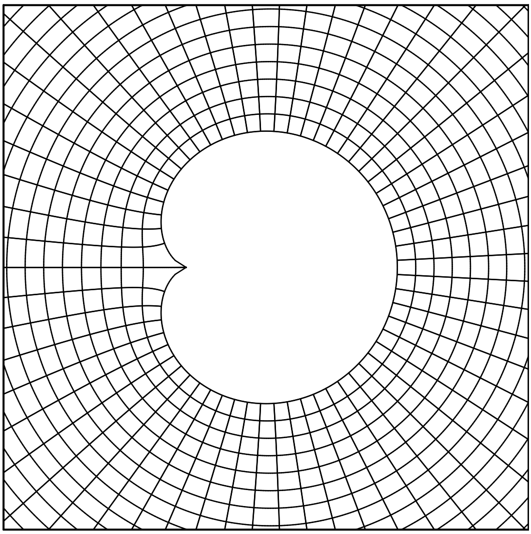
Н. Н. ПОПОВ, Г. А. ПАВЛОВА,
С. В. ГОРБУНОВ

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Практикум



Самара 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Н. Н. ПОПОВ, Г. А. ПАВЛОВА, С. В. ГОРБУНОВ

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Практикум

Самара 2012

Печатается по решению редакционно–издательского совета
Самарского государственного технического университета.

УДК 517.53(075.8)
К63

К63 Комплексный анализ: практикум / *Н. Н. Попов, Г. А. Павлова, С. В. Горбунов* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2012 — 50 с.

Содержит 13 задач по 24 варианта, относящихся к следующим разделам комплексного анализа: действия над комплексными числами, аналитические функции, конформные отображения, ряды Лорана, вычеты функций комплексной переменной.

Приведён демонстрационный вариант с решениями всех типовых задач.

Типовой расчёт предназначен для самостоятельной работы студентов–бакалавров направления 010400 "Прикладная математика и информатика" по курсу "Комплексный анализ".

Рецензент: *к.ф.-м.н. А. Ю. Смыслов*

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие "Комплексный анализ" предназначено для студентов–бакалавров третьего курса направления "Прикладная математика". Понятия и конструкции теории функций комплексной переменной служат основными моделями, источниками и отправными пунктами как различных разделов математики, так и многих прикладных наук. Поэтому очень важно, чтобы студент в большей или меньшей степени овладел этими понятиями. И тем успешнее будет выполнена эта задача, чем большее количество задач студент будет решать самостоятельно.

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов. В пособие включены задачи по всем основным темам комплексного анализа: аналитические функции, ряды Лорана, вычеты функции комплексной переменной, вычисление интегралов с помощью функций комплексной переменной. Одна из задач имеет теоретический характер. Часть задач создана авторами, но в пособие включены также задачи из широко известных изданий, например, из сборника задач по теории функций комплексной переменной Л. И. Волковысского [3]. В пособии рассмотрен типовой вариант с подробными решениями.

На обложке: конформное отображение внешности единичного круга $|z| > 1$ на внешность кардиоиды функцией $w = \left(\frac{1}{\pi}\arccos\frac{z-1}{z+1}\right)^{-2} - 1$; выполнено в пакете Maple с помощью функции conformal.

Порядок выполнения и защиты учебного задания

Подробное и обоснованное решение задач необходимо представить в письменном виде, при этом нумерация задач должна совпадать с их нумерацией в учебном задании. Во время защиты студент должен ответить на теоретические вопросы, выполнить теоретические упражнения, подобные предлагаемым в данном пособии, и пояснить решения примеров из задания.

Теоретические вопросы

1. Определение комплексного числа; геометрическое изображение комплексных чисел; алгебраическая, тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексного числа.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.
3. Операции возведения в целую степень и извлечения корня.
4. Построение кривых и областей на комплексной плоскости.
5. Дифференцирование функции комплексной переменной. Условия аналитичности Коши–Римана.
6. Элементарные функции комплексной переменной и конформные отображения при помощи этих функций.
7. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью интегральной формулы Коши.
8. Разложение функций комплексной переменной в ряд Лорана.
9. Нули и особые точки аналитической функции.
10. Вычеты функции в изолированных особых точках.
11. Применение вычетов для вычисления интегралов по замкнутому контуру.
12. Вычисление несобственных интегралов от рациональных дробей с помощью теории о вычетах.

Теоретические упражнения

1. Пусть A и C действительные, а B — комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Доказать, что уравнение
$$A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0, \quad (A > 0),$$
является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и её радиус.

2. Пусть a — произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Im} a > 0$. Доказать, что величина $\left|\frac{z-a}{z-\overline{a}}\right|$ в верхней полуплоскости меньше единицы.

3. Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой в том и только том случае, когда величина $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ действительна.

4. Пусть точки z_1, z_2, z_3 лежат на окружности с центром в точке $z = 0$. Доказать, что треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 является равносторонним в том и только в том случае, когда $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

5. Доказать, что при любых $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство
$$\left|\sqrt{z^2-1} + z\right| + \left|\sqrt{z^2-1} - z\right| = |z-1| + |z+1|.$$

6. Какие из следующих уравнений являются уравнениями мнимой оси:
а) $|\arg z| = \frac{\pi}{2}$;
б) $z + \overline{z} = 0$;
в) $|z-1| = |z+1|$?

7. Пусть функция $z(y) = x(t) + iy(t)$ дифференцируема и отлична от нуля. Доказать формулу
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \arg z(t) = \operatorname{Im} \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

8. Проверить, является ли функция $v(x, y) = -2\sin 2x \operatorname{sh} y + y$ мнимой частью аналитической функции.

9. Зависит ли интеграл $\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2}\,\mathrm{d}z$ от пути интегрирования? Вычислить этот интеграл.

10. Пусть комплекснозначная функция $z(t)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$. Доказать неравенство

$$\left|\int\limits_a^b z(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant \left|\int\limits_a^b \operatorname{Re} z(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

11. Доказать, что если точка $z = a$ — полюс функции $f(z)$, то для функции $g(z) = e^{f(z)}$ эта точка будет существенно особой.

12. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в точке $z = a$, причём $f(a) \neq 0$, и $\varphi(z)$ имеет в этой точке нуль кратности 2. Чему равен $\operatorname*{res}\limits_{z=a} \dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$?

13. Найти все линейные функции, отображающие нижнюю полуплоскость на верхнюю.

14. Найти общий вид дробно–линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на нижнюю.

15. Доказать, что $\int\limits_0^\infty e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

16. Доказать, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n = \dfrac{1}{z-b}$, $|z| > |b|$.

17. Доказать, что точка $z = \frac{\pi}{2}$ является устранимой особой точкой функции $\dfrac{1}{\cos^2 z} - \dfrac{1}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$.

18. Доказать, что точка $z = \infty$ является существенно особой для функции $\sin z$.

19. Каким условиям должна удовлетворять область D, чтобы отображение $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ в ней было конформным?

20. Доказать конформность отображения $z + e^z$ в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z < 0\}$.

21. Доказать, что каждое дробно–линейное преобразование имеет хотя бы одну неподвижную точку (конечную или бесконечную).

Часть 1. Варианты индивидуальных заданий

Задача 1

Вычислить.

1.1. $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

1.2. $\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

1.3. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}\right)^{12}+(1-i)^{12}$.

1.4. $\left(1+\omega+\omega^2\right)^2$,
где $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1.5. $\left(1+2\omega+\omega^2\right)\left(1+\omega+2\omega^2\right)$,
где $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1.6. $\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$,
где $\varphi=\frac{7\pi}{24}$.

1.7. $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{12}$.

1.8. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)^{12}$.

1.9. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{15}-\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{15}$.

1.10. $\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

1.11. $\frac{(1+i)(3-i)}{3+i}-\frac{(1-i)(3+i)}{3-i}$.

1.12. $\frac{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{12}}{(1+i)^6}$.

1.13. $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}i\right)^8$.

1.14. $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i\right)^{12}$.

1.15. $\frac{(\cos 77^\circ+i\sin 77^\circ)(\cos 23^\circ+i\sin 23^\circ)}{\cos 55^\circ+i\sin 55^\circ}$.

1.16. $\frac{(\cos 58^\circ-i\sin 58^\circ)(\cos 138^\circ+i\sin 138^\circ)}{\cos 55^\circ-i\sin 55^\circ}$.

