Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания к самостоятельной работе
и контрольные задания для студентов 1-го курса
специальностей 240902, 260202, 260204, 260301,
260302, 260303, 260504
факультета заочного обучения и экстерната

Второе издание, исправленное

Санкт-Петербург
2009

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ, ВЫСЫЛАЕМЫХ НА ПРОВЕРКУ

Студенты 1-го курса ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ специальностей выполняют 4 задания в полном объеме. **Номер варианта контрольного задания совпадает с последней цифрой учебного шифра.** В приведенной ниже таблице указаны номера задач, входящих в каждый вариант.

Номер варианта	Контрольное задание № 1									
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Номер варианта	Контрольное задание № 2		Контрольное задание № 3					Контрольное задание № 4			
1	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191	201
2	102	112	122	132	142	152	162	172	182	192	202
3	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193	203
4	104	114	124	134	144	154	164	174	184	194	204
5	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205
6	106	116	126	136	146	156	166	176	186	196	206
7	107	117	127	137	147	157	167	177	187	197	207
8	108	118	128	138	148	158	168	178	188	198	208
9	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199	209
0	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210

ЗАДАЧИ ПО ТЕМАМ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

I семестр

Основы линейной алгебры
(контрольное задание № 1)

В задачах 1–10 проверить совместность системы линейных уравнений с помощью теоремы Кронекера – Капелли и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом.

1. $\begin{cases} x-2y+3z=4; \\ 2x+3y-4z=1; \\ 3x+y-2z=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y-4z=5; \\ 3x+2y-2z=12; \\ 2x+\frac{5}{2}y-z=17. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3y+5z=1; \\ x+2y-3z=7; \\ 3x-y-2z=5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+3z=-7; \\ 2x+y+2z=-2; \\ 3x+2y+z=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y-z=-7; \\ 3x-y+2z=5; \\ x+4y-3z=-18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+8y+3z=5; \\ 2x+3y+4z=-5; \\ 5x-8y+4z=10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z=7; \\ 2x+y+2z=2; \\ 3x+2y+z=-3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x+4y-3z=-13; \\ -7x+5y+z=-40; \\ 3x+2y+14z=-18. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -4x+5y+8z=41; \\ x+7y-5z=-36; \\ 4x+3y-2z=-11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -3x+2y-6z=-5; \\ 2x+3y+11z=4; \\ -5x-4y+4z=-38. \end{cases}$

В задачах 11–20 проверить совместность системы линейных уравнений с помощью теоремы Кронекера – Капелли и в случае совместности решить ее методом Гаусса. Найти общее решение и выбрать из него какое-нибудь одно частное. Сделать проверку.

11. а) $\begin{cases} x-3y+3z-4t=16; \\ 3x-3y+4z-5t=22; \\ 7x+y+3t=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y-2z=0; \\ 2x-y+10z=0; \\ 3x+4y+4z=0. \end{cases}$

12. а) $\begin{cases} 4x-y+3z=7; \\ 2x+5y+z=15; \\ x+2y+4z=3; \\ 3x-6y-2z=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=0; \\ 2x-2y+6z=0; \\ 5x-5y+15z=0. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} x-y+z-t=-5; \\ 2x+y-4z+t=20; \\ 3x-y+7z+8t=0; \\ 4x-2y+8z+3t=-17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+z=0; \\ 2x+y-z=0; \\ 5x-3y-8z=0. \end{cases}$

14. а) $\begin{cases} x-3y+z+4t=33; \\ 4x+y-z+2t=5; \\ 5x-9y+4z-9t=-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-z=0; \\ x-y+3z=0; \\ x+y-z=0. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} -2y+z-4t+5u=0; \\ 4x+y+2z-t+u=-15; \\ 8x+5z-6t+2u=-30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=0; \\ 4x+2y-z=0; \\ x+5y-10z=0. \end{cases}$

