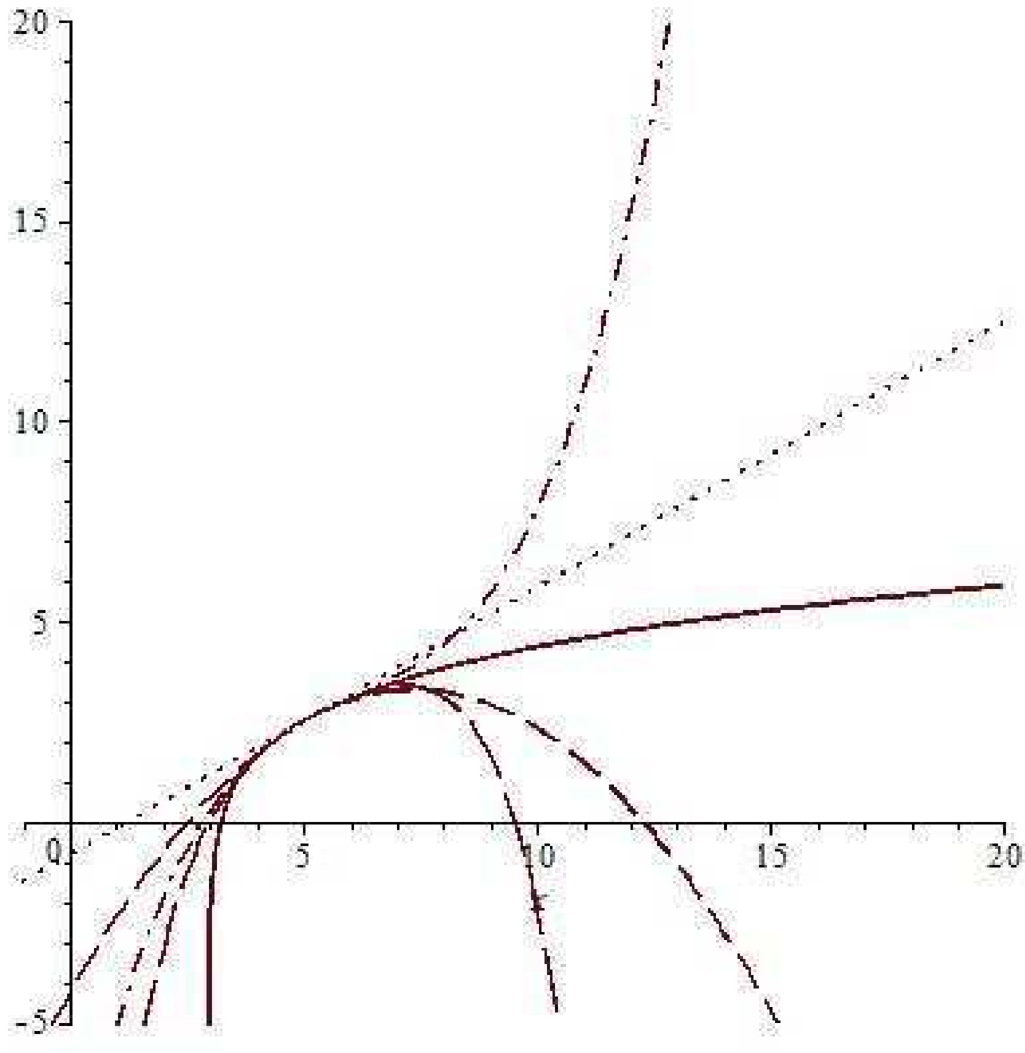
Типовой расчет по математике

Ряды

6 модуль

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2013

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Сейферт И.В., Холодова С.Е.

Типовой расчет по математике

Ряды

6 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2013

Сейферт И.В., Холодова С.Е. Типовой расчет **“Ряды”. 6 модуль**. Учебно-методическое пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 75 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов технических специальностей второго курса.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 25.06.2013, протокол №5.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

Содержание

Введение

Во втором семестре в рамках шестого модуля студенты очной формы обучения изучают тему «Ряды».

Типовой расчет по этой теме содержит 30 вариантов, каждый из которых включает шесть заданий по основным разделам. Перед заданиями помещены краткий теоретический обзор темы и методические указания, а также приведены подробные решения наиболее типичных задач. Авторы рекомендуют студентам перед выполнением заданий типового расчета повторить теорию и разобрать приведенные решения.

Рекомендуемая литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (в 3-х томах), СПб: Лань, 2009.
2. Блинова И.В., Виноградова Т.Н., Кубенский А.А., Панкратова Т.Ф., Петрашень А.Г., Попов И.Ю. Ряды / Методические указания по решению задач. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009.
3. Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики / Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009.

Содержание расчетных заданий

I. Исследование на сходимость числовых рядов:

1. Исследоватьряд с неотрицательными членами на сходимость (2 ряда).
2. Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную сходимость.
3. Исследовать ряд на абсолютную сходимость и вычислить сумму ряда с точностью α .

II. Определение области сходимости функциональных рядов.

III. Разложение функции в ряд Тейлора в некоторой точке.

IV. Вычисление интегралов с помощью рядов.

V. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье, построение графика функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье.

VI. Для заданной графически функции *f(t)* построить ряд Фурье в комплексной форме, изобразить график суммы построенного ряд.

VII*.[1] С помощью преобразования Фурье решить краевую задачу.
VIII*. Исследовать на сходимость комплексные ряды.

[1] Задания VII* и VIII* не являются обязательными.

Числовые ряды

Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, u_n, $s_n \in R$, n=1, 2, …, где

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$,

называется рядом, или бесконечной суммой, и обозначается

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$,

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ называются членами ряда, а элементы последовательности $\{s_n\}$ – его частичными суммами.

Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, то он называется ***суммой ряда***. В этом случае ряд называется ***сходящимся***, и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Если же последовательность частичных сумм не стремится к конечному пределу, то ряд называется ***расходящимся***.

Необходимый признак сходимости: если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю. Обратное утверждение не является верным, так как существуют расходящиеся ряды, у которых последовательность членов стремится к нулю. Например, гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то для любых $\lambda \in R, \mu \in R$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n)$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется *n*-ым остатком данного ряда.

Если n-й остаток ряда сходится, то его сумму будем обозначать r_n, т.е.

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}.$$

Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда сходится, то сам ряд также сходится, причем, если

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k},$$

то при любом $n = 1, 2, \dots$ $s = s_n + r_n$.

Если члены ряда неотрицательны, то он сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.

Интегральный признак Коши сходимости ряда: если функция f неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geq 1$, то для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Признак сравнения: пусть $0 \leq u_n \leq v_n$. Тогда:

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Следствие. Пусть $u_n \geq 0, v_n > 0, n = 1, 2, \dots,$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$. Тогда:

1) *если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $0 \leq l < +\infty$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;*
2) *если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $0 < l \leq +\infty$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.*

Признак Даламбера: пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_n, u_n > 0, n = 1, 2, \dots,$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда,

если $l < 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$сходится,

если $l > 1$, ряд расходится.

Признак Коши радикальный: пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots,$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда, если $l < 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$сходится,

если $l > 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \in R$ называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, u_n \in R$, сходится. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \in R$ сходится, а ряд из абсолютных величин его членов расходится, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \in R$ сходится *условно*.

Абсолютно сходящийся ряд сходится. Линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд.

Среди знакопеременных рядов выделяют знакочередующиеся, т.е. ряды, соседние члены которых имеют противоположные знаки. Конечно же, свойства знакопеременных рядов для них сохраняются. Но знакочередующиеся ряды имеют еще и свой признак сходимости – признак Лейбница. Если принять, что $a_n \geq 0$, такой ряд можно записать в виде:

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ или } \sum_{0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Теорема Лейбница: если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ и $u_n \geq u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \cdots > 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ то знакочередующийся ряд

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

сходится.

Следствие теоремы Лейбница: любая частичная сумма s_n знакочередующегося ряда отличается от его суммы s на величину, меньшую следующего члена u_{n+1}. Другими словами, абсолютная величина остатка ряда не превышает абсолютной величины его первого члена, т.е.

$$|r_n| = |s - s_n| \leq u_{n+1}.$$

<u>Замечание</u>. *Часто удобно сразу же исследовать знакопеременный ряд на абсолютную сходимость с помощью признаков Даламбера или Коши. Если этими признаками установлено, что ряд, составленный из абсолютных*

величин членов заданного ряда, сходится, то данный знакопеременный ряд сходится абсолютно. Если же признаки Даламбера или Коши устанавливает расходимость абсолютного ряда, то данный знакопеременный ряд не может сходиться даже условно, т.к. $|u_{n+1}| > |u_n|$*, и ряд расходится.*

Примеры решения заданий по теме «Числовые ряды»

1. Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} + \cdots$$

Решение.

Функция $\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ при $x \geq 1$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно использовать интегральный признак Коши. Находим:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Big|_1^{\infty}$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Таким образом, соответствующий несобственный интеграл сходится, значит и наш исходный ряд сходится.

2. Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2^2}{5^2\sqrt{3}} + \frac{3^3}{7^3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} + \cdots$$

Решение.

Оценим общий член a_n данного ряда:

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} < \frac{n^n}{(2n)^n} = \frac{1}{2^n} \text{ для всех } n \in N.$$

Ряд $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и потому сходится. Таким образом, по признаку сравнения и наш исходный ряд сходится.

3. Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4!!}+\frac{3}{6!!}+\cdots+\frac{n}{(2n)!!}+\cdots$$

Решение.

Используем признак Даламбера:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{(2n+2)!!}:\frac{n}{(2n)!!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n)!!}{n(2n+2)!!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2n+2}=0<1.$$

Значит, ряд сходится.

4. Исследовать ряд на сходимость

$$3+\frac{3^2 2!}{2^2}+\frac{3^3 3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n n!}{n^n}+\cdots$$

Решение.

Используем признак Даламбера:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n^n}{3^n n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Таким образом, ряд расходится.

5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^n+n^3+1)}{4^n+\sin n+\ln^2(n+1)}$$

Решение.

Общий член данного ряда обозначим

$$a_n = \frac{(e^n + n^3 + 1)}{4^n + \sin n + \ln^2(n+1)}.$$

Найдем такую бесконечно малую последовательность, эквивалентную последовательности $\{a_n\}$, для которой исследование на сходимость соответствующего ряда является элементарным.Согласно следующим соотношениям сравнения скоростей роста основных элементарных функций

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \qquad \beta > 0, \qquad \alpha \in R;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0, \quad a > 1, \qquad \beta \in R,$$

имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{4^n} = 0.$$

Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{4^n} = 0$, так как последовательность $\left\{\frac{\sin n}{4^n}\right\}$ представляет собой произведение бесконечно малой $\left\{\frac{1}{4^n}\right\}$ последовательности и ограниченной $\{\sin n\}$. Отсюда в силу свойств эквивалентных бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей получаем

$$a_n = \frac{(e^n + n^3 + 1)}{4^n + \sin n + \ln^2(n+1)} \sim \frac{e^n}{4^n} = \left(\frac{e}{4}\right)^n, \qquad n \to \infty.$$

Так как геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n, \left(q = \frac{e}{4} < 1\right)$,сходится, то, согласно предельному признаку сравнения, исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^n + n^3 + 1)}{4^n + \sin n + \ln^2(n+1)}$$

так же сходится.

6. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}$$

Решение.

Применим предельный признак Даламбера

$$a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)},$$

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4) \cdot (5n+1)} = a_n \cdot \frac{3n+2}{5n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+1} = \frac{3}{5} < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$$

Решение.

Используя эквивалентность $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, n \to \infty$, вычисляем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = +\infty,$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e} = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} = e^0 = 1.$

Согласно предельному радикальному признаку Коши, исследуемый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$$

расходится.

8. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$$

Решение.

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость ряд, составленный из модулей членов исходного ряда:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

С помощью признака Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)^3}{2^{n+1}n^3} = \frac{1}{2} < 1,$$

значит ряд сходится. Отсюда следует, что и знакочередующийся ряд сходится и притом абсолютно.

9. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n \cdot \sin n\alpha)}{2^n}.$$

Решение.

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость, т.е. рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n(n \cdot \sin n\alpha)}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot |\sin n\alpha|}{2^n}.$$

Сравним его почленно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Так как $|\sin n\alpha| \le 1$, то

$$\frac{n \cdot |\sin n\alpha|}{2^n} \le \frac{n}{2^n}.$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отсюда по признаку сравнения получаем, что абсолютный ряд сходится, а значит сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n \cdot \sin n\alpha)}{2^n},$$

и притом абсолютно.

10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln^2 n}{n}$$

Решение.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln^2 n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}.$$

Из неравенства $\ln^2 n \geq \ln^2 2$, верного при $n = 2, 3, \ldots$, вытекает справедливость следующего неравенства:

$$\frac{\ln^2 n}{n} \geq \frac{\ln^2 2}{n}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$. В силу признака сравнения делаем вывод о расходимости этого ряда, поэтому исследуемый ряд не является абсолютно сходящимся. Выясним, имеет ли место условная сходимость. Так как данный ряд является знакочередующимся, докажем для него выполнение условий признака Лейбница. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n} = 0$. Покажем, что при некотором выборе натурального числа n_0последовательность $\left\{\frac{\ln^2 n}{n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ будет невозрастающей. Для этого рассмотрим функцию $\phi(x) = \frac{\ln^2 x}{x}, x \geq 1$, и вычислим её производную:

$$\phi'(x) = \frac{2\ln x\frac{1}{x}x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}.$$

Видно, что $\phi'(x) < 0$ при $x > e^2$. Поэтому функция $\phi(x)$ убывает в промежутке $(e^2, +\infty)$,а также убывает последовательность $\left\{\frac{\ln^2 n}{n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$.

Согласно признаку Лейбница, ряд $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln^2 n}{n}$ сходится, и, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln^2 n}{n}$. Итак, исследуемый ряд сходится условно.

11. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}+\cdots$$

Вычислить сумму этого ряда с точностью $\alpha = 0{,}01$.

Решение.

Все условия теоремы Лейбница в данном случае выполнены: ряд знакочередующийся, его члены по модулю монотонно убывают и стремятся к нулю. Поэтому данный ряд сходится. Кроме того, этот ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3}+\cdots$$

Сходимость последнего устанавливается по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Для того чтобы найти с точностью 0,01 сумму данного ряда надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда весь остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет также меньше 0,01.

Для данного ряда модуль четвертого члена

$$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}<0{,}01,$$

поэтому с точностью 0,01:

$$S=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=\frac{57}{64}=0{,}89\pm 0{,}01.$$

Варианты заданий

I.	*1. Исследовать ряд на сходимость*	*3. Исследовать ряд на абсолютную сходимость*
№	*2. Исследовать ряд на сходимость*	*4. Исследовать ряд на абсолютную сходимость и вычислить сумму ряда с точностью α*
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+2}}{n^3 \sin^2 n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{4^n}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{n/2}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n(2n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{\ln(1+n)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(2n)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^2}$, $\alpha = 0{,}001$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2^n}{4^n}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\sqrt[5]{n^2}}{3^n+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi n\right)}{n^3+2n}$, $\alpha = 0{,}001$
4	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2-3}}{n^2+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos^2 n}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \cdot \frac{n}{5^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2n}}$, $\alpha = 0{,}0001$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt[4]{n^7-3n^2+5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{6n^2}$

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{(n+1)!} \cdot \sin\frac{2}{3^n}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^n}$, $\alpha = 0{,}001$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+2n-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^5-3n^2+2n}}$
	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(4n)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$, $\alpha = 0{,}01$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5+n^3-7}}{n^3+3n^2-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{1}{n}}$
	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2-n+n^2}$, $\alpha = 0{,}001$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{3n+2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi+n}{5^n}$
	$\sum\limits_{n=4}^{\infty} \sqrt[5]{n}\left(\frac{n-3}{3n+1}\right)^{5n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!}$, $\alpha = 0{,}001$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7-n^3+5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi n}{2n+1}}{\sqrt{3n-1}}$
	$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{7}\right)^n$, $\alpha = 0{,}001$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2-3n+1}}{\sqrt[3]{n}}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[5]{n^3-2}}$
	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\ln(3n-1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n\cdot(n+1)!}$, $\alpha = 0{,}001$

11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}}$	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sqrt[3]{n^5}}{(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \quad \alpha = 0{,}001$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + \sin\frac{n\pi}{4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n-1}\right)^n \cdot (n+1)^2$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n(n+1)}, \quad \alpha = 0{,}001$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos\pi n}{2n^2-1}$	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\ln n}$
	$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(n-2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n)!}, \quad \alpha = 0{,}00001$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{\pi n}{6}}{2^n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$
	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2 n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{9}\right)^n, \quad \alpha = 0{,}01$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+3} - \sqrt{n^3-5n^2-7}}{\sqrt{n^5+2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}\sqrt{n^2+3}}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3(n+1)!}, \quad \alpha = 0{,}001$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n+n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^n(n+2)}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n (n+2)^2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \alpha = 0{,}001$