1.17. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6-\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

1.18. $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^4}+\frac{(3+2i)(6-8i)}{i(1+i)^2}$.

1.19. $\frac{(1+i)^8}{0{,}4(1-i)^8}\left(\frac{2-i}{4+3i}-\frac{1-2i}{3+4i}\right)$.

1.20. $\frac{(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)(\cos 107^\circ+i\sin 107^\circ)}{(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)(\cos 47^\circ+i\sin 47^\circ)}$.

1.21. $(1+i\sqrt{3})(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

1.22. $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}}\right)^4$.

1.23. $\frac{(\cos 28^\circ+i\sin 28^\circ)(\cos 73^\circ+i\sin 73^\circ)}{\cos 56^\circ+i\sin 56^\circ}$.

1.24. $\frac{(1+i)^2(2-i)}{2+i}-\frac{(1-i)^2(2+i)}{2-i}$.

Задача 2

Решить уравнения.

2.1. а) $z^8 + 2iz^4 - 1 = 0$;
б) $z|z| + 4z - 3i = 0$;
в) $\sin 2z = 4i$.

2.2. а) $z^6 + (2+i)z^3 + 1 + i = 0$;
б) $|z|^2 + z|z| + 2 = 2i \operatorname{Im} z$;
в) $\sin z + 2i \cos z = 1$.

2.3. а) $\left(i\sqrt{3} - 1\right) z^4 = 1$;
б) $z^2 + z|z| + 2 = 0$;
в) $\operatorname{sh} 3z = i$.

2.4. а) $z^5 + 4 - 3i = 0$;
б) $z \operatorname{Re} z = |z| + 2i$;
в) $\sin 2z = \frac{i}{4}$.

2.5. а) $z^{10} + z^3 = 0$;
б) $\overline{z} - z^6 = 0$;
в) $e^{2z} + 2e^z + 4 = 0$.

2.6. а) $z^6 + 16iz^3 - 64 = 0$;
б) $2z^2 + z|z| - 3|z|^2 = 0$;
в) $\cos 4z + 4 = 0$.

2.7. а) $z^8 + z^4 - 1 = 0$;
б) $iz + |z| = 3 + i$;
в) $e^{4z} + 2e^{2z} + 2 = 0$.

2.8. а) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$;
б) $z\,(|z| - 2) = i$;
в) $\operatorname{th} 2z = 3$.

2.9. а) $(1+i)z^5 = 1 - i$;
б) $z = \overline{z}^{\,8}$;
в) $e^{2z} + 2\sqrt{3}e^z + 4 = 0$.

2.10. а) $z^8 + 2z^4 + 5 = 0$;
б) $z\,(z + 4|z|) = 15$;
в) $\sin 2z - 2i \cos z - 4 \sin z + 4i = 0$.

2.11. а) $z^5 - z^3 + z^2(1+i) = 1 + i$;
б) $\overline{z}\,(\overline{z} + |z|) + 2 = 0$;
в) $\sin^2 z + (2i - 1) \sin z - 2i = 0$.

2.12. а) $\left(i - \sqrt{3}\right) z^{10} = 4z^2$;
б) $\overline{z} = z^5$;
в) $e^{6z} + 5e^{3z} + 6 = 0$.

2.13. а) $z^8 + 2\left(1 - i\sqrt{3}\right) z^4 - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$;
б) $\overline{z}|z| + 4\overline{z} + 4i = 0$;
в) $2 \operatorname{ctg} 2z = 1$.

2.14. а) $z^8 + 2(3 + 16i)z^4 + 48i = 0$;
б) $z\overline{z}^{\,2} + \overline{z}z^2 = 2(3 + 4z)$;
в) $e^{4z} + 2\sqrt{2}e^{2z} + 4 = 0$.

2.15. а) $z^6 + 4z^3 + 13 = 0$;
б) $2z \operatorname{Im} z = |z|^2 + 8i$;
в) $\cos^2 z + 4 = 0$.

2.16. а) $(1-i)z^6 = 1 + 7i$;
б) $z - \overline{z}^{\,7} = 0$;
в) $e^{2z} + (1+2i)e^z + i - 1 = 0$.

2.17. а) $z^8 - 3z^4 - 4 = 0$;
б) $|z-2|z + 3\operatorname{Re} z + 2i = 0$;
в) $e^{3z} + i + \sqrt{3} = 0$.

2.18. а) $z^6 - 2z^3 - 2 = 0$;
б) $z^2 + 2|z|^2 = 4z - 1$;
в) $e^{2z} + 2ie^z - 4 = 0$.

2.19. а) $z^6 + 2\sqrt{2}(1+i)z^3 + 4i = 0$;
б) $\overline{z}\operatorname{Im} z + |z| = 2z$;
в) $\cos^2 z + 5\cos z + 4 = 0$.

2.20. а) $z^7+(1+i)z^4+2z^3+2+2i=0$;
б) $\overline{z} + 2|z| + 6 = 0$;
в) $\cos 3z = 7$.

2.21. а) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$;
б) $z + |z+1| + i = 0$;
в) $\operatorname{th} z - 1 + i = 0$.

2.22. а) $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$;
б) $|z+1+i|^2 - \overline{z} = 0$;
в) $\sin 2z = i\pi$.

2.23. а) $z^3 - z^2 + iz = i$;
б) $iz + |z-i|^2 = 2$;
в) $2\operatorname{sh} iz = -\sqrt{3}i$.

2.24. а) $z^4 - z^2 - i + 1 = 0$;
б) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$;
в) $2\operatorname{tg} z = i$.

Задача 3

Найти множество точек на комплексной плоскости, которое определяется заданным условием.

3.1. $\operatorname{Im}\dfrac{z+1}{z-i} = 0$.

3.2. $\operatorname{Re}\dfrac{z}{1-z} > 1$.

3.3. $\dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{1-\overline{z}} > 0$.

3.4. $\left|\dfrac{z}{z-1}\right| > 1$.

3.5. $\left|\dfrac{z-1-i}{z+1-i}\right| < 1$.

3.6. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+2i} = 0$.

3.7. $|z-2i|-|z+2i|<2.$

3.8. $\arg \dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0.$

3.9. $\left|\dfrac{z+4i}{z-4i}\right|<1.$

3.10. $\left|\dfrac{z-1+2i}{1-(1+2i)z}\right|<1.$

3.11. $\arg \dfrac{i-z}{z+i}=0.$

3.12. $\dfrac{|z-i|^2}{1+|z|^2}>1.$

3.13. $\operatorname{Im} \dfrac{z-i}{z+i}<1.$

3.14. $\left|\dfrac{z+1-i}{1+(1+i)z}\right|>1.$

3.15. $\operatorname{Im}\left(z^2+\overline{z}\right)>0.$

3.16. $|z-2|<|1-2\overline{z}|\,.$

3.17. $\operatorname{Re} \dfrac{z-1}{\overline{z}}<1.$

3.18. $|z+1|^2 \leqslant \operatorname{Re}\left((z-i)(z-1)\right).$

3.19. $\operatorname{Re} z^2+\operatorname{Im} \overline{z}<1.$

3.20. $\operatorname{Re}\left(z^2-2\overline{z}\right)>3.$

3.21. $\operatorname{Re}\left(z(1-i)\right)<\sqrt{2}.$

3.22. $\operatorname{Re} \dfrac{1+z}{z}>1.$

3.23. $\operatorname{Im} \dfrac{1+z}{z}<1.$

3.24. $\left|\dfrac{z+2-i}{z+i}\right|>\sqrt{2}.$

Задача 4

Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,\,y)$ или мнимой части $v(x,\,y)$ и значению $f(z_0)$, если оно задано.

