

1. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Пример 1. Расчет ступенчатого стержня на растяжение-сжатие.

Стальной ступенчатый стержень, заземленный одним концом, нагружен внешними силами так, что каждая сила приложена в центре тяжести соответствующего поперечного сечения и направлена вдоль оси стержня.

1. Пренебрегая весом стержня выполнить проверочный расчет на прочность.
2. Если расчетное напряжение стержня отличается от допускаемого больше, чем на 5%, выполнить проектный расчет стержня.
3. Определить перемещение сечения, в котором приложена сила P_1 .

Исходные данные:

$$[n] = 1.5, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \sigma_T = 300 \text{ МПа}.$$

Материал стержня – сталь ст.30

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = 140 \text{ кН}, & l_2 = 0.8 \text{ м}, & A_1 = 18 \text{ см}^2, \\
 P_2 = 80 \text{ кН}, & l_3 = 1.3 \text{ м}, & A_2 = 20 \text{ см}^2, \\
 P_3 = 40 \text{ кН}, & l_4 = 0.6 \text{ м}, & A_3 = 40 \text{ см}^2.
 \end{array}$$

Решение.

1. Изображаем стержень в масштабе, указываем буквенные и числовые значения заданных величин (рис. 2.1а).

2. Определяем продольную силу N , возникающую в поперечных сечениях стержня, придерживаясь следующей последовательности:

Последовательность действий при вычислении продольной

силы:

1. Провести поперечное сечение.
2. Изобразить отсеченную часть бруса.
3. В рассматриваемом сечении ввести ось x , изобразить продольную силу, выбрав для нее направление, соответствующее растяжению.
4. Составить уравнение равновесия и определить из него значение продольной силы в рассматриваемом сечении.

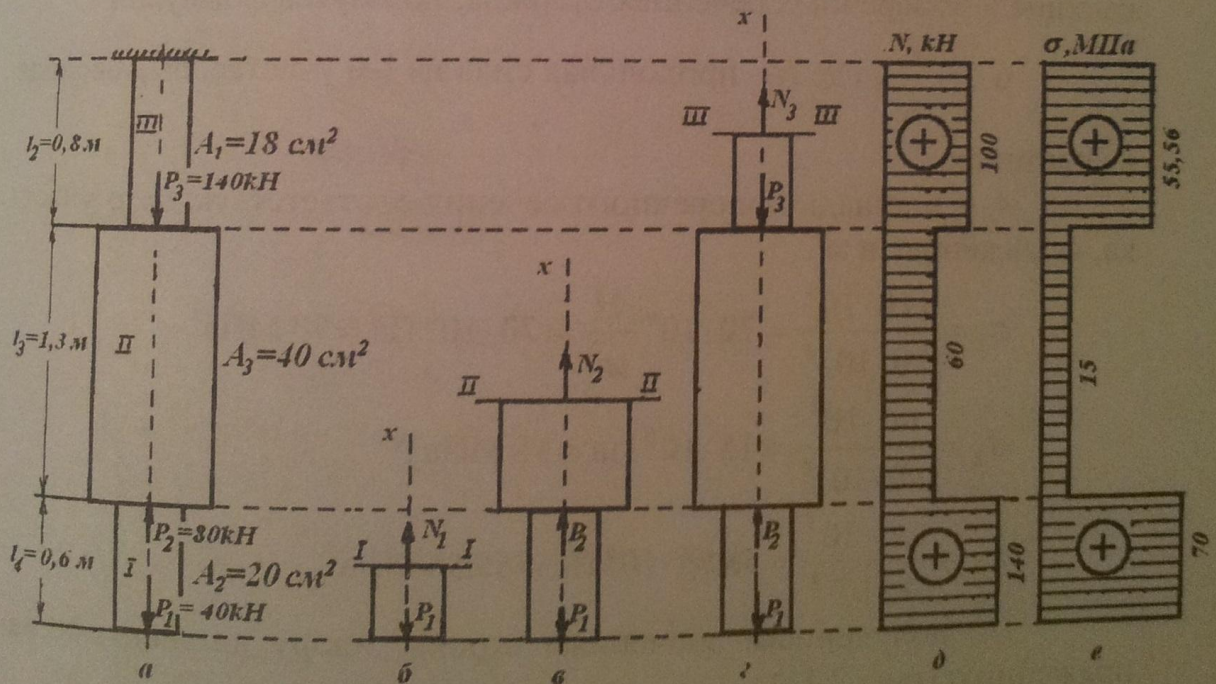


Рис. 2.1

Рассмотрим поперечное сечение I-I на участке I (рис. 2.1б):