16. а) $\begin{cases} 2x-4y+z+t=-7; \\ x-y+5t=-21; \\ 3x+z-t=10; \\ -x+2y-z+5t=-20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y-z=0; \\ x-2y+z=0; \\ x+y-2z=0. \end{cases}$

17. а) $\begin{cases} 2x-y+13z=-6; \\ x+5y-z=-1; \\ 4x+y-2z=13; \\ 2x-7y-3z=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-z=0; \\ x-y+3z=0; \\ x+y-z=0. \end{cases}$

18. а) $\begin{cases} 4x-y+z-7t+u=14; \\ x-y-5z-3t+2u=2; \\ -2x+12y-z+t-4u=-20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+z=0; \\ 4x+2y-2z=0; \\ 5x-3y-8z=0. \end{cases}$

19. а) $\begin{cases} 3x+2y+z-t=1; \\ 3x+2y+z+t=-1; \\ 3x+2y+z-5t=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+7z=0; \\ 4x+y+5z=0; \\ x+2y-z=0. \end{cases}$

20. а) $\begin{cases} x-y-4z-4t=19; \\ 5y-z+2t=3; \\ 6x+3y-t=16; \\ -7y+3z+t=-21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y-z=0; \\ 2x+6y-2z=0; \\ -4x-12y+4z=0. \end{cases}$

В задачах 21–30 найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей **A**.

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.　　26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

27. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.　　28. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.　　30. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

В задачах 31–40 даны координаты точек A, B, C, определяющих векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ и отрезок $\boldsymbol{m}$. Необходимо найти:

1) модуль вектора $\boldsymbol{a}$;
2) скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$;
3) проекцию вектора $\boldsymbol{c}$ на вектор $\boldsymbol{d}$;
4) косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
5) координаты точки M, делящей отрезок $\boldsymbol{m}$ в отношении λ.

31. $A(4, 3, -2)$, $B(-3, -1, 4)$, $C(2, 2, 1)$, $\boldsymbol{m} = BC$, $\lambda = 2/3$;
$\boldsymbol{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{CB}$.

32. $A(-2, -2, 4)$, $B(1, 3, -2)$, $C(1, 4, 2)$, $\boldsymbol{m} = BA$, $\lambda = 2$;
$\boldsymbol{a} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AC}$.

33. $A(2, 4, 3)$, $B(3, 1, -4)$, $C(-1, 2, 2)$, $\boldsymbol{m} = BA$, $\lambda = 1/4$; 152,8
$\boldsymbol{a} = 4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AC}$.

34. $A(2, 4, 5)$, $B(1, -2, 3)$, $C(-1, -2, 4)$, $\boldsymbol{m} = AB$, $\lambda = 2/3$;
$\boldsymbol{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AB}$.

35. $A(-1, -2, 4)$, $B(-1, 3, 5)$, $C(1, 4, 2)$, $\boldsymbol{m} = AC$, $\lambda = 1/7$;
$\boldsymbol{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AC}$.

17

36. $A(1, 3, 2)$, $B(-2, 4, -1)$, $C(1, 3, -2)$, $\boldsymbol{m} = AB$, $\lambda = 1/2$;
$\boldsymbol{a} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AB}$.

37. $A(2, -4, 3)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(0, 0, -2)$, $\boldsymbol{m} = AC$, $\lambda = 2$;
$\boldsymbol{a} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{CB}$.

38. $A(3, 4, -4)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(2, -3, 1)$, $\boldsymbol{m} = BA$, $\lambda = 2/5$;
$\boldsymbol{a} = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AC}$.

39. $A(0, 2, 5)$, $B(2, -3, 4)$, $C(3, 2, -5)$, $\boldsymbol{m} = AC$, $\lambda = 3/2$;
$\boldsymbol{a} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AB}$.

40. $A(-2, -3, -4)$, $B(2, -4, 0)$, $C(1, 4, 5)$, $\boldsymbol{m} = AB$, $\lambda = 2$;
$\boldsymbol{a} = 4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{BC}$.