17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{5n+\ln n}}$
	$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5^n}, \quad \alpha = 0{,}0001$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3^n}{\sqrt{n^3+n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n+1)2^{2n+1}}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{5^n(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n)!}, \quad \alpha = 0{,}001$
19	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cos\frac{2\pi}{5n}}{\sqrt[3]{n^5-n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^5}{(2n-1)!}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(2n)!}, \quad \alpha = 0{,}0001$
20	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^2-2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{7^n(n-1)!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(n^2+1)^2}, \quad \alpha = 0{,}001$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 3n}{\sqrt[5]{n^7}}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n-1)}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(3n-2)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{5^n}, \quad \alpha = 0{,}001$
22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[6]{7n^7-5n^3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{4^n}, \quad \alpha = 0{,}1$

23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^n}{3^{n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}$
	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+6)\ln^2(5n+1)}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-4)!},\quad \alpha=0{,}0001$
24	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$
	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2+1)}{(n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+1}{n^2},\quad \alpha=0{,}01$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}$	$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+5)\ln n}$
	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-5}{15n+2}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!},\quad \alpha=0{,}0001$
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n n^2}{n^4-n^2+1}$
	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{(4n^2-1)^2},\quad \alpha=0{,}001$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi}{n}}{n(n+1)(n+2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+2)}$
	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!},\quad \alpha=0{,}01$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}n\,sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$
	$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2},\alpha=0{,}01$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$

	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}, \quad \alpha = 0{,}001$
30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{\sqrt{n^3}}$
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \quad \alpha = 0{,}001$

Функциональные ряды. Область сходимости ряда.

Степенной ряд.

Рассмотрим ряды, члены которых являются функциями, т.е. ряды вида

$$\sum_{1}^{\infty} u_n(x).$$

Ряд $\sum_1^\infty u_n(x)$ называется ***сходящимся в точке*** $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum_1^\infty u_n(x_0)$. Ряд называется ***сходящимся на множестве X***, если он сходится в каждой точке этого множества.

Будем называть ***областью сходимости*** данного ряда множество всех тех значений *x*, при которых он сходится, и областью расходимости – совокупность значений, делающих его расходящимся.

Ряд $\sum_1^\infty u_n(x)$ называется ***абсолютно сходящимся на множестве X***, если на этом множестве сходится ряд

$$\sum_{1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Так же как и у числовых рядов, сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

называется его *n-й частичной суммой;* предел частичных сумм сходящегося на X ряда называется его *суммой* $s(x)$:

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x).$$

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

называется его *n-м остатком*. Он сходится на *X* тогда и только тогда, когда на *X* сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Если в этом случае обозначить сумму остатка ряда через $r_n(x)$, то сумму ряда можно представить в виде
$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Степенным рядом называется ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, x \in R, x_0 \in R$. С помощью замены переменного $v=x-x_0$ этот ряд может быть преобразован к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Первая теорема Абеля: если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится при $x = x_0$, то при любом x таком, что $|x| < |x_0|$, ряд сходится абсолютно.

Следствие. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке x_0, то в любой точке x такой, что $|x| > |x_0|$, он также расходится.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Он всегда сходится в точке $x=0$. Обозначим через X множество всех таких действительных неотрицательных чисел $x \in$R, в которых ряд сходится. Поскольку $0 \in$X, то X $\neq \varnothing$. Пусть R=supX. Очевидно, что $0 \leq R \leq +\infty$.

Число R=supX называется ***радиусом сходимости***, а интервал $\{x: |x| \leq R\}$ - ***интервалом сходимости*** ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда если $|x| < R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$сходится абсолютно, если $|x| > R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится, а если $0 \leq r < R$, то в интервале$\{x: |x| \leq r\}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно.

Вторая теорема Абеля: если R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, R<+∞, и этот ряд сходится при $x=R$, то он сходится равномерно на отрезке [0, R] действительной оси. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при x=R, то его сумма непрерывна на отрезке [0, R] действительной оси.

Одной из важнейших задач, связанных со степенными рядами, является задача определения радиуса сходимости R по данным коэффициентам ряда a_n.

Пусть $\overline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = l$. Тогда

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, 0 < l < +\infty, \\ 0, \quad l = +\infty, \\ +\infty, \quad l = 0. \end{cases}$$

Примеры решения заданий по теме «Функциональные ряды. Область сходимости ряда.Степенной ряд.»

1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha}, \alpha \in R, x \neq -1.$$

Решение.

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость, используя предельный признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Рассмотрим неравенство

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1,$$

выполняя следующие эквивалентные преобразования:

$$|x-1| < |x+1|; x > 0.$$

Значит, исследуемый функциональный ряд сходится абсолютно при $x > 0$ и расходится при $x < 0$. Если $x = 0$, то получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, сходящийся условно в соответствии с признаком Лейбница.

Итак, рассматриваемый функциональный ряд сходится абсолютно при $x > 0$ и условно при $x = 0$, а при $x < 0$ ряд расходится.

2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+5)^n}{2^n}.$$

Решение.

Пусть $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x+5)^n}{2^n}$.Тогда $|u_n(x)| = \frac{|x+5|^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+5|^{n+1}2^n}{2^{n+1}|x+5|^n} = \frac{|x+5|}{2}.$$

Согласно признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n(x)|$сходится при $|x+5| < 2$и расходится при $|x+5| > 2$.Поэтому исходный ряд при $|x+5| < 2$ сходится абсолютно, а при $|x+5| > 2$ расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости. Интервал сходимости исходного ряда (-7; -3). Проверим сходимость ряда на концах интервала.