Изобразим нижнюю отсеченную часть бруса, в сечении укажем ось x и продольную силу N_1 , направленную как при растяжении. Составим уравнение равновесия для рассматриваемой отсеченной части: $\sum F_{кx} = 0 \rightarrow N_1 - P_1 = 0$. Из этого уравнения вычислим значение продольной силы N_1 : $N_1 = P_1 = 140$ кН

Далее аналогично рассматриваем поперечные сечения на других грузовых участках бруса.

Участок II (рис. 2.1в):

$$\sum F_{кx} = 0 \rightarrow N_2 - P_1 + P_2 = 0,$$

$$N_2 = P_1 - P_2 = 140 - 80 = 60 \text{ кН}.$$

Участок III (рис. 1г)

$$\sum F_{кx} = 0 \rightarrow N_2 - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 140 - 80 + 40 = 100 \text{ кН}$$

3. По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 2.1д).

4. Определяем расчетные нормальные напряжения σ , возникающие в поперечных сечениях стержня, пользуясь формулой

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}, \text{ где } N_i - \text{ продольная сила на } i\text{-м участке, выраженная}$$

в Ньютонах;

A_i - площадь поперечного сечения соответствующего участка, выраженная в м^2 .

$$\sigma_1 = \frac{140 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 70 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 70 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{60 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 15 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{100 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} = 55,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 55,56 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис. 2.1е).

5. Определяем допускаемое напряжение $[\sigma]$.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]} = \frac{300}{1.5} = 200 \text{ МПа}.$$

Здесь σ_T – предел текучести материала стержня;
 $[n]$ – коэффициент запаса прочности.

6. Проверяем прочность стержня.

Сравнивая расчетное и допускаемое напряжения на каждом участке стержня, видим, что условие прочности $|\sigma_i| \leq [\sigma]$ выполняется для всех участков. Следовательно, прочность стержня обеспечена.

7. Проектный расчет стержня.

Как видно из расчета (пункты 4 и 5), напряжения, возникающие на участках стержня, значительно меньше допускаемого. Это приводит к тому, что материал стержня используется нерационально. В данном случае необходимо уменьшить площади поперечных сечений на каждом участке стержня, что приведет к более экономичному использованию материала и, следовательно, к снижению стоимости изделия.

Из условия прочности

$$|\sigma_i| = \frac{|N_i|}{A_i} \leq [\sigma] \text{ находим } A_i \geq \frac{|N_i|}{[\sigma]}.$$

Для участка I

$$A_2 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{140 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7 \text{ см}^2$$

принимаем $A_2 = 7 \text{ см}^2$.

Для участка II

$$A_3 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3 \text{ см}^2$$

принимаем $A_3 = 3 \text{ см}^2$.

Для участка III

$$A_1 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 5 \text{ см}^2$$

принимаем $A_1 = 5 \text{ см}^2$.

(Индексы при обозначении площадей сохранены такие же, как и на рис. 2.1а).

8. Определим осевое перемещение λ сечения, в котором приложена сила P_1 (самого нижнего сечения стержня).

Перемещение λ будет равно сумме продольных деформаций участков, расположенных между этим сечением и заземлением

$$\lambda = \sum \Delta l_i$$

Деформации участков определим по закону Гука:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i},$$

где E – модуль упругости 1-го рода, характеризующий жесткость материала стержня.

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_2}{E \cdot A_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0.8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0.8 \text{ мм}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1.3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 13 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1.3 \text{ мм}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_4}{E \cdot A_2} = \frac{140 \cdot 10^3 \cdot 0.6}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0.6 \text{ мм}$$

$$\lambda = \sum \Delta l_i = 0.8 + 1.3 + 0.6 = 2.7 \text{ мм}$$

Таким образом, под действием заданной нагрузки нижнее сечение спроектированного стержня переместится вниз (так как стержень стал длиннее) на величину $\lambda = 2.7$ мм.

2. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

Задача №2 относится к теме «Растяжение – сжатие».

В этой задаче в поперечных сечениях стержней, поддерживающих балки в горизонтальном положении, возникает продольная сила N и соответствующие ей нормальные напряжения σ .

Пример 2.

Жесткая балка AC (рис. 2.2) поддерживается в горизонтальном положении невесомым деформируемым стержнем AB . Выяснить, какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях стержня AB .

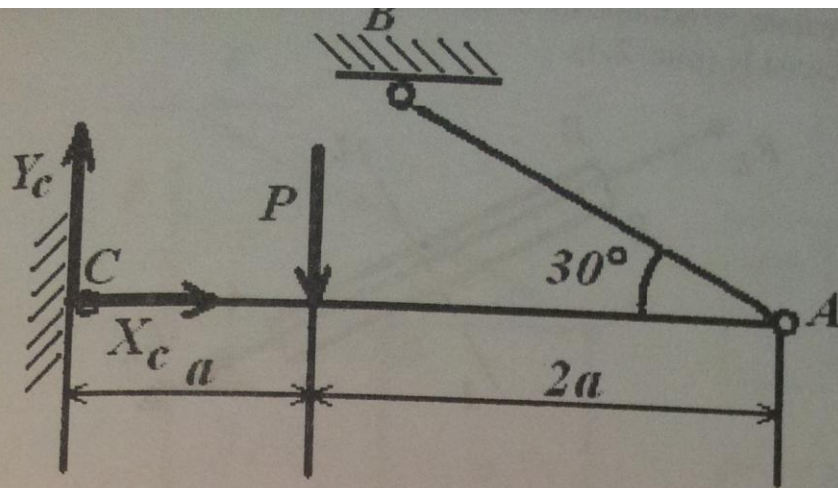


Рис. 2.2

Отделим стержень АВ от всей конструкции и введем в рассмотрение реакции (силы, которые заменяют действие шарниров) в точках А и В. Из теоретической механики известно, что эти реакции численно равны друг другу и направлены вдоль одной прямой (вдоль оси стержня АВ) в противоположные стороны (рис. 2.3).

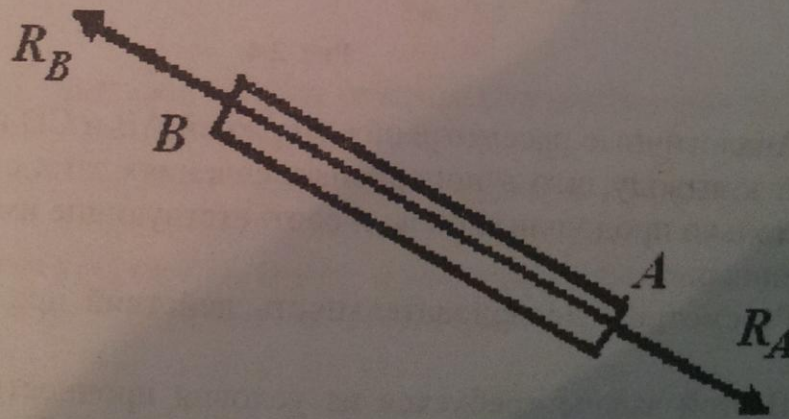


Рис. 2.3

Такая схема нагружения является схемой на растяжение – сжатие, когда внешние силы действуют вдоль оси бруса (стержня).

Следовательно, в поперечных сечениях стержня АВ возникают продольные силы N (рис. 2.4).