В задачах 41–50 даны сила $\boldsymbol{F}$ и две точки A, B. Вычислить:

1) работу силы $\boldsymbol{F}$ для прямолинейного перемещения точки ее приложения из A в B;

2) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

41. $\boldsymbol{F} = \{5, -4, 8\}$; $A(2, 7, -3)$; $B(4, -2, 1)$.

42. $\boldsymbol{F} = \{3, 5, -6\}$; $A(-10, 0, 2)$; $B(5, -6, 12)$.

43. $\boldsymbol{F} = \{-1, 4, -8\}$; $A(1, 2, -8)$; $B(-3, 10, -5)$.

44. $\boldsymbol{F} = \{5, -9, 10\}$; $A(-1, 0, 3)$; $B(2, 13, 0)$.

45. $\boldsymbol{F} = \{8, 3, -2\}$; $A(6, -7, 1)$; $B(11, -1, -4)$.

46. $\boldsymbol{F} = \{-8, 6, -5\}$; $A(7, -4, 10)$; $B(1, 4, 4)$.

47. $\boldsymbol{F} = \{6, 8, 5\}$; $A(-3, -2, 0)$; $B(-1, -4, 2)$.

48. $\boldsymbol{F} = \{4, -2, -3\}$; $A(2, 3, -13)$; $B(4, 1, -9)$.

49. $\boldsymbol{F} = \{-7, -5, 3\}$; $A(3, -6, 8)$; $B(-4, -7, -1)$.

50. $\boldsymbol{F} = \{0, -6, -6\}$; $A(3, -4, -3)$; $B(9, 7, -11)$.

Задачи 51–60 относятся к аналитической геометрии прямых на плоскости XOY.

51. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y - 10 = 0$ и $5x - 3y - 3 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 8.

52. Найти проекцию точки $A(-6, 10)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -4)$ и $C(-7, 3)$.

53. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C.

54. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно прямой BC, где $B(-2, 5)$, $C(4, 7)$.

55. Найти точку, симметричную точке $M(5, -1)$ относительно прямой $3x + 4y + 14 = 0$.

56. Через точку пересечения прямых $6x + y + 9 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

57. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$.

58. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.

59. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $4x - 3y + 12 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

60. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 5)$ и составляющей с осью OX угол: 1) 45°, 2) 90°, 3) 0°.

Задачи 61–70 относятся к аналитической геометрии прямых и плоскостей в пространстве.

61. Найти проекцию точки $C(3, -4, 2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые: $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

62. Даны вершины треугольника $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Составить уравнение его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

63. Найти расстояние от точки $A(1, 2, 3)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

64. Найти проекцию точки $M(2, 1, 1)$ на плоскость $x + y + 3z + 5 = 0$.

65. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$ с плоскостью $x + y - z + 1 = 0$.

66. Найти проекцию точки $A(2, 3, 1)$ на прямую $\frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$.

67. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 3, 5)$ и прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

68. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$ параллельно прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

69. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$.

70. При каких значениях параметров m и n прямая $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ принадлежит плоскости $2mx + 3y - nz - 5 = 0$.

В задачах 71–80 привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду, определить ее тип. Построить график кривой.

71. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

72. $4x^2 + 25y^2 + 4x - 10y - 8 = 0$.

73. $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$.

74. $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$.

75. $2x^2 - 4y^2 + 5x - 6y - 1 = 0$.

76. $4x^2 + y^2 - 40x + 2y + 101 = 0$.

77. $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$.

78. $2x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$.

79. $3x^2 + 4y^2 + 12x - 4y + 1 = 0$.

80. $3x^2 - y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$.

В задачах 81–90 требуется:

а) построить по точкам график функции $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат; значения функции вычислить в точках $\varphi_k = \pi k/8$, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$;

б) построить линию, соединив полученные точки плавной кривой;

в) найти уравнение этой линии в прямоугольной системе координат. $\rho = 4\,(1 - \sin\varphi)$. $\rho = 2\,(1 - \cos 3\varphi)$.