При $x = -7$ ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-7+5)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}.$$

И ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак.

При $x = -3$ряд так же расходится:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-3+5)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Окончательно, интервал сходимости исходного ряда $(-7;\,-3)$.

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)(2-x)^n}$$

$$u_n(x) = \frac{3^n}{(n+1)(2-x)^n}, \qquad |u_n(x)| = \frac{3^n}{(n+1)|2-x|^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}|x-2|^n}{(n+2)3^n|x-2|^{n+1}} = \frac{3}{|x-2|} = g(x).$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=}^{\infty} |u_n(x)|$сходится при $g(x) < 1$ и расходится при $g(x) > 1$. Условие сходимости $g(x) < 1$ эквивалентно неравенству $|x-2| > 3$, множеством решений которого является объединение интервалов $[-\infty, -1] \cup [5, +\infty]$.

Исследуем сходимость в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{расходится (гармонический ряд).}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ сходится по признаку Лейбница,}$$

но не абсолютно (ряд из модулей — гармонический).

Областью сходимости исходного ряда является $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Варианты заданий.

II.	*Найти область сходимости функционального ряда*
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{\left(3x^2+4x+2\right)^n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$

4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n+1}\frac{1}{\left(3x^2+8x+6\right)^n}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{1}{\left(27x^2+12x+2\right)^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n\left(n^2+1\right)}\left(25x^2+1\right)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-5\right)^{2n+1}}{3n+8}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n-2\right)^3\left(x+3\right)^{2n}}{2n+3}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{n^3+2}\frac{1}{\left(3x^2+10x+9\right)^n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-1\right)^{2n}}{n9^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(x-2\right)^{2n}}{2n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(x-3\right)^n}{\left(n+1\right)5^n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n\left(x-2\right)^n}$

16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$
17	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$
18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$
20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$
22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$
24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$
26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$

Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение основных элементарных функций.

Если функция *f* раскладывается в окрестности x_0 в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

с радиусом сходимости R (и, следовательно, радиус сходимости этого ряда положителен, т.е. R>0), то:

1) Функция f имеет на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, которые могут быть найдены из ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ почленным дифференцированием:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, m = 1, 2, \dots;$$

2) Для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1};$$

3) Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n;$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

имеют одинаковые радиусы сходимости.

Если функция *f* раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, справедлива формула

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Если в некоторой окрестности заданной точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.

Пусть действительная функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется ее рядом Тейлора в точке x_0.

Примеры решения заданий по теме «Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение основных элементарных функций.

1. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0

   $$f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Решение.

РядТейлора имеет вид $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{x!}(x - x_0)^n$. Вычислим последовательно требуемое количество производных.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1;$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2;$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4;$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2(\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x)}{\cos^6 x}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = 16;$$

Подставив полученные значения производных в формулу Тейлора, получим представление

$$\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots.$$

2. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-3x}}, x_0 = 2.$$

Решение.

Преобразуем функцию к виду, удобному для использования стандартного разложения в ряд Маклорена степенной функции $(1+y)^{\alpha}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-3x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-2-3(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-2\left(1+\frac{3}{2}(x-2)\right)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1+\frac{3}{2}(x-2)\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+y)^{-\frac{1}{3}}, \text{где } y = \frac{3}{2}(x-2).$$

Используя стандартное разложение в биномиальный ряд степенной функции $(1+y)^{\alpha}$с показателем $\alpha = -\frac{1}{3}$, получаем

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+y)^{-\frac{1}{3}}\bigg|_{y=\frac{3}{2}(x-2)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n)\bigg|_{y=\frac{3}{2}(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2))}{3^n n!}y^n\bigg|_{y=\frac{3}{2}(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3^n n!}\cdot\frac{3^n}{2^n}(x-2)^n$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^n n!}(x-2)^n.$$

Использованное выше разложение функции $(1+y)^{-\frac{1}{3}}$ в биномиальный ряд справедливо для $-1 < y < 1$, а, следовательно, и для x

$$-1 < \frac{3}{2}(x-2) < 1 \to -\frac{2}{3} < x-2 < \frac{2}{9} \to \frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}.$$

Найденный интервал сходимости и является интервалом сходимости полученного ряда Тейлора для функции $f(x)$.

3. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}, \qquad x_0 = 0.$$

Решение.

Представим дробь $\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ в виде суммы двух слагаемых $\frac{A}{x-1}$ и $\frac{B}{x+3}$. Из требования $A(x+3)+B(x-1)=1$ найдём $A=\frac{1}{4}$, (положив $x=1$), $B=-\frac{1}{4}$ (положив $x=-3$). В итоге

$$f(x) = -\frac{1}{4}\left[(1-x)^{-1} + \frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}\right].$$

Каждое из слагаемых в квадратной скобке представим рядом Маклорена для $(1+\tau)^{\mu}$, где $\mu=-1, \tau=-x$ в первом слагаемом и $\tau=\frac{x}{3}$ во втором. Тогда получим следующие представления:

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Первое разложение справедливо на интервале $[-1,1]$, второе на $[-3,3]$. Сложив почленно два ряда и умножив на $\left(-\frac{1}{4}\right)$ получим следующее разложение:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{12\cdot 3^n} x^n,$$

которое справедливо на интервале $[-1,1]$.

4. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3),\ x_0 = 5.$$

Решение.