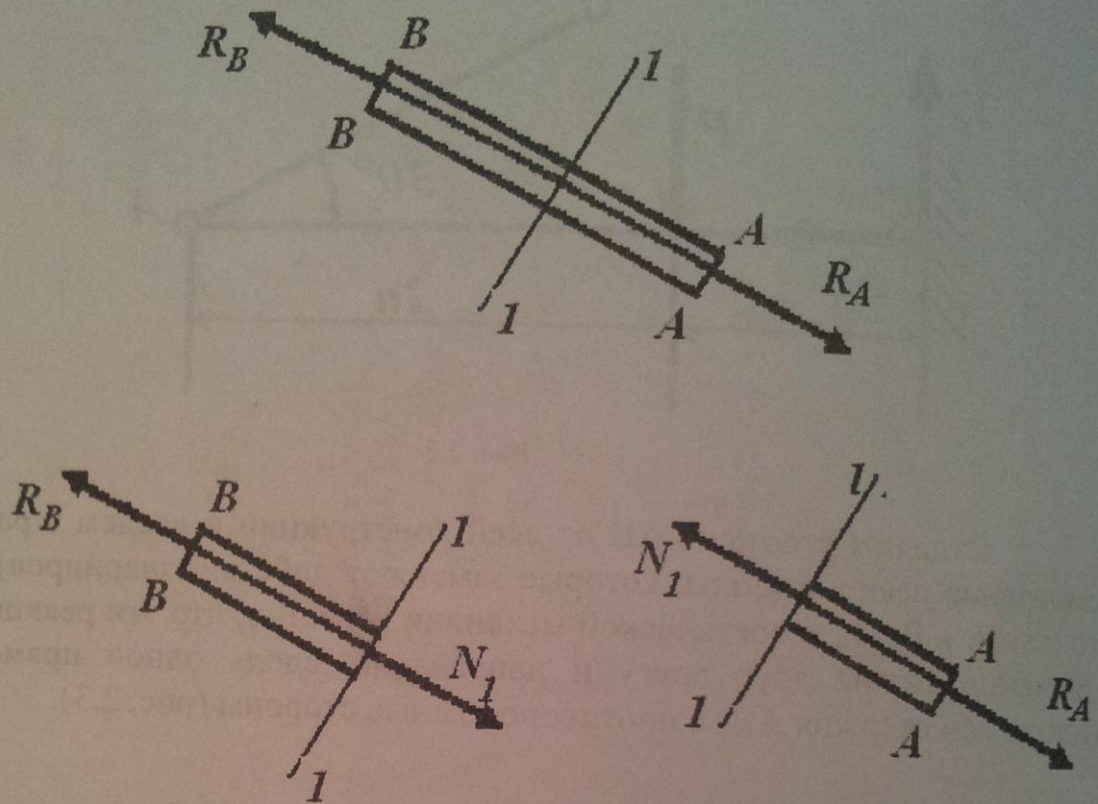


Рис. 2.4

Аналогичные рассмотрения стержней АВ и CD из задачи №2 приведут к выводу, что в поперечных сечениях этих стержней возникают только продольные силы и соответствующие им нормальные напряжения σ .

Рассмотрим последовательность действий при решении задачи №2.

В этой задаче требуется из условия прочности определить линейные размеры поперечных сечений стержней АВ и CD.

1. Изобразить схему конструкции, указав буквенные и числовые значения заданных величин.

Составить уравнение равновесия для отсеченной части в виде равенства нулю суммы моментов относительно точки F всех сил, приложенных к данной отсеченной части. Предварительно распределенную нагрузку интенсивностью q следует заменить ее равнодействующей $Q=q \cdot 2a$. Из полученного уравнения равновесия определить величину продольной силы N_1 :

$$\sum M_F = 0: -Q \cdot 2a + N_1 \cdot 2a = 0, N_1 = Q = q \cdot 2a = 30 \text{ кН.}$$

Условие прочности при растяжении – сжатии имеет вид

$$|\sigma| \leq [\sigma].$$

Обозначим напряжение в сечении 1-1 через σ_1 . Оно вычисляется по формуле $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}$, где A_1 – площадь поперечного сечения 1-1.

$$\text{С учетом этого условие прочности примет вид: } \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]$$

Поперечное сечение 1-1 имеет форму квадрата, и его площадь вычисляется по формуле: $A_1 = b^2$.

$$\text{Условие прочности примет вид: } \frac{N_1}{b^2} \leq [\sigma].$$

Из этого неравенства выразим параметр b :

$$b^2 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} \Rightarrow b \geq \sqrt{\frac{N_1}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{30000}{150}} \approx 14,1 \text{ мм.}$$

Примем $b = 15 \text{ мм}$. Определим напряжение, возникающее в

$$\text{сечении 1-1: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{b^2} = \frac{30000}{15^2} \approx 133 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 133 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется:
 $\sigma_1 = 133 \text{ МПа} < [\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

4. Аналогично рассматривается равновесие верхней отсеченной части конструкции. В сечениях 1-1 и 2-2 указать соответствующие продольные силы (к этому моменту величина силы известна $N_1 = 30 \text{ кН}$).