81. $\rho = 3 \sin 6\varphi$.
82. $\rho = 2\,(1 - \cos 3\varphi)$.
83. $\rho = 4 \sin 4\varphi$.
84. $\rho = 5/(2 - \sin\varphi)$.
85. $\rho = 1 - \cos 2\varphi$.
86. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.
87. $\rho = 3/(1 + \sin\varphi)$.
88. $\rho = 2\,(1 - \sin 2\varphi)$.
89. $\rho = 3 \cos 4\varphi$.
90. $\rho = 4 / \cos 2\varphi$.

В задачах 91–100 даны два комплексных числа z_1, z_2. Требуется:

а) вычислить $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, z_1 / z_2, z_2 / z_1;

б) вычислить $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 \pm z_2|$, $|z_1 z_2|$, $|z_1 / z_2|$, $|z_2 / z_1|$;

в) изобразить z_1, z_2, $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, z_1 / z_2 и сопряженные им комплексные числа векторами на комплексной плоскости;

г) записать число z_1 в тригонометрической и показательной форме;

д) найти z_1^{10}, $\sqrt[3]{z_1}$ (три комплексных значения), $\mathrm{Exp}(z_1)$ и $\mathrm{Ln}(z_1)$ (все комплексные значения).

91. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -4 - 7i$.
92. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 4 - 3i$.
93. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 5 + 9i$.
94. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -2 - 8i$.
95. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 5 + 9i$.
96. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -12 - 4i$.
97. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -5 - 4i$.
98. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -4 - 3i$.
99. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 10 - 2i$.
100. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 11 - 4i$.

Введение в анализ
Вычисление пределов функций
(контрольное задание № 2)

В задачах 101–110 задана функция $y = f(x)$. Требуется:

а) выяснить, имеет ли эта функция точки разрыва;

б) в каждой из подозрительных на разрыв точек провести исследование согласно определению непрерывности функции;

в) установив разрыв, указать его тип;

г) сделать схематический чертеж.

101. $y=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x\le 1; \\ 2x, & x>1. \end{cases}$

102. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2; \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

103. $y=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

104. $y=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ (x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

105. $y=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^3, & -1<x<0; \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$

106. $y=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x<2; \\ x+1, & x\ge 2. \end{cases}$

107. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1; \\ 2x, & 1<x\le 3; \\ x+2, & x>3. \end{cases}$

108. $y=\begin{cases} x-3, & x<0; \\ x+1, & 0\le x\le 4; \\ x+3, & x>4. \end{cases}$

109. $y=\begin{cases} 2x^2-1, & x\le 0; \\ x, & 0<x\le 1; \\ x+2, & x>1. \end{cases}$

110. $y=\begin{cases} \sin x, & x<0; \\ x, & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$

114. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

115. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

116. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}{\sqrt{8-x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

В задачах 121–130 найти производную для каждой из заданных функций.

121. а) $y=\sqrt{x^2+8x-3}+\dfrac{7}{(x-1)^3}$; б) $y=\operatorname{arctg}^4 x\cos 7x^4$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$; г) $y=\operatorname{tg}^2(x-2)/\lg(x+3)$;

д) $y=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; е) $y=\dfrac{(x-3)^4\cdot\sqrt{x+7}}{(x+2)^5}$.

122. а) $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}-\dfrac{4}{x-4}$; б) $y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$;

в) $y=\dfrac{e^{3x}}{\text{[illegible]}}$; г) $y=\dfrac{\sin^3(5x+1)}{\text{[illegible]}}$;

123. а) $y=\sqrt[3]{5x^4-3x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$; б) $y=(x+5)^2\arccos^3 5x$;

в) $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$; г) $y=\dfrac{\cos(7x-1)}{\lg(x+5)}$;

д) $y=(\operatorname{arctg} 2x)^{5x}$; е) $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^5}$.

