медь Медь	20 -	0,0005 -
25	г	1	2	1	1,5	0,4	90	120	4	2	2	Сталь Сталь	- 30	-0,0002 -
26	г	2	1	0,5	0,5	1	90	135	3	1	1,5	Сталь Медь	15 -	- 0,0003
27	г	1,5	1,5	0,5	0,5	1	60	120	3	1	1	Сталь Сталь	- 20	0,0002 -
28	г	3	1	1	1	0,8	45	90	4	3	1	Алюминий Алюминий	15 -	-0,0003 -
29	г	2	2	1	1	1,2	60	135	3	1	3	Сталь Алюминий	25 -	-0,0001 -
30	г	1,5	1,5	1	1	1	75	120	2	2	1	Медь Медь	- 25	0,0003 -

Таблица 3

Материал	E , МПа	$\alpha_t \cdot 10^6$, °C ⁻¹	$[\sigma]$, МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5$	12	160
Медь	$1 \cdot 10^5$	16	100
Алюминий	$0,7 \cdot 10^5$	26	60