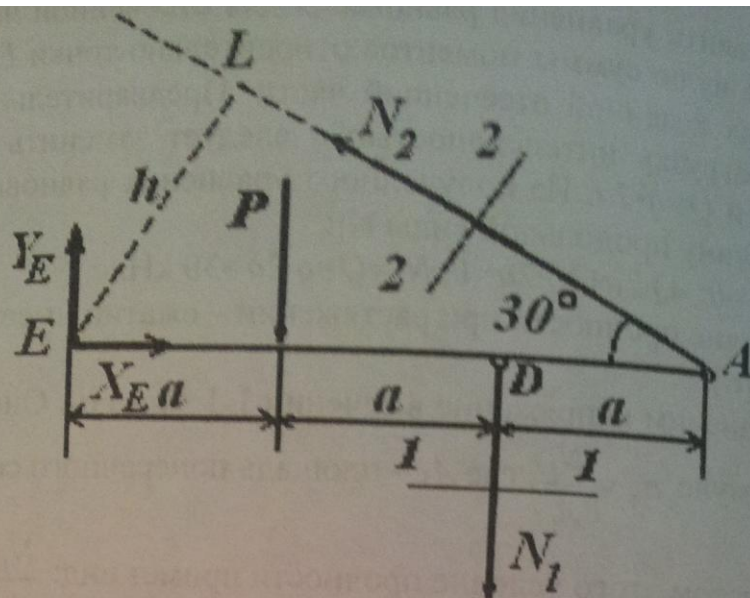


Рис. 2.8

Составим уравнение равновесия для отсеченной части в виде равенства нулю суммы моментов относительно точки E всех сил, приложенных к данной отсеченной части. Из полученного уравнения равновесия определим величину продольной силы N_2 :

$$\sum M_E = 0: -N_1 \cdot 2a - P \cdot a + N_2 \cdot h = 0, \quad h = 3a \cdot \sin 30^\circ, \quad N_2 = 60 \text{ кН.}$$

Условие прочности при растяжении – сжатии имеет вид $|\sigma| \leq [\sigma]$.

Обозначим напряжение в сечении 2-2 через σ_2 . Оно вычисляется по формуле $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$, где A_2 – площадь поперечного сечения 2.

С учетом этого условие прочности примет вид: $\frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]$.

Поперечное сечение 2-2 имеет форму круга, и его площадь вычисляется по формуле: $A_2 = \frac{\pi D^2}{4}$, условие прочности примет вид:

$\frac{4N_2}{\pi D^2} \leq [\sigma]$. Используя это неравенство, выразим параметр D :

$D \geq \sqrt{\frac{4N_2}{\pi[\sigma]}} \approx 22,57 \text{ мм}$. Примем $D=23 \text{ м}$ и определим напряжение, возникающее в сечении 2-2: $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi D^2} \approx 144,5 \text{ МПа}$.

Условие прочности выполняется, так как

$$\sigma_2 = 144,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Пример 3. Расчет статически определимой стержневой системы на растяжение-сжатие

Абсолютно жесткие балки AE и DF конструкции соединены между собой и с опорой B деформируемыми стальными стержнями CD и AB .

Требуется:

Пренебрегая весом балок AE и DF и стержней CD и AB , определить из условия прочности по нормальным напряжениям размеры поперечных сечений стержней CD и AB .

Исходные данные:

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}, P_1 = 10 \text{ кН}, a = 25 \text{ м}.$$

Схема 11 $P_2 = 50 \text{ кН}$

Решение.

1. Изображаем схему конструкции, указав буквенные и числовые значения заданных величин (рис. 2.9а).