124. а) $y=-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}-\dfrac{3}{(x+2)^3}$; б) $y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$;

в) $y=\dfrac{e^{-\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; г) $y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$;

д) $y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}$; е) $y=\dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.

125. а) $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$; б) $y=(x+2)^7\arccos\sqrt{x}$;

в) $y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}$; г) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$;

д) $y=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$; е) $y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

126. а) $y=\sqrt[5]{(x-2)^2}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$; б) $y=(x-7)^5\arcsin 7x^4$;

в) $y=\dfrac{e^{-\lg 3x}}{4x^2-3x+5}$; г) $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$;

д) $y=(\cos(x+5))^{\operatorname{arsin} 3x}$; е) $y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

В задачах 131–140 для данной функции $y = f(x)$ и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

131. $y = \ln(2 + x^2)$, $x_0 = 0$.

132. $y = e^x \sin 2x$, $x_0 = 0$.

133. $y = \arcsin x$, $x_0 = 0$.

134. $y = x^4 \ln x$, $x_0 = 0$.

135. $y = \cos^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

136. $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.

137. $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$.

138. $y = e^{-x} \cos x$, $x_0 = 0$.

139. $y = \dfrac{1}{2} x^2 e^x$, $x_0 = 0$.

140. $y = x + \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.

В задачах 141–150 найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции $y = f(x)$, заданной: а) неявно; б) параметрически.

141. а) $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

142. а) $3 + \sin y = 5y$; б) $\begin{cases} x = 4t + 2t^2; \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

143. а) $xy = \operatorname{ctg} y$; б) $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

144. а) $\lg y - \dfrac{y}{x} = 7$; б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

145. а) $e^y = 4x - 7y$; б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

146. а) $\sin y = 7x + 3y$; б) $\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

147. а) $y = 7x - \operatorname{ctg} y$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}; \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

148. а) $3y = 7 + xy^3$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}; \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

149. а) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$; б) $\begin{cases} x = e^{-3t}; \\ y = e^{8t}. \end{cases}$

150. а) $y^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

В задачах 151–160 найти пределы заданных функций, пользуясь правилом Лопиталя.

151. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

152. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

153. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x\sqrt{1 - x^2}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(1/x))^x$.

154. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin 3x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} x^{1/x}$.

155. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.

156. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

157. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})^x$.

158. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos(2/x))^x$.

159. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-1}{2\operatorname{arcctg} x^2-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{2}{x}$.

160. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$.

В задачах 161–170 методами дифференциального исчисления исследовать заданную функцию. На основании результатов исследования построить ее график.

161. $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$.

162. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$.

163. $y=x-\ln(x^2+1)$.

164. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$.

165. $y=\ln(x^2-1)$.

166. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

167. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

168. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

169. $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$.

170. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных
(контрольное задание № 4)

В задачах 171–180 найти область определения функций и сделать рисунки. Найти полные дифференциалы первого порядка для указанных функций.

171. а) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$; б) $z = \arcsin\sqrt{xy}$.

172. а) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; б) $z = \arccos(y/x)$.

173. а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$; б) $z = \arcsin\dfrac{x}{2y}$.

174. а) $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$; б) $z = \ln(y^2 - x^2)$.

175. а) $z = \arcsin(x - y)$; б) $z = \dfrac{y}{\sqrt{2 - x + y}}$.

176. а) $z = \dfrac{4xy}{x - 3y + 1}$; б) $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$.

177. а) $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$; б) $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$.

178. а) $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$; б) $z = \arcsin(2x/y)$.

179. а) $z = \ln(2x - y)$; б) $z = \arccos(x - y^2)$.

180. а) $z = \ln(3x^2 - y^2)$; б) $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$.