4.1. $u(x,y)=e^{-x}(x\cos y+y\sin y), \quad f(0)=0.$

4.2. $v(x,y)=3x^2y-y^3+2xy, \quad f(0)=1.$

4.3. $u(x,y)=x^2-y^2+3y+x, \quad f(i)=i.$

4.4. $u(x,y)=\dfrac{1-y^2-x^2}{(1+y)^2+x^2}.$

4.5. $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+2x, \quad f(1+i)=\dfrac{3}{2}.$

4.6. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + x^2 - y^2 - 2xy.$

4.7. $v(x,y) = 2xy - 3x + y, \quad f(0) = 2i.$

4.8. $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\cos x \operatorname{ch} y - 2xy + x.$

4.9. $v(x,y) = -\dfrac{y}{(x+1)^2 + y^2}.$

4.10. $u(x,y) = y\cos y \operatorname{ch} x + x\sin y \operatorname{sh} x.$

4.11. $v(x,y) = e^{-x}(y\cos y - x\sin y).$

4.12. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 2y, \quad f(i) = i.$

4.13. $v(x,y) = 2(\operatorname{ch} x\sin y - xy).$

4.14. $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + x, \quad f(0) = 0.$

4.15. $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} - 2xy + y.$

4.16. $u(x,y) = 2^x\cos(y\ln 2) + x^2 - y^2.$

4.17. $v(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 + (1+y)^2}.$

4.18. $u(x,y) = e^x\cos y - 2xy.$

4.19. $v(x,y) = -e^{-x}\sin y + y^2 - x^2.$

4.20. $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2.$

4.21. $v(x,y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x).$

4.22. $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3, \quad f(0) = i.$

4.23. $v(x,y) = -2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y, \quad f(0) = 2.$

4.24. $u(x,y) = xe^x\cos y - (y+1)e^x\sin y, \quad f(0) = i.$

Задача 5

Найти образ области D при заданном отображении $w(z)$.

5.1. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<\ \arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\},\quad w=\dfrac{z-1}{z+1}.$

5.2. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ \dfrac{\pi}{4}<\ \arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\},\quad w=\dfrac{z-i}{z+i}.$

5.3. $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 1<|z|<2\},\quad w=\dfrac{z-1}{z-2}.$

5.4. $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1\},\quad w=z^2+z.$

5.5. $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ -\pi<\ \arg z<\pi;\ |z|<1\},\quad w=\dfrac{z}{(1+z)^2}.$

5.6. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<\ \operatorname{Im} z<\dfrac{\pi}{2}\right\},\quad w=\operatorname{cth}2z.$

5.7. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ -\dfrac{\pi}{8}<\ \operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{8}\right\},\quad w=\operatorname{tg}2z.$

5.8. $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1;\ \operatorname{Im} z>0\},\quad w=\dfrac{z+i}{z-i}.$

5.9. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<\ \operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{2}\right\},\quad w=\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}.$

5.10. $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1\}\setminus[ai;\,i],\ 0<a<1,\quad w=i\dfrac{(z-i)^2}{z}.$

5.11. $D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1\},\quad w=\dfrac{z}{(1-z)^2}.$

5.12. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z>0;\ \left|z-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}\right\},\quad w=\dfrac{z-1}{z}.$

5.13. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ \left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2};\ |z-1|>1\right\},\quad w=\dfrac{z}{z+1}.$

5.14. $D=\left\{z\in\mathbb{C}\colon\ \left|z-\dfrac{3}{2}\right|>\dfrac{1}{2};\ |z-1|<1\right\},\quad w=\dfrac{z+1}{z-2}.$

5.15. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1;\ \operatorname{Re} z < 0\}, \quad w = \dfrac{3z - i}{3 + iz}.$

5.16. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1;\ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \dfrac{1}{z^2 + 1}.$

5.17. $D = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1;\, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}, \quad w = \dfrac{\left(z^8 + 1\right)^2}{z^8}.$

5.18. $D = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 2;\, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}\right\}, \quad w = \dfrac{z^6 + 1}{2z^3}.$

5.19. $D = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ \dfrac{3}{2} < |z| < 3\right\}, \quad w = \dfrac{z}{z - 3}.$

5.20. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1;\ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \dfrac{1}{z^2 + 1}.$

5.21. $D = \left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}, \quad w = \operatorname{th} z.$

5.22. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0,\, 0 < \operatorname{Im} z < 1\} \setminus \left[\dfrac{i}{2};\ \dfrac{1+i}{2}\right], \quad w = \operatorname{ch} \pi z.$

5.23. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z < 1\}, \quad w = \dfrac{z - 3 + i}{z + 1 + i}.$

5.24. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1;\ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \dfrac{2 + iz}{z - i}.$

Задача 6

6.1. Отобразить на верхнюю полуплоскость область $|z-1| > 1$, $|z+1| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant h$.

6.2. Область, ограниченную окружностями $|z-1| = 1$, $|z+1| = 1$, с разрезом по лучу $2 \leqslant x < +\infty$, $y = 0$ отобразить на верхнюю полуплоскость.

6.3. Отобразить полуполосу $0 < x < \pi$, $y > 0$ с разрезом вдоль отрезка $x = \frac{\pi}{2}$, $0 < y < h$ на верхнюю полуплоскость.

6.4. Найти функцию $w(z)$, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z < 1$ с выкинутым кругом $|z| \leqslant 1$ на верхнюю полуплоскость.

6.5. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку, ограниченную окружностями $|z| = 2$, $|z-1| = 1$.

6.6. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями $|z-1| = 1$, $|z+1| = 1$, с разрезом по отрезку $x = 0$, $-\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ $(\alpha \geqslant 0;\ \beta \geqslant 0)$.

6.7. Отобразить кольцо $\{z \in \mathbb{C}\colon\ 2 < |z| < 5\}$ на кольцо $\{w \in \mathbb{C}\colon\ 4 < |w| < 10\}$ так, чтобы $w(5) = -4$.

6.8. Отобразить полуполосу $0 < x < \pi$, $y > 0$ с разрезом вдоль луча $x = \frac{\pi}{2}$, $h \leqslant y < \infty$ $(h > 0)$ на верхнюю полуплоскость.

6.9. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую "луночку" $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1,\ |z-i| < 1\}$.

6.10. Отобразить на круг $|w| < 1$ область, ограниченную окружностью $|z| = 1$ и прямой $\operatorname{Im} z = 1$ (полуплоскость с выкинутым кругом).

6.11. Отобразить на верхнюю полуплоскость часть плоскости C, которая находится над объединением следующих линий: полупрямых $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ +\infty)$ и части единичной окружности с центром в начале координат, лежащей в нижней полуплоскости.

6.12. Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу $0 < x < 1$ с разрезами вдоль отрезков $0 \leqslant x \leqslant h_1,\ y = 0$ и $1 - h_2 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0$ $(h_1 + h_2 < 1)$.

6.13. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями $|z-1| = 1$, $|z-2| = 2$, с разрезом вдоль отрезка $2 \leqslant x \leqslant a$ $(a < 4)$, $y = 0$.

6.14. Отобразить на верхнюю полуплоскость область $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0,\ |z-1| > 1\} \setminus [2;\ 3]$.

6.15. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую "луночку" $\left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 2,\ \left|z - \sqrt{2}\right| < \sqrt{2}\right\}$.

6.16. Отобразить на верхнюю полуплоскость область $\left\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-2,5| > \frac{1}{2},\ |z-2| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$.

6.17. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую "луночку" $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1,\ |z-i| > 1\}$.

6.18. Отобразить на верхнюю полуплоскость область $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| > 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезами вдоль отрезка $y = 0$, $2 \leqslant x \leqslant a$ и вдоль луча $y = 0$, $b \leqslant x < \infty$ $(a < b)$.

6.19. Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу $0 < x < 1$ с разрезом вдоль отрезка $0 \leqslant x \leqslant h$ $(h < 1)$, $y = 0$.

6.20. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую "луночку" $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1,\ |z-i| > 1\}$.

6.21. Отобразить внешность единичного круга $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}$ с разрезами по отрезкам [-2; -1] и [1; 2] на верхнюю полуплоскость $\{w \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im} w > 0\}$.

6.22. Отобразить на верхнюю полуплоскость область $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0,\ |z| > 1\}$ с разрезом по лучу $(1;\ \infty)$.

6.23. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями $|z+1| = 1$, $|z-i| = 1$ и прямой $\operatorname{Im} z = 0$.

6.24. Отобразить на верхнюю полуплоскость область $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z-i| \geqslant 1\}$.

Задача 7

Вычислить интеграл.

7.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 \, \mathrm{d}z$.

7.2. $\displaystyle\int\limits_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

7.3. $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}\,\mathrm{d}z$.

7.4. $\int\limits_L z^{-2}\,\mathrm{d}z$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

7.5. $\int\limits_{-i}^{1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^2}$, путь интегрирования не проходит через точку i.

7.6. $\int\limits_L e^{\overline{z}}\,\mathrm{d}z$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-\pi i$ и $z_2=\pi$.