Сделаем замену $x - 5 = t$. Тогда

$$f(x) = \ln((t+5)^2 - 2(t+5) - 3) = \ln[(t^2 + 8t + 12)] =$$

$$= \ln[(t+2)\cdot(t+6)] = \ln(12) + \ln\left(\frac{t}{2} + 1\right) + \ln\left(\frac{t}{6} + 1\right)$$

$$= \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{2^n \cdot n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} t^n}{6^n \cdot n}\right).$$

Область представимости $\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)$ рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{2^n \cdot n}$ есть полуоткрытый интервал $I_1 = (-2,2]$. Функция $\ln\left(1 + \frac{t}{6}\right)$ представляется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n\, 6^n}$ на интервале $I_2 = (-6,6]$. Оба разложения справедливы в области I_1, т.е. при $-2 < t \le 2$, что эквивалентно $-2 < x - 5 \le 2$, **или** $3 < x \le 7$. Складывая оба ряда почленно и переходя к переменной x, получим разложение

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 + 3^n}{n \cdot 6^n} (x - 5)^n,$$

которое справедливо в области $(3,7]$.

5. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ с точностью до $0{,}0001$.

Решение.

Первообразная подынтегральной функции e^{-x^2} не выражается явно через элементарные функции, поэтому для оценки этого интеграла поступим следующим образом. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена в интервале $(-\infty, +\infty)$ и почленно проинтегрируем этот степенной ряд:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}.$$

Пусть S_n и R_n – n-я частичная сумма и сумма n-ого остатка этого ряда соответственно. Тогда погрешность приближения $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx S_n$ равна $\delta = |R_n|$. Полученный для интеграла ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ удовлетворяет признаку Лейбница. Следовательно, для суммы R_n остатка этого ряда справедливо утверждение, что абсолютная величина погрешности, возникающей при замене суммы ряда n-ой частичной суммой, не превосходит модуля первого отброшенного члена. Таким образом,

$$\delta = |R_n| = \frac{1}{(2(n+1)+1)(n+1)!} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

Проведя вычисления, получаем

$$|R_5| < \frac{1}{9360}, \frac{1}{9360} > 10^{-4}; |R_6| < \frac{1}{75600} < 10^{-4}.$$

Итак, заданная точность оценки $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx S_n$ будет обеспечена, если вычислить сумму первых семи членов полученного ряда $(n = 6)$:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx S_6 =$$
$$= \sum_{n=0}^{6}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 9!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!}$$
$$\approx 0{,}7468, \qquad \delta < 0{,}0001.$$

6. Найти с точностью до 0,0001 значение интеграла

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Решение.

Заменяя функцию $\sin x$ ее степенным рядом и почленно интегрируя, находим:

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\cdots\right)\Bigg|_0^{0,5}$$

$$=0,5-\frac{0,125}{18}+\frac{0,03125}{600}-\cdots$$

Получился знакочередующийся ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{0,03125}{600}<0,0001$,то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда:

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx\approx 0,5-\frac{0,125}{18}\approx 0,4931.$$

Варианты заданий.

	III. *Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням* x	**IV.** *Вычислить интеграл с точностью до 0,001*
1	$\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$	$\int\limits_0^{2,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$
2	$\ln\left(1+x-6x^2\right)$	$\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx$
3	$(x-1)\sin 5x$	$\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx$
4	$\dfrac{\mathrm{ch}3x-1}{x^2}$	$\int\limits_0^{0,4} \cos(5x/2)^2\,dx$
5	$\dfrac{6}{8+2x-x^2}$	$\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
6	$\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$	$\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$
7	$\ln\left(1-x-12x^2\right)$	$\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$
8	$\left(3+e^{-x}\right)^2$	$\int\limits_0^{2,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$
9	$\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$	$\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx$
10	$\dfrac{5}{6-x-x^2}$	$\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

11	$\sqrt[4]{16-5x}$	$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx$
12	$\ln(1-x-20x^2)$	$\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$
13	$\frac{\arcsin x}{x}-1$	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$
14	$\frac{7}{12-x-x^2}$	$\int_0^{0,2} \cos(25x^2)dx$
15	$x^2\sqrt{4-3x}$	$\int_0^{0,1} \cos(100x^2)dx$
16	$\ln(1+2x-8x^2)$	$\int_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx$
17	$2x\sin^2(x/2)-x$	$\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}dx$
18	$(x-1)\operatorname{sh}x$	$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$
19	$\frac{\arcsin x}{x}-1$	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
20	$\frac{3}{2-x-x^2}$	$\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$
21	$\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$	$\int_0^{0,2} \sin(25x^2)dx$
22	$\ln(1-x-6x^2)$	$\int_0^{0,5} \cos(4x^2)dx$

23	$2x\cos^2(x/2)-x$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$
24	$\frac{9}{20-x-x^2}$	$\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$
25	$\frac{5}{6+x-x^2}$	$\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$
26	$x\sqrt[3]{27-2x}$	$\int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx$
27	$\ln(1+x-12x^2)$	$\int_0^1 \cos x^2 dx$
28	$\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$
29	$\frac{\mathrm{sh}2x}{x}-2$	$\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$
30	$(2-e^x)^2$	$\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x}dx$

Ряды и интегралы Фурье.

Ряды Фурье.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{n\pi}{l}+$$

$$+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots+a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\cdots,$$

или, в частном случае $l=\pi$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+$$

$$+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots,$$

где число l называется *полупериодом*, а числа $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ — *коэффициентами* этого ряда.

Тригонометрический ряд можно записать также в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n),$$

где $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}, \mathrm{tg}\varphi_n={}^{a_n}/_{b_n}$.

Используя равенства

$e^{inx}=\cos nx+\sin nx,$ $\qquad$ $e^{-inx}=\cos nx-\sin nx,$

где $i^2=-1$, тригонометрический ряд можно записать в комплексной форме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-inx},$$

где $c_0=\frac{a_0}{2}, c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n-ib_n), c_n=\frac{1}{2}(a_n+ib_n), n=1,2,\dots$. Заменив здесь x на $\frac{\pi x}{l}$, получим комплексную форму тригонометрического ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-i\pi nx/l}.$$

Задача заключается в разложении некоторой периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ или 2π в тригонометрический ряд, сходящийся к этой функции.