В задачах 181–190:

а) дана функция $z = f(x, y)$; найти частные производные второго порядка $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$;

б) дана неявная функция $F(x, y, z) = C$; найти частные производные первого порядка $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

181. а) $z=e^{x^2-y^2}$; б) $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$.

182. а) $z=\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$; б) $x^2+y^2+z^2-xy=2$.

183. а) $z=\arcsin(x-y)$; б) $3x-2y+z-xz=5$.

184. а) $z=e^{2x^2+y^2}$; б) $x^2+y^2+z^2-2z-5=0$.

185. а) $z=\arccos(4x-y)$; б) $x+y+z+7=xyz$.

186. а) $z=e^{\sqrt{x+y}}$; б) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z^2-3z=3$.

187. а) $z=\cos(3x^2-y^3)$; б) $x^2+2y^2+3z^2=59$.

188. а) $z=\ln(5x^2-3y^4)$; б) $x^2+y^2+z^2-6x=0$.

189. а) $z=\mathrm{arctg}(x+y)$; б) $x^3+3xyz-z^3=27$.

190. а) $z=\ln(3x^2-2y^2)$; б) $\ln z=x+2y+\ln 3$.

В задачах 191–200 составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке A к поверхности $z=f(x,y)$.

191. $z=2x^2-4y^2$; $A(-2;\ 1;\ 4)$.

192. $z=(x-y)^2-x-2y$; $A(1;\ 1;\ -3)$.

193. $z=x^3-3xy+y^3$; $A(1;\ 1;\ -1)$.

194. $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $A(-3;\ 4;\ 5)$.

195. $z=\sqrt{x^2+y^4}$; $A(0;\ 0;\ 0)$.

196. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; $A(0;\ 1;\ 0)$.

197. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$; $A(-1;\ 1;\ -\pi/4)$.

198. $z=e^{x\cos y}$; $A(1;\ \pi/2;\ 1)$.

199. $z=x^2+y^2$; $A(1;\ 1;\ 2)$.

200. $z=\sin\dfrac{x}{y}$; $A(\pi;\ 1;\ 0)$.

В задачах 201–210 найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке A по направлению, составляющему угол α с градиентом указанной функции в этой точке.

201. $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + 2x - 3y;$ $A(2; 1),$ $\alpha = \pi/3.$

202. $z = \frac{5^{2x+3y}}{\ln 5} + x^2y - 2xy^2 + \frac{x}{x^2 - 3y};$ $A(-2; 1),$ $\alpha = \pi/4.$

203. $z = 5\arcsin\frac{x}{y} - x^2 + 3y^2 + 5xy - 44y - 20x;$ $A(3; 5),$ $\alpha = -\pi/3.$

204. $z = \sqrt[3]{x^2 - y^2 + 8} - 3x^2y^2 + \frac{x}{y} + 48x - 48y;$ $A(2; -2),$ $\alpha = 2\pi/3.$

205. $z = e^{y/x} + y^2 + \frac{x}{3x - 2y - 2} - 4x^2y - 5 - 2x;$ $A(1; 1),$ $\alpha = 3\pi/4.$

206. $z = \frac{3^{3x+2y}}{\ln 3} + xy^2 - 2x^2y - \frac{y}{3x - y^2} - 30x;$ $A(1; -2),$ $\alpha = \pi/4.$

207. $z = 5\arccos\frac{y}{x} - y^2 + 3x^2 + 5xy - 20y - 44x;$ $A(5; 3),$ $\alpha = \pi/3.$

208. $z = 3\cos(3x - y - \frac{\pi}{4}) + x^2y - y - 6x;$ $A(3/2; 2),$ $\alpha = 3\pi/4.$

209. $z = 2\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - 3x + 2) - xy^2 - 2x + 19;$ $A(2; 3),$ $\alpha = 3\pi/4.$

210. $z = \sqrt[3]{8 - x^2 + y^2} - 3x^2y^2 + \frac{y}{x} + 48y - 47x;$ $A(-2; 2),$ $\alpha = 2\pi/3.$