2. Определяем продольные силы N_{AB} и N_{CD} с помощью метода сечений. Для этого составим уравнения статического равновесия для каждой из отсеченных частей (Рис. 2.9б и в).

$$\sum M_E(\bar{P}_i) = P_1 a + N_{CD} \sin 45^\circ 2a - N_{AB} 3a = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_F(\bar{P}_i) = P_2 2a - N_{CD} \sin 45^\circ 3a = 0 \quad (2)$$

Теперь из уравнения (2) находим

$$N_{CD} = \frac{P_2 2a}{\sin 45^\circ 3a} = \frac{50 \cdot 2 \cdot 25}{0,7071 \cdot 3 \cdot 25} = 47,14 \text{ кН}$$

и из уравнения (1)

$$N_{AB} = \frac{P_1 a + N_{CD} \sin 45^\circ \cdot 2a}{3a} = \frac{10 \cdot 25 + 47,14 \cdot 0,7071 \cdot 2 \cdot 25}{3 \cdot 25} = 25,56 \text{ кН}$$

Определяем площади и линейные размеры поперечных сечений стержней CD и AB.

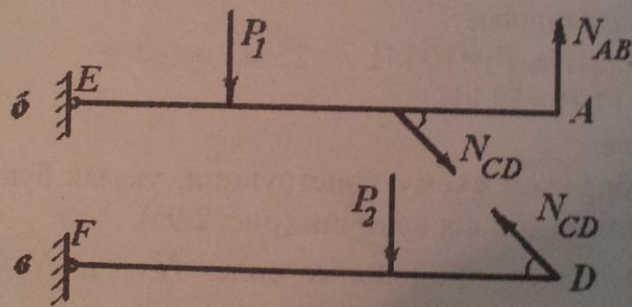
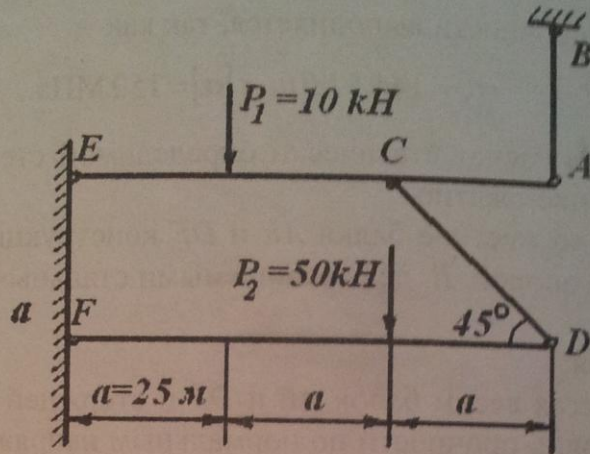


Рис. 2.9

Из условия прочности $\sigma = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma]$ находим минимально необходимые площади поперечных сечений стержней:

$$A_{AB} \geq \frac{N_{AB}}{[\sigma]} = \frac{25,56 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 159,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 159,75 \text{ мм}^2$$

$$A_{CD} \geq \frac{N_{CD}}{[\sigma]} = \frac{47,14 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 294,63 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 294,63 \text{ мм}^2$$

По условию стержень AB имеет квадратное поперечное сечение со стороной b . Находим $b = \sqrt{A_{AB}} = \sqrt{159,75} = 12,64$ мм и принимаем $b = 13$ мм.

Стержень CD имеет круглое поперечное сечение с диаметром d . Находим $d = \sqrt{\frac{4A_{CD}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 294,63}{3,14}} = 19,37$ мм и принимаем $d = 20$ мм.

ЗАДАЧА 1

Стальной ступенчатый стержень (рис.2.10), защемленный одним концом, нагружен внешними силами так, что каждая сила приложена в центре тяжести соответствующего поперечного сечения и направлена вдоль оси стержня.

1. Пренебрегая весом стержня, выполнить проверочный расчет на прочность с коэффициентом запаса прочности $[n] = 1,5$.

2. Если расчетное напряжение отличается от допускаемого больше, чем на 5%, выполнить проектный расчет стержня.

3. Определить перемещение сечения, в котором приложена сила P_1 . Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, A_1, A_2, A_3 - площади поперечных сечений.