Члены тригонометрических рядов являются периодическими функциями с периодами $2l$ и 2π соответсвенно.

Скалярное произведение любых двух кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется равенством

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Везде под кусочно-непрерывной на отрезке $[a,b]$ функцией понимается функция, непрерывная всюду на $[a,b]$, за исключением, возможно, конечного числа точек разрыва первого рода таких, что в любой из этих точек $x = c$ существует левый $f(c-0)$ и правый $f(c+0)$ конечные пределы и

$$f(c) = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}.$$

Если $(f,g) = 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ***ортогональными*** на $[a,b]$. Множество функций, попарно ортогональных на отрезке $[a,b]$, называется ***ортогональной системой функций*** на этом отрезке.

Система функций:

а) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots,$ входящих в тригонометрический ряд, является ортогональной на отрезке $[-\pi,\pi]$ в силу равенств

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi\delta_{mn}, & m \neq 0, \\ 0, & m = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi\delta_{mn}, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

где $m \geq 0, n \geq 0$ — целые числа; $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$, $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$.

б) $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}x, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$ является ортогональной на отрезке $[-l, l]$. При этом соответствующие интегралы вычисляются в пределах от $(-l)$ до l. Системы функций а) и б) являются ортогональными также и для любого промежутка интегрирования длиной 2π (соответственно $2l$).

Пусть некоторая функция $f(x)$, определенная в интервале $(-\pi;\pi)$, а затем периодически с периодом 2π продолженная вне этого интервала на всю числовую ось, является суммой сходящегося тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Умножая обе части этого равенства последовательно на $\cos nx$, $n = 0,1,\ldots$ и на $\sin nx$ $(n \in N)$ и интегрируя затем обе части полученных равенств от $-\pi$ до π с учетом ортогональности системы функций а), получим формулы для нахождения ***коэффициентов Фурье*** a_n и b_n функции $f(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx, \qquad n \in \{0\} \cup N,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx, \qquad n \in N.$$

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

коэффициенты a_n и b_n которого являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$, называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$, а процедура разложения функции в ряд Фурье называется ее ***гармоническим анализом***.

Коэффициенты Фурье разложения функции $f(x)$ в ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \qquad n \in \{0\} \cup N,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \qquad n \in N.$$

В формулах для нахождения коэффициентов a_n, b_n интегрирование может быть проведено в любом промежутке длиной 2π (или $2l$).

Комплексные коэффициенты Фурье c_n для ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\pi n x/l}$$

находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx$$

или

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{inx}{l}}\,dx,$$

здесь $n = 0,1,2,\ldots.$ При этом используется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}\,e^{inx}\,dx = 2\pi\delta_{mn},$$

где $\delta_{mn} = 1$ при $n = m$, $\delta_{mn} = 0$ при $n \neq m$.

Задача гармонического анализа функции $f(x)$ состоит, таким образом, в выяснении условий, при которых ряд Фурье этой функции является сходящимся и его сумма равна $f(x)$.

Теорема Дирихле: пусть функция $f(x)$, определенная в интервале $(-\pi;\pi)$, удовлетворяет в этом интервале условиям Дирихле:

1) $f(x)$ в указанном интервале либо непрерывна, либо кусочно-непрерывна и имеет конечное число точек разрыва первого рода, в каждой из которых существует как левый, так и правый конечные пределы этой функции;
2) интервал $(-\pi;\pi)$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится всюду в интервале $(-\pi;\pi)$, а его сумма

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]$$

равна:

а) функции $f(x)$ в любой точке x, в которой $f(x)$ непрерывна;

б) $\frac{1}{2}[f(c-0)+f(c+0)]$ в каждой точке разрыва c;

в) $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$ на концах $x=-\pi$ и $x=\pi$ интервала.

В общем случае функция $f(x)$ определена в интервале $(-l;l)$.

Если функция $f(x)$ периодически с периодом 2π (или $2l$) продолжена за пределы интервала $(-\pi;\pi)$ (или $(-l;l)$), то утверждения теоремы Дирихле применимы при любом x, а не только внутри интервала $(-\pi;\pi)$ или $(-l;l)$. При таком продолжении функции концы $x=\pm\pi$ (или $x=\pm l$) интервала являются точками ее разрыва, если $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$ (или $f(-l+0)\neq f(l-0)$).

Разложение четных и нечетных функций.

Если $f(x)$ — четная в $(-\pi;\pi)$ функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, то

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad n\in\{0\}\cup N,\qquad b_n=0,\qquad n\in N.$$

Ряд Фурье при этом не содержит синусов.

Если $f(x)$ — нечетная в $(-\pi;\pi)$ функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx, \quad n \in N.$$

Ряд Фурье при этом не содержит косинусов.

В случае интервала $(-l; l)$ соответствующие формулы принимают вид

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\ dx, \quad n \in \{0\} \cup N, \quad b_n = 0, \quad n \in N,$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\ dx, \quad n \in N.$$

Разложение в интервале $(0; l)$.

Если некоторая функция $f(x)$ определена в интервале $(0; l)$, в котором она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то эту функцию можно разложить в указанном промежутке в ряд либо по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

либо по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где коэффициенты разложения определяются по соответствующим формулам. В частном случае функция $f(x)$ может быть определена в интервале $(0; \pi)$. Оба последних ряда представляют в интервале $(0; l)$ одну и ту же функцию $f(x)$, но в интервале $(-l; 0)$ они представляют разные функции. При этом ряд по косинусам соответствует функции, полученной из $f(x)$ четным продолжением в соседний интервал $(-l; 0)$, а затем с периодом $2l$ продолженной вне интервала $(-l; l)$ на всю числовую ось, тогда как ряд по синусам соответствует функции, полученной из $f(x)$ нечетным продолжением в соседний интервал $(-l; 0)$, а затем с периодом $2l$ продолженной вне интервала $(-l; l)$ на всю числовую ось. При этом в случае разложения по косинусам имеем

$f(-0) = f(+0), f(-l + 0) = f(l - 0),$

в случае разложения по синусам

$f(-0) = -f(+0), f(-l+0) = -f(l-0)$.

Интегралы Фурье.

В случае если функция $f(x)$ периодична на всей числовой оси или получена периодическим продолжением функции, заданной в интервале $(-l; l)$, то она может быть разложена в ряд Фурье. Непериодическую функцию в ряд Фурье разложить нельзя. Однако, в случае, если функция $f(x)$:

1) определена на всей числовой оси;
2) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле в любом конечном интервале;
3) абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

то эта функция во всех своих точках непрерывности может быть представлена в виде ***интеграла Фурье*** *(или* ***разложена в интеграл Фурье****):*

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\, d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\omega y\, dy, \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\sin\omega y\, dy.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ левую часть интеграла Фурье следует заменить на $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Выражение для интеграла Фурье может быть получено из разложения функции, определенной в интервале $(-l; l)$, в ряд Фурье в результате предельного перехода $l \to \infty$.

Если $f(t)$ — периодическая по времени t функция, то ряд Фурье представляет ее в виде суммы бесконечного счетного числа гармоник $\cos\omega_n t$и $\sin\omega_n t$ с частотами $\omega_n = {}^{\pi n}/_{l}, n \in N$. Совокупность всех частот ω_n называется спектром, в данном случае дискретным, функции $f(t)$. Интеграл Фурье представляет непериодическую функцию $f(t)$ в виде наложения бесконечного множества гармонических колебаний с непрерывно изменяющейся частотой ω (или непрерывным спектром), которая может принимать значения либо на всей оси $O\omega$, либо на некотором ее отрезке. В общем случае спектр функции может иметь как дискретные, так и непрерывные части.

Формула

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\, d\omega$$

для четной функции $f(x)$, при тех же замечаниях о точках ее разрыва, принимает вид

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\, d\omega, \qquad a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(y)\cos\omega y\, dy,$$

а для нечетной

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x\, d\omega, \qquad b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(y)\sin\omega y\, dy.$$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке $(0;+\infty)$, удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном интервале, содержащемся в промежутке $(0;+\infty)$, и абсолютно интегрируема в $(0;+\infty)$,то она может быть представлена в указанном промежутке либо в виде четного продолжения, либо в виде нечетного продолжения.

В случае четной функции $f(x)$, определенной в$(-\infty;+\infty)$, а также в случае четного продолжения функции $f(x)$, определенной в $(0;+\infty)$, имеем

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(y)\cos\omega y\,dy\right]\cos\omega x\;d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}C(\omega)\cos\omega x\;d\omega,$$

$$C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(y)\cos\omega y\;dy.$$

Для нечетной функции $f(x)$, определенной в $(-\infty;+\infty)$, а также при нечетном продолжении $f(x)$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(y)\sin\omega y\,dy\right]\sin\omega x\;d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}S(\omega)\sin\omega x\;d\omega,$$

$$S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(y)\sin\omega y\;dy.$$

Здесь функции $C(\omega)$ и $S(\omega)$ называются соответственно косинус-образом и синус-образом Фурье функции $f(x)$.

Интеграл Фурье может быть записан в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\cos\omega(y-x)\;dy,$$

а также в комплексной форме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{i\omega(y-x)}\;dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega,$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{i\omega y}\;dy,$$

где интеграл с бесконечными пределами по переменной ω понимается в смысле главного значения, т.е.нижний и верхний пределы интегрирования стремятся соответственно к $(-\infty)$ и $(+\infty)$, оставаясь равными по абсолютной величине. Форма

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{i\omega(y-x)}\;dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega,$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega y}\, dy$$

интеграла Фурье эквивалентна форме

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos \omega(y - x)\, dy$$

в силу равенства $e^{i\omega(y-x)} = \cos \omega(y - x) + i \sin \omega(y - x)$, а также четности косинуса и нечетности синуса по переменной ω. Комплексная функция $F(\omega)$ действительного аргумента ω, получаемая из $f(x)$ по формуле

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega y}\, dy,$$

называется образом Фурье (или спектральной плотностью) функции $f(x)$. При этом $F(\omega)$непрерывна в каждой точке $O\omega$ и $\lim\limits_{|\omega| \to \infty} |F(\omega)| = 0$.

В случае четной $f(x)$, согласно

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega(y-x)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega x}\, d\omega,$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega y}\, dy,$$

имеем $F(\omega) = C(\omega)$, где $C(\omega)$ продолжается четно при $\omega < 0$, так как $S(\omega) = 0$. Для нечетной $f(x) F(\omega) = iS(\omega)$, где $S(\omega)$ продолжается нечетно при $\omega < 0$, так как $C(\omega) = 0$. Для произвольной функции $f(x)$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четная и нечетная функции соответственно. Следовательно, образ Фурье для $f(x)$ равен $F(\omega) = C(\omega) + iS(\omega)$, где $C(\omega)$ и $S(\omega)$ — косинус-образ и синус-образ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, продолженные надлежащим способом для $\omega < 0$.

Если функция $(1+|x|)^n f(x)$, где n— натуральное число, абсолютно интегрируемая в $(-\infty;+\infty)$, то образ Фурье $F(\omega)$ функции $f(x)$ дифференцируем n раз по ω и производную порядка $m, m=\overline{1,n}$ можно найти дифференцированием