7.7. $\int\limits_L \operatorname{Re} z^2\,\mathrm{d}z$, дуга L задана соотношениями $z+\overline{z}=2$, $|\operatorname{Im} z|\leqslant 1$.

7.8. $\int\limits_L \frac{|z|}{|z|+1}\,\mathrm{d}z$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

7.9. $\int\limits_L \overline{z}\,\mathrm{d}z$, L — дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

7.10. $\int\limits_{-i}^{i} ze^{-z^2}\,\mathrm{d}z$.

7.11. $\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z$, $f(z)=y-(x-1)i$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1$ и $z_2=-1+i$.

7.12. $\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z$, $f(z)=x-y^2 i$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1+i$ и $z_2=2-4i$.

7.13. $\int\limits_{0}^{2i}(z+i)e^{-z}\,\mathrm{d}z.$

7.14. $\int\limits_{L}\operatorname{tg} z\,\mathrm{d}z$, L — дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

7.15. $\int\limits_{L}\overline{z}\,\mathrm{d}z$, L — дуга параболы $y=\sqrt{x}$, соединяющая точки $z_1=i$ и $z_2=2+2i$.

7.16. $\int\limits_{L}\operatorname{Im} z\,\mathrm{d}z$, L —ломаная OBA, где $O(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $A(1;\ 1)$.

7.17. $\int\limits_{-i}^{i}\dfrac{\mathrm{d}z}{(2z-i)^2}$, путь интегрирования не проходит через точку $z=\frac{i}{2}$.

7.18. $\int\limits_{0}^{-\frac{\pi i}{2}} z\cos\dfrac{z}{2}\,\mathrm{d}z.$

7.19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi i}{2}} z\sin\dfrac{z}{2}\,\mathrm{d}z.$

7.20. $\int\limits_{L}\dfrac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z$, L — полуокружность $|z|=4$, $\operatorname{Im} z>0$.

7.21. $\int\limits_{i}^{i+1}(\sin iz+z)\,\mathrm{d}z.$

7.22. $\int\limits_{L} z\operatorname{Im} z^2\,\mathrm{d}z$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-1+i$ и $z_2=i$.

7.23. $\int\limits_L z \operatorname{Re} z^2 \, \mathrm{d}z$, L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 - 2i$.

7.24. $\int\limits_L \dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, L — верхняя дуга окружности $|z| = 1$.

Задача 8

Вычислить интеграл, используя интегральную формулу Коши.

8.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z(z+2)^2}$.

8.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{z+i}{z^2(z-2)} \, \mathrm{d}z$.

8.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z}{z^2-2z+2} \, \mathrm{d}z$.

8.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1+i|=3} \frac{z+1}{(z^2+9)^2} \, \mathrm{d}z$.

8.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{z-2}{z^3+3z^2-4z} \, \mathrm{d}z$.

8.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{2z-1}{z^2+2z+5} \, \mathrm{d}z$.

8.7. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=5} \frac{z^2+1}{z^2-6z+9} \, \mathrm{d}z$.

8.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{4}} \frac{z-1}{4z^3+4z^2+z} \, \mathrm{d}z$.

8.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-3i|=3} \frac{z}{z^2-4z+13} \, \mathrm{d}z$.

8.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z-4|=2} \frac{z+2}{(z-1)(z^2-10z+25)} \, \mathrm{d}z$.

8.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{z+2}{z^2(z-3)} \, \mathrm{d}z$.

8.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} \, \mathrm{d}z$.

8.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z}{z^4-8z^2-9} \, \mathrm{d}z$.

8.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z}{z^3-1} \, \mathrm{d}z$.

8.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^3+1} \, \mathrm{d}z$.

8.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1{,}5} \frac{z-2}{(z^2+1)(z^2-1)} \, \mathrm{d}z$.

8.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{z}{z^3-2z^2+2z-1}\,\mathrm{d}z.$

8.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2{,}5} \frac{z-1}{z^3-z^2-6z}\,\mathrm{d}z.$

8.19. $\displaystyle\oint\limits_{|z+4|=2} \frac{z}{(z+1)(z+3)^3}\,\mathrm{d}z.$

8.20. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z+1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}\,\mathrm{d}z.$

8.21. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1+i|=2} \frac{\sin z}{z^3+16z}\,\mathrm{d}z.$

8.22. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}\,\mathrm{d}z.$

8.23. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z+2)(z-1)^3}.$

8.24. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z(2-z)^3}\,\mathrm{d}z.$

Задача 9

Разложить функцию в ряд Лорана в указанной области D плоскости C.

9.1. $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)^2},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<|z-i|<2\}.$

9.2. $f(z)=\dfrac{1}{z^2\left(z^2+9\right)},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 1<|z-1|<2\}.$

9.3. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<|z+1|<3\}.$

9.4. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)^2},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 1<|z-1|<2\}.$

9.5. $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+4\right)},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|>2\}.$

9.6. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(1-z)},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<|z|<1\}.$

9.7. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 1<|z|<2\}.$

9.8. $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-2)(z+3)^2},\quad D=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 2<|z|<3\}.$

9. 9. $f(z) = \dfrac{(z+2)^2}{z(z-1)^2}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}.$

9. 10. $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^2}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| < 1\}.$

9. 11. $f(z) = \dfrac{2+i}{(z+1)(z-2)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 2\}.$

9. 12. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + z - 2}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| > 3\}.$

9. 13. $f(z) = \dfrac{z}{z^3 - 3z + 2}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 2\}.$

9. 14. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(z-1)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}.$

9. 15. $f(z) = \dfrac{3z+1}{(z+3)^2(z-5)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 3 < |z| < 5\}.$

9. 16. $f(z) = \dfrac{z^2+6}{z(z-3)^2}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| < 3\}.$

9. 17. $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3 + z^2 - 5z + 3}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 2 < |z-1| < \infty\}.$

9. 18. $f(z) = \dfrac{5-4z}{(z+1)(z-2)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 2 < |z-1| < 3\}.$

9. 19. $f(z) = \dfrac{3z+8}{(z+5)(z-2)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 3 < |z+1| < 4\}.$

9. 20. $f(z) = \dfrac{z+i}{(z+2i)(z-i)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z+i| < 2\}.$

9. 21. $f(z) = \dfrac{-4+2i}{(z-1-2i)(z-5)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| > 4\}.$

9. 22. $f(z) = \dfrac{3iz^2}{z^2 - 5iz - 4}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 4\}.$

9. 23. $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+1)^2}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z+2| < 1\}.$

9. 24. $f(z) = \dfrac{(1-i)z-5}{iz^2 + (3-2i)z - 6}, \quad D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 3\}.$

Задача 10

Найти вычеты функции.

10. 1. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$.

10. 2. $f(z)=\dfrac{e^z}{z\left(z^2+1\right)}$.

10. 3. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-i)^2}$.

10. 4. $f(z)=(z+1)\cos\dfrac{1}{(z+1)^2}$.

10. 5. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z-1)^3}$.

10. 6. $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin^2 z\cos z}$.

10. 7. $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin z\cos\left(\frac{z}{2}+1\right)}$.

10. 8. $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2(z+i)}$.

10. 9. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+4\right)}$.

10. 10. $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{z}{z+1}}$.

10. 11. $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2}$.

10. 12. $f(z)=\sin z\sin\dfrac{1}{z}$.

10. 13. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

10. 14. $f(z)=e^{\frac{z^2-1}{z}}$.

10. 15. $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z}$.

10. 16. $f(z)=\dfrac{z}{z^3+1}$.

10. 17. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+2z+2}$.

10. 18. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z(\cos z+1)}$.

10. 19. $f(z)=\dfrac{\sin z+1}{z\cos z}$.

10. 20. $f(z)=\dfrac{z}{z^3-1}$.

10. 21. $f(z)=\dfrac{1}{z\left(e^{2z}-1\right)}$.

10. 22. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-9}\cos\dfrac{z-1}{z+1}$.

10. 23. $f(z)=z^2\cos\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}\right)$.

10. 24. $f(z)=\dfrac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$.

Задача 11

Вычислить интеграл с помощью теории вычетов.

11.1. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z^3+z)(z^2+4)}.$

11.2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z^3+5z)(2z-\pi)}\,dz.$

11.3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\,dz.$

11.4. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+4}\,dz.$

11.5. $\displaystyle\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{2z-3}{z^3+9z}\,dz.$

11.6. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-2}{z^3-2z^2+z}\,dz.$

11.7. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+8z^2-9}\,dz.$

11.8. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z}{\cos z(2\sin z-1)}\,dz.$

11.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{\sin z}{z^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz.$

11.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1+2i|=1} \frac{z-1}{z^2-2z+5}\,dz.$

11.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z}{z^3+1}\,dz.$

11.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)^2}\,dz.$

11.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2 z^2}\,dz.$

11.14. $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=5} \frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{(z+1)(z-3)^2}\,dz.$

11.15. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1{,}5} \frac{z}{e^{z^2}-1}\,dz.$

11.16. $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}\,dz.$

11.17. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \sin z \sin\frac{1}{z}\,dz.$

11.18. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1{,}5} \frac{\operatorname{ch} 2z}{z^2(z+2)(z-1)}\,dz.$

11. 19. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 2z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z^2+7z+12)^2}$.

11. 20. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\mathrm{d}z}{(z-3)\,(z^4-1)}$.

11. 21. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}z$.

11. 22. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{e^{iz}+i}\,\mathrm{d}z$.

11. 23. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2\,(e^{2z}-1)}$.

11. 24. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\operatorname{tg} z}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z$.

Задача 12

Вычислить интегралы.

12. 1. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2x}{x(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x$.

12. 2. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0$.

12. 3. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+10)^3}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^4+1}\,\mathrm{d}x,\ a>0$.

12. 4. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

12. 5. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(4x^2+1)\,(x^2+1)^2}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2-4}{x^2+4}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$.

12. 6. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+5x^2+4)^2}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

12.7. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+25)^2}\,\mathrm{d}x$.

12.8. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

12.9. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2-9}{x^2+9}\cdot\frac{\sin 3x}{x}\,\mathrm{d}x$.

12.10. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)(x^2+1)^2}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x\,(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$.

12.11. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+2x+10)^2}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

12.12. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^4}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{(9x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

12.13. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(4x^2+9)^8}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2\cos bx}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

12.14. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^4}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2x}{x\,(x^2+16)}\,\mathrm{d}x$.

12.15. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^5+1}\,\mathrm{d}x$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+9)\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

12.16. а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+16)^5}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+4x+13)(x^2+6x+10)}\,\mathrm{d}x$.

12.17. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x\sin 2x}{(x^2+1)\,(x^2+4)\,(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$.

12. 18. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\,(x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{(x^2+6x+13)(x^2+10x+29)}\,\mathrm{d}x$.

12. 19. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^9+1}$; б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)\,(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$.

12. 20. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^7+1}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+4)\,(x^2+25)}\,\mathrm{d}x$.

12. 21. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos x}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$.

12. 22. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4-10x^2-9}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(2-x)}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

12. 23. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(1-2x)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

12. 24. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+16)}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+x}{x^4+1} \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Задача 13

13. 1. Вычислить сумму $\sin x + r\sin(x+\alpha) + r^2 \sin(x+2\alpha) + \ldots,\ r < 1$.

13. 2. Показать, что если путь интегрирования обходит начало координат, то

$$\int\limits_{1}^{r} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \ln r + i\varphi + 2\pi k,$$

где $z = re^{i\varphi}$, k — целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат.

13.3. Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$. Записать условия Коши–Римана в полярных координатах.

13.4. Доказать, что если $|a| \neq R$, то $\displaystyle\int\limits_{|z|=R} \frac{|\,\mathrm{d}z|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$.

13.5. Вычислить сумму $\cos x + r\cos(x+\alpha) + \ldots + r^n\cos(x+n\alpha)$.

13.6. Доказать, что $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2bx\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$, $a > 0$.

13.7. Пусть z_1 и z_2 — произвольные комплексные числа, а a_1 и a_2 — действительные числа, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Доказать неравенства

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - \left|z_1^2 + z_2^2\right| \leqslant 2\frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + \left|z_1^2 + z_2^2\right|.$$

Указание. Ввести вспомогательный угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1}{a_2}$; представить оцениваемое выражение в виде $A + B\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha$ и найти его наибольшее и наименьшее значения.

13.8. Доказать, что произвольное комплексное число z, удовлетворяющее условиям $|z| = 1$ и $z \neq -1$, может быть единственным образом представлено в виде $z = \frac{1+i\xi}{1-i\xi}$, где $\xi \in \mathbb{R}^1$.

13.9. Доказать, что если $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$, то для любого натурального n справедливо $z^n + z^{-n} = 2\cos n\alpha$.

13.10. Показать, что если однолистная функция $w = f(z)$ конформно отображает единичный круг $|z| < 1$ на ограниченную область D плоскости W, то площадь S области D вычисляется по формуле $\displaystyle S_D = \iint\limits_{|z|<1} \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

13.11. Доказать формулу $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos k\varphi = 2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n \cos\frac{n\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

13.12. Пусть функция $f(z) = u + iv$ и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset C$. Доказать, что якобиан преобразования от переменных (x, y) к переменным (u, v) вычисляется по формуле $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left|\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$.

13.13. Пусть функция $f(z) = u + iv$ и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset C$. Доказать, что функция $f(z)$ аналитична в области D тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

13.14. Доказать следующее утверждение: если $f(z)$ аналитична в полосе $0 \leqslant y \leqslant h$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x + iy) = 0$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ существует, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x + ih)\,\mathrm{d}x$ также существует, и эти интегралы равны между собой.

13.15. Доказать следующее утверждение: если $f(z)$ аналитична в угле $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$, $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ существует, то $\int f(z)\,\mathrm{d}z$ вдоль луча $z = re^{i\alpha}$, $0 \leqslant r \leqslant \infty$ также существует, и эти интегралы равны между собой.

13.16. Показать, что если путь не проходит через точки $\pm i$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi^2+1} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k — целое число.

13.17. Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром C; $z_1,\ z_2,\ \ldots\ ,\ z_n$ — различные произвольные точки внутри C, и $\omega_n(z) = (z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot\ldots\cdot(z - z_n)$. Показать, что интеграл

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

есть многочлен $(n-1)$-ой степени, совпадающий с $f(z)$ в точках $z_1,\ z_2,\ \ldots\ ,\ z_n$ (многочлен $P(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа).

13. 18. Пусть $f(z)$ аналитична в круге $\{z \in \mathbb{C}:\ |z| < R\}$ и непрерывна в замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leqslant R\}$. Вычислить интеграл $\iint\limits_{r<|z|<R} f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $r > 0$.

Указание. Применить теорему о среднем.

13. 19. Согласно теореме Лиувилля, функция $f(z)$, аналитическая и ограниченная во всей плоскости, является постоянной. Доказать эту теорему, вычислив интеграл $\int\limits_{|z|=R} \dfrac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z$, $(|a| < R,\ |b| < R)$ и произведя его оценку при $R \to \infty$.

13. 20. Функция $f(z)$ — аналитическая в области, ограниченной простым замкнутым контуром C, содержащим внутри себя начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви $\mathrm{Ln}\, z$ справедливо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f'(z)\,\mathrm{Ln}\, z\ \mathrm{d}z = f(z_0) - f(0),$$

где z_0 — начальная точка интегрирования.

Указание. Интегрировать по частям.

13. 21. Доказать, что уравнение

$$az^3 - z + b = e^{-z}(z+2)$$

при $a > 0$, $b > 0$ не имеет корней в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

13. 22. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в точке $z = a$ и $f(a) = g(a) = 0$. Доказать, что

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{g'(z)f^2(z)}{f'(z)g^2(z)}.$$

13. 23. Пусть функция $z(t)$ дифференцируема и отлична от нуля. Доказать формулу

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{z(t)}{|z(t)|} = i\frac{z(t)}{|z(t)|}\,\mathrm{Im}\,\frac{z'(t)}{z(t)}.$$

13. 24. Пусть функция $f(z)$ непрерывна во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через γ_a прямолинейный отрезок, идущий из точки a в точку $a+1$. Доказать, что

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{\gamma_a} f(z)\,\mathrm{d}z = f(\infty).$$

Часть 2. Методические указания к решению задач

Задача 1

Вычислить $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}}{2}\right)^6$.

Решение

Заметим, что $7-4\sqrt{3}=4-2\cdot 2\sqrt{3}+3=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$, и наше выражение приобретает вид

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^6=z^6,$$

где $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Представим z в тригонометрической форме, чтобы можно было использовать первую формулу Муавра:

$$z^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in\mathbb{N}.$$

В нашем случае

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=1,$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\,.$$

Найдём $\operatorname{tg}2\varphi$ по известной из тригонометрии формуле:

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^2}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Таким образом,

$$2\varphi = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi = 15^\circ;$$

$$z = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ \quad \Rightarrow \quad z^6 = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}}{2}\right)^6 = i.$

Задача 2

Решить уравнения:

а) $z^4 - \sqrt{3} + i = 0$;

б) $z^3 + 2|z| = \operatorname{Re} \overline{z}^{\,3} + 8$;

в) $\sin z = 2$.

Решение

а) $z^4 - \sqrt{3} + i = 0$.

Множество решений уравнения $z^4 = \sqrt{3} - i$ совпадает с множеством всевозможных различных значений $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$.

Так как

$$r = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi = \arg\left(\sqrt{3} - i\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

то $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i \sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right)$, $k = \overline{0,\ 3}$.

Подставляя вместо k значения 0, 1, 2, 3, находим четыре корня уравнения.

Ответ:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right), \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24} + i \sin\frac{11\pi}{24}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24} + i \sin\frac{23\pi}{24}\right), \quad z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i \sin\frac{35\pi}{24}\right).$$

б) $z^3 + 2|z| = \operatorname{Re} \overline{z}^{\,3} + 8.$

$$z = x + iy \quad \Rightarrow$$

$$(x+iy)^3 + 2\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{Re}(x-iy)^3 + 8;$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3 + 2\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{Re}\left(x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + iy^3\right) + 8;$$

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3 + 2\sqrt{x^2+y^2} = x^3 - 3xy^2 + 8;$$

$$\left(3x^2y - y^3\right) i + 2\sqrt{x^2+y^2} = 8.$$

Сравнивая действительные и мнимые части левой и правой сторон уравнения, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными величинами x и y — действительной и мнимой частями искомого числа z:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 4, \\ 3x^2y - y^3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы $y = 0$ и $y = \pm\sqrt{3}x$. Подставим $y = 0$ в первое уравнение системы:

$$\sqrt{x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4.$$

Таким образом, получили два решения $z_{1,2} = \pm 4$.

Подставим $y = \pm\sqrt{3}x$ в первое уравнение системы:

$$\sqrt{4x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2|x| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2.$$

Получаем ещё четыре решения: $z_{3,4} = \pm 2 \pm 2\sqrt{3}i$ и $z_{5,6} = \pm 2 \mp 2\sqrt{3}i$.

Ответ: $z_{1,2} = \pm 4$, $z_{3,4} = \pm 2 \pm 2\sqrt{3}i$, $z_{5,6} = \pm 2 \mp 2\sqrt{3}i$.

в) $\sin z = 2.$

Воспользуемся определением элементарной функции комплексной переменной $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Домножая обе части уравнения на величину e^{iz}, получаем:

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно e^{iz}, находим, что

$$e^{iz} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i \Leftrightarrow iz = \mathrm{Ln}\left(\left(2 \pm \sqrt{3}\right) i\right) \Leftrightarrow z = -i\,\mathrm{Ln}\left(\left(2 \pm \sqrt{3}\right) i\right).$$

Пользуясь определением логарифма

$$z = -i\left(\ln\left|\left(2 \pm \sqrt{3}\right) i\right| + i\left(\arg\left(\left(2 \pm \sqrt{3}\right) i\right) + 2\pi k\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

получаем два множества решений.

Ответ: $z_1 = -i\left(\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$z_2 = -i\left(\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3

Найти множество точек на комплексной плоскости, которое определяется следующим условием: $\left|\frac{z+1-i}{z-1+i}\right| < 1$.

Решение

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$|z + 1 - i| < |z - 1 + i|.$$

Запишем последнее в виде

$$|x + iy + 1 - i| < |x + iy - 1 + i|,$$

$$|x + 1 + i(y - 1)| < |x - 1 + i(y + 1)|,$$

откуда имеем:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} < \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}.$$

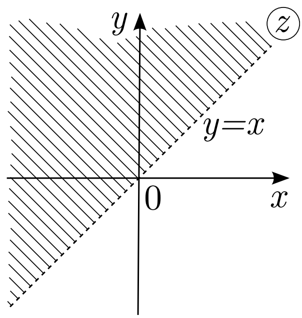


Рис. 1.

После возведения обеих частей неравенства в квадрат получаем

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 < x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < y.$$

Это неравенство задаёт полуплоскость (рис. 1).

Задача 4

Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x + y$.

Решение

Воспользуемся условиями Коши–Римана аналитичности функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Первое условие даёт

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3.$$

Проинтегрируем полученное выражение по переменной y:

$$v(x, y) = 2xy - 3y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Используем второе условие Коши–Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y - \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из условия задачи находим, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1.$$

Следовательно,

$$-2y + \varphi'(x) = -2y + 1, \quad \varphi'(x) = 1, \quad \varphi(x) = x + C.$$

Таким образом, $v(x, y) = 2xy - 3y + x + C$.

Ответ: $f(z) = x^2 - y^2 - 3x + y + i(2xy - 3y + x + C) = z^2 - 3z + i\overline{z} + Ci.$

Задача 5

Найти образ области $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-1| < 1,\ |z-i| < 1\}$ (рис. 2) при отображении $w = \frac{1}{z}$.

Решение

Найдём образ границы области D при отображении w. Это можно сделать двумя способами.

Способ первый. Подставляя в уравнения окружностей $|z-1| = 1$ и $|z-i| = 1$ функцию $w = \frac{1}{z}$, получим

$$|1-w| = |w| \quad \text{и} \quad |1-iw| = |w|.$$

Так как $w = u + iv$, то

$$|1-u-iv| = |u+iv| \quad \text{и} \quad |1+v-iu| = |u+iv|;$$

$$(1-u)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \quad \text{и} \quad u^2 + (1+v)^2 = u^2 + v^2.$$

Решив эти уравнения, получим $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$. Значит функция $w = \frac{1}{z}$ отображает окружности $|z-1| = 1$, $|z-i| = 1$ соответственно на прямые $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$.

Способ второй.

Используем круговое свойство дробно–линейного отображения: дробно–линейное отображение $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $c \neq 0$, переводит окружности и прямые, проходящие через точку $z = -\frac{d}{c}$, в прямые. Согласно круговому свойству образами обеих окружностей будут являться прямые. Для их построения достаточно найти образы каких-нибудь двух точек. На первой окружности $|z-1| = 1$

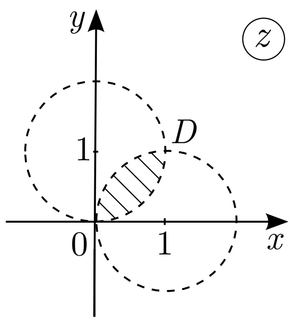


Рис. 2.

возьмём две точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 1 + i$. Учитывая равенства $w(1) = \frac{1}{2}$, $w(1+i) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, делаем вывод, что образом первой окружности является прямая $u = \frac{1}{2}$. На второй окружности $|z - i| = 1$ расположены точка $z_3 = 2i$, переходящая при отображении $w = \frac{1}{z}$ в точку $w(2i) = -\frac{i}{2}$, и точка $z_4 = 1 + i$, переходящая в точку $w(1+i) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Сравнивая образы точек z_3 и z_4, заключаем, что вторая окружность переходит в горизонтальную прямую $v = -\frac{1}{2}$.

Итак, образом границы области D являются две прямые $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$, разделяющие плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на четыре области. Поскольку точке $z = 0,5(1+i)$, принадлежащей области D, соответствует точка $w = \frac{1}{0,5(1+i)} = 1 - i$, то образом области D является область, содержащая точку $w = 1 - i$ (рис. 3).

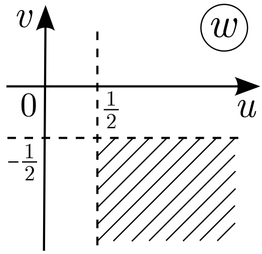


Рис. 3.

Задача 6

Найти функцию $w(z)$, отображающую на верхнюю полуплоскость область $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{\pi i}{2};\ \frac{\pi i}{2} + 1\right]$ (рис. 4).

Решение

Функция $w = e^z$ отображает прямую $x = x_0$ в окружность $|w| = e^{x_0}$, а прямую $y = y_0$ в луч $\arg w = y_0$. Следовательно, функция $w_1 = e^z$ отображает область D на верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом и разрезом $\left[e^{\frac{\pi i}{2}};\ e^{\frac{\pi i}{2}+1}\right] = [i;\ ei]$ (область D_1 на рис. 5).

Далее используем конформные отображения типовых областей, осуществляемые элементарными аналитическими функциями. Функция

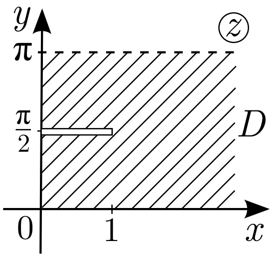


Рис. 4.

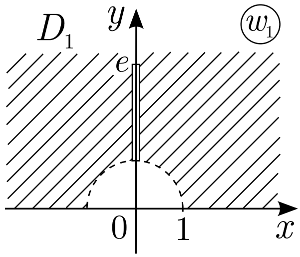


Рис. 5.

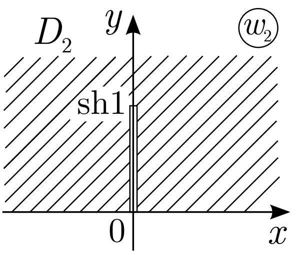


Рис. 6.

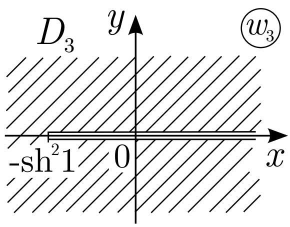


Рис. 7.

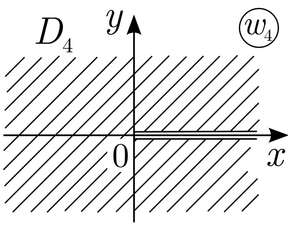


Рис. 8.

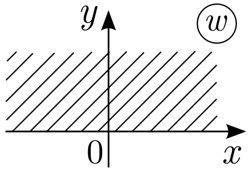


Рис. 9.

Жуковского $w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$ отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость с разрезом $[0;\, i\operatorname{sh}1]$ (область D_2 на рис. 6). Используем функцию $w_3 = w_2^2$, которая отображает область D_2 на всю плоскость с разрезом по лучу $[-\operatorname{sh}^2 1;\, +\infty)$ (рис. 7). При помощи параллельного переноса $w_4 = w_3 + \operatorname{sh}^2 1$ всех точек плоскости на $\operatorname{sh}^2 1$ разрез $[-\operatorname{sh}^2 1;\, +\infty)$ переходит в разрез $[0;\, +\infty)$ (рис. 8). Преобразование $w = \sqrt{w_4}$ отображает плоскость с разрезом по лучу $[0;\, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость (рис. 9).

Искомая функция $w(z)$ имеет вид

$$w = \sqrt{w_3 + \operatorname{sh}^2 1} = \sqrt{w_2^2 + \operatorname{sh}^2 1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)^2 + \operatorname{sh}^2 1} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^z + \frac{1}{e^z}\right)^2 + \operatorname{sh}^2 1}.$$

Ответ: $w = \sqrt{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 1}$.

Задача 7

Вычислить интеграл

$$\int\limits_L |z|\, z^{-2}\, \mathrm{d}z,$$

где L — верхняя дуга окружности $|z| = 2$, обход кривой L против часовой стрелки.

Решение

Подынтегральная функция является непрерывной функцией, но не аналитической. Уравнение верхней дуги окружности в параметрической форме имеет вид

$$z = 2e^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Учитывая, что $\overline{z} = 2e^{-it}$, $\mathrm{d}z = 2ie^{it}$, получаем

$$\int\limits_L |z|\, z^{-2}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi 2 \cdot 4e^{-2it} \cdot 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = 16i\int\limits_0^\pi e^{-it}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -16e^{-it}\Big|_0^\pi = -16\left(e^{-i\pi} - 1\right) = -16(-1-1) = 32.$$

Ответ: $\int\limits_L |z|\, z^{-2}\,\mathrm{d}z = 32.$

Задача 8

Вычислить интеграл, используя интегральную формулу Коши,

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z.$$

Решение

Внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi$. Построим многосвязную область D, ограниченную окружностью $\Gamma = \{z : \ |z-1| = 3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \{z : \ |z| = \rho\}$ и $\gamma_2 = \{z : \ |z-\pi| = \rho\}$ $(0 < \rho < 4-\pi)$. Тогда в этой области D функция $f(z) = \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}$ является аналитической, и интеграл по внешнему контуру Γ равен сумме интегралов по внутренним контурам γ_1 и γ_2 (обход всех контуров против часовой стрелки):

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z.$$

Используя интегральную формулу Коши для функции

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

и её производных

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

(z_0 — точка, лежащая внутри контура), получаем

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\ \frac{e^z}{(z-\pi)^3}\bigg|_{z=0} = -\frac{2\pi i}{\pi^3} = -\frac{2i}{\pi^2},$$

$$\oint\limits_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}\ \left(\frac{e^z}{z}\right)''\bigg|_{z=\pi} = \pi i\ \frac{e^z(z^2-2z+2)}{z^3}\bigg|_{z=\pi} = \frac{e^\pi(\pi^2-2\pi+2)}{\pi^2}i.$$

Ответ: $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^z}{z(z-\pi)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{e^\pi(\pi^2-2\pi+2)-2}{\pi^2}i.$

Задача 9

Разложить в ряд Лорана в области $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z+2| < 5\}$ функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - z - 6}$.

Решение

Разложим данную функцию на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 6} = \frac{z}{(z+2)(z-3)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-3},$$

или $z = A(z-3) + B(z+2)$. Полагая $z = 3$, получаем $3 = 5B$, т. е. $B = \frac{3}{5}$; $z = -2$, имеем $-2 = -5A$, $A = \frac{2}{5}$. Таким образом,

$$f(z) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Первое слагаемое уже является разложением в ряд Лорана в области D, а второе слагаемое представим в виде

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(z+2)-5}=-\frac{3}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2}{5}}.$$

Так как по условию $\left|\frac{z+2}{5}\right|<1$, то выражение $\frac{1}{1-\frac{z+2}{5}}$ можно разложить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Ответ: $f(z)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2}-\frac{3}{25}\cdot\left(1+\frac{z+2}{5}+\frac{(z+2)^2}{5^2}+\ldots+\frac{(z+2)^n}{5^n}+\ldots\right).$

Задача 10

Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2(z+i)}$.

Решение

Изолированными особыми точками для данной функции являются точки $z_1=0$ и $z_2=-i$, в которых знаменатель обращается в нуль. Причём, точка $z_1=0$ является полюсом второго порядка, а $z_2=-i$ — простым полюсом.

Применяя формулу для вычисления вычета относительно полюса второго порядка, находим

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\big(z^2 f(z)\big)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+z+1}{z+i}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(2z+1)(z+i)-\big(z^2+z+1\big)}{(z+i)^2}=\frac{i-1}{i^2}=-i+1.$$

Так как точка $z_2=-i$ является простым полюсом, то

$$\operatorname{res} f(-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2+z+1}{z^2}=\frac{i^2-i+1}{i^2}=\frac{-i}{-1}=i.$$

Ответ: $\operatorname{res} f(0)=1-i$, $\operatorname{res} f(-i)=i$.

Задача 11

С помощью теории вычетов вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z+2}{z^3-3z^2+z-3}\,\mathrm{d}z.$$

Решение

Согласно основной теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k),$$

где z_k — особые точки, лежащие внутри контура Г.

Разлагая знаменатель на множители

$$z^3-3z^2+z-3 = z^2(z-3)+(z-3) = (z^2+1)(z-3) = (z-i)(z+i)(z-3),$$

видим, что особыми точками являются $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3$. Все они — простые полюсы. Внутри окружности $|z-i| = 3$ лежат только первые две точки. Вычислим вычеты в этих точках.

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z+2}{(z+i)(z-3)} = \frac{i+2}{2i(i-3)},$$

$$\operatorname{res} f(-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z+2}{(z-i)(z-3)} = \frac{2-i}{2i(i+3)}.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z+2}{z^3-3z^2+z-3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{i+2}{2i(i-3)} + \frac{2-i}{2i(i+3)}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{i+2}{i-3} + \frac{2-i}{i+3}\right) = \frac{(i+2)(i+3)+(2-i)(i-3)}{-1-9}\pi = -\frac{10}{10}i\pi = -\pi i.$$

Ответ: $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z+2}{z^3-3z^2+z-3}\,\mathrm{d}z = -\pi i.$

Задача 12

Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8}$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Решение

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8}$.

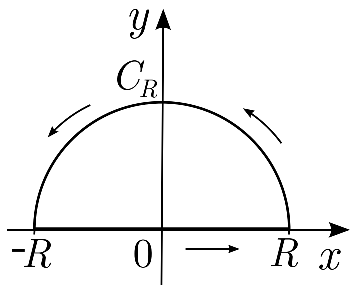


Рис. 10.

Под знаком интеграла стоит чётная функция, поэтому

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8}.$$

Рассмотрим интеграл $\oint\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8}$, где C — контур, изображённый на рис. 10. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} = \int\limits_{-R}^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} + \int\limits_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{res}_{z=a_k} \frac{1}{1+z^8},$$

где a_k, $k=\overline{1,\,n}$, — все особые точки подынтегральной функции внутри контура C. Пусть R выбрано настолько большим, что все особые точки функции $f(z) = \frac{1}{1+z^8}$ в верхней полуплоскости попадают внутрь контура C.

Теперь оценим интеграл $\int\limits_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8}$, используя известную оценку интеграла

$$\left|\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M\cdot L_C,$$

где $M = \max\limits_{z\in C} |f(z)|$; L_C — длина контура C. Сначала оценим подынтегральную функцию:

$$\left|1+z^8\right| \geqslant \left|1-|z|^8\right| = \left|1-R^8\right| \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+z^8} \leqslant \frac{1}{|1-R^8|} \sim \frac{1}{R^8} \text{ при } R \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\left| \int\limits_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^8} \right| \leqslant M(R)\cdot \pi R \sim \frac{1}{R^7}.$$

Значит, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \dfrac{dz}{1+z^8} = \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{R^7} = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^8} = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=a_k} \dfrac{1}{1+z^8}$.

Найдём теперь все особые точки функции $f(z) = \frac{1}{1+z^8}$, лежащие в верхней полуплоскости. Решим уравнение $z^8+1=0$, используя вторую формулу Муавра.

$$z^8 = -1 \quad \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{8} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{8},\; k = \overline{0,\,7}.$$

Нам нужны только четыре корня, лежащие в верхней полуплоскости:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{8}}, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{8}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

Все корни простые, поэтому для функции $f(z) = \frac{1}{1+z^8}$ это будут простые полюсы. При вычислении вычетов используем формулу для простых полюсов:

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}, \quad \text{при условии, что } \varphi(a) \neq 0.$$

Тогда,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{8z^7}\bigg|_{z=z_k} = \frac{\pi i}{4}\left(\frac{1}{e^{\frac{7\pi}{8}i}} + \frac{1}{e^{\frac{21\pi}{8}i}} + \frac{1}{e^{\frac{35\pi}{8}i}} + \frac{1}{e^{\frac{49\pi}{8}i}} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{4}\left(e^{-\frac{7\pi}{8}i} + e^{-\frac{21\pi}{8}i} + e^{-\frac{35\pi}{8}i} + e^{-\frac{49\pi}{8}i}\right) = \frac{\pi i}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{8} - i\sin\frac{7\pi}{8} +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{21\pi}{8} - i\sin\frac{21\pi}{8} + \cos\frac{35\pi}{8} - i\sin\frac{35\pi}{8} + \cos\frac{49\pi}{8} - i\sin\frac{49\pi}{8}\right).$$

Используя формулы приведения, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} = \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) = \pi\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8} = \pi\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^8} = \frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{8}}.$

б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

Заметим, что интеграл несобственный I и II рода одновременно. Но в особой точке $x = 0$ подынтегральная функция ограничена, а в особой точке $x = +\infty$ бесконечно малая функция $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^3}$ эквивалентна функции $\frac{1}{x^3}$, значит интеграл сходится.

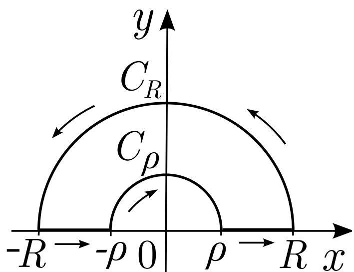


Рис. 11.

Для вычисления искомого интеграла воспользуемся интегралом от функции комплексного переменного вида

$$I = \int\limits_{C} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}\,\mathrm{d}z,$$

где C — контур, изображённый на рис. 11. Так как внутри контура C подынтегральная функция аналитическая, то по интегральной теореме Коши $I = 0$. С другой стороны, интеграл I распадается на четыре интеграла:

$$I = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-R}^{-\rho} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int\limits_{C_\rho^-} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_R} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

В интеграле I_2 сделаем замену $x = -t$ и объединим этот интеграл с I_1:

$$I_1 + I_2 = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3}\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\rho}^{R} \frac{e^{-3it} - 3e^{-it} + 2}{t^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2i \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

По известной тригонометрической формуле $\sin 3x - 3\sin x = -4\sin^3 x$. Таким образом,

$$I_1 + I_2 = -8i \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Рассмотрим интеграл I_4:

$$I_4 = \int\limits_{C_R} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz}}{z^3}\,\mathrm{d}z + 2\int\limits_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^3}.$$

Оба интеграла стремятся к нулю при $R \to +\infty$: первый по лемме Жордана, второй в силу того, что при замене $z = Re^{i\varphi}$ ($\varphi \in [0;\, \pi]$) получится величина бесконечно малая при $R \to +\infty$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Перейдём к интегралу I_3. Прежде чем его решить, разложим в окрестности точки $z=0$ числитель подынтегральной функции по формуле Тейлора, используя формулу

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + o\left(t^n\right).$$

$$e^{3iz} - 3e^{iz} + 2 = -3z^2 - 4z^3 i + o\left(z^3\right).$$

Тогда,

$$I_3 = \int\limits_{C_\rho^-} \frac{-3z^2 - 4z^3 i + o\left(z^3\right)}{z^3}\,\mathrm{d}z = -3\int\limits_{C_\rho^-} \frac{\mathrm{d}z}{z} - 4i\int\limits_{C_\rho^-} \mathrm{d}z + \int\limits_{C_\rho^-} \frac{o\left(z^3\right)}{z^3}\,\mathrm{d}z.$$

Все эти интегралы можно вычислить с помощью замены $z = \rho e^{i\varphi}$ ($\varphi \in [\pi; 0]$):

$$\int\limits_{C_\rho^-} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = i\int\limits_{\pi}^{0} \mathrm{d}\varphi = -\pi i.$$

$$\int\limits_{C_\rho^-} \mathrm{d}z = i\rho\int\limits_{\pi}^{0} e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\rho \underset{\rho\to 0}{\to} 0.$$

Все последующие интегралы будут иметь ещё более высокую степень ρ. Итак, $I_3 = 3\pi i - 8\rho i + o\left(\rho\right)$.

Таким образом,

$$I = -8i\int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x + 3\pi i - 8\rho i + o\left(\rho\right) + o\left(\frac{1}{R}\right) = 0.$$

Устремим $\rho \to 0$, $R \to +\infty$:

$$-8i\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x + 3\pi i = 0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}.$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Бицадзе, А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного [Текст] / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
2. **Иванов, В. И.** Конформные отображения и их приложения [Текст] / В. И. Иванов, В. Ю. Попов. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 324 с.
3. **Волковысский, Л. И.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного — 4-е изд., перераб. [Текст] / Л. И. Волковысский, Г. А. Лунц, И. Г. Араманович. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 312 с.
4. **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — СПб.: Лань, 2002. — 749 с.
5. **Леонтьева, Т. А.** Задачи по теории функций комплексного переменного [Текст] / Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов. — М: Изд-во МГУ, 1992. — 255 с.
6. **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах [Текст] / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — М: Высшая школа, 2001. — 445 с.
7. **Свешников, А. Г.** Теория функций комплексного переменного [Текст] / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 336 с.
8. **Шабунин, М. И.** Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Текст] / М. И. Шабунин, Е. С. Половинкин, М. И. Карлов. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 362 с.

Оглавление

Учебное издание
Комплексный анализ

Составители
ПОПОВ Николай Николаевич,
ПАВЛОВА Галина Александровна,
ГОРБУНОВ Сергей Владимирович

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 18.04.2012
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,0.
Тираж 80 экз. Рег. №71/12

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус № 8.