Исходные данные приведены в табл.3

Таблица 3

Последняя цифра шифра № схемы на рис.2.10	P_1 , кН	P_2 , кН	l_1 , м	l_2 , м	A_1 , см ²	l_4 , м	P_3 , кН	l_3 , м	A_2 , см ²	A_3 , см ²	Материал стержня	σ_T , МПа
1	60	150	0,2	1,2	5	0,7	100	0,6	14	10	ст 30	300
2	70	140	0,5	0,3	10	0,9	80	1,1	4	8	ст 40	340
3	80	130	0,9	0,6	8	1,0	20	0,4	14	2	ст 45	360
4	90	120	0,8	0,5	16	1,3	60	0,9	8	6	ст 50	380
5	100	70	0,6	0,2	10	0,8	50	1,4	8	5	ст 55	390
6	110	60	1,2	0,7	6	1,1	70	0,6	12	7	ст 60	410
7	120	40	1,0	1,1	10	0,5	110	0,8	8	10	ст 50	380
8	130	30	1,4	0,9	8	0,7	90	0,3	16	8	ст 45	360
9	140	80	1,0	0,8	18	1,4	30	0,6	8	2	ст 40	340
0	150	90	0,7	1,1	6	0,6	40	1,3	20	4	ст 30	300

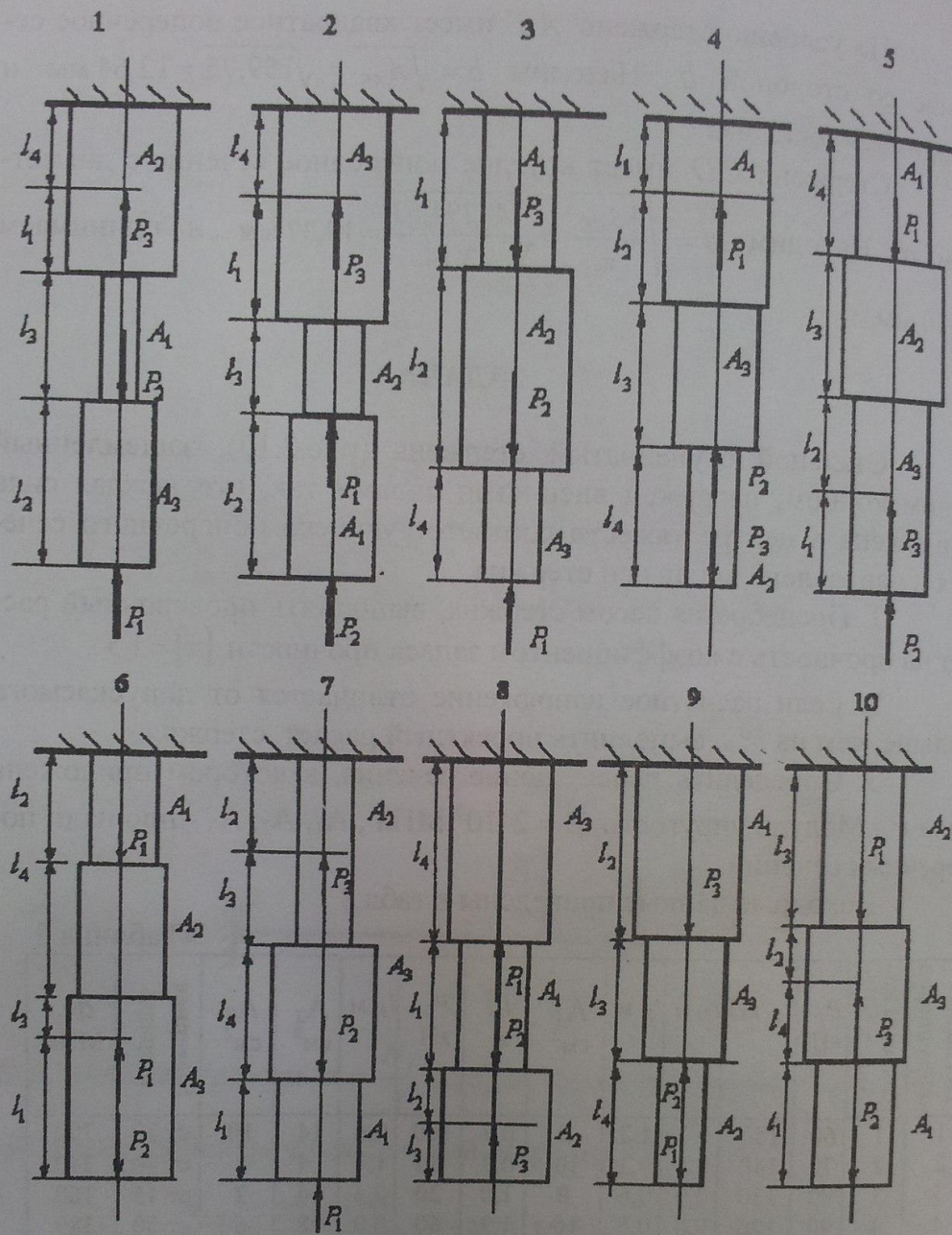


Рис. 2.10

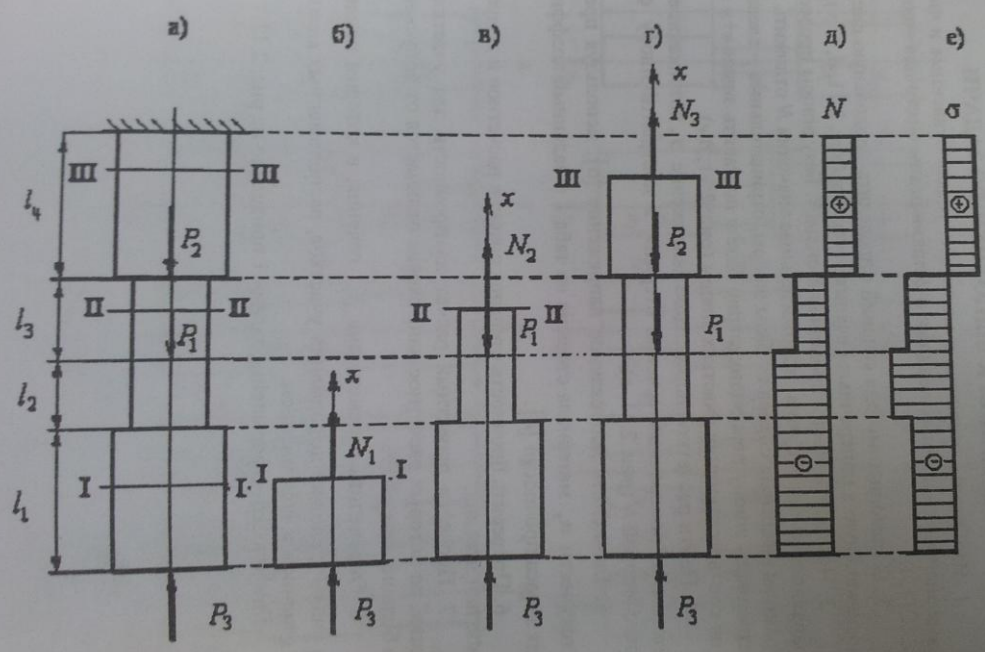


Рис. 2.11

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧИ

1. Изобразить стержень в масштабе, указав буквенные и числовые значения заданных величин и оставив рядом место для эпюр (рис. 2.11, д).

2. С помощью метода сечений определить продольную силу N , возникающую в поперечных сечениях стержня (рис. 2.11, б, в, г).

3. Построить эпюру продольной силы N . Базу эпюры провести параллельно оси стержня; положительные значения N отложить в выбранном масштабе справа от базы эпюры, отрицательные – слева; заштриховать эпюру перпендикулярно базе и поставить знаки «+» и «-» на соответствующих участках эпюры (рис. 2.11, д, е).

4. Найти расчетное нормальное напряжение σ , возникающее в каждом из поперечных сечений стержня, и построить эпюру σ рядом с эпюрой N (рис. 2.11, е).

5. Вычислить допускаемое напряжение $[\sigma]$, используя предел текучести σ_T материала стержня из табл. 1 и заданный коэффициент запаса прочности $[n]$.

6. Проверить прочность стержня, сравнив расчетное и допускаемое напряжения.

7. Провести проектный расчет на прочность для участков стержня, на которых расчетное напряжение отличается от допускаемого больше, чем на 5%.

8. Определить перемещение λ_{P_1} сечения, в котором приложена сила P_1 , сложив деформации участков, расположенных между этим сечением и заземлением.

Графическое оформление задачи 1 приведено на рис. 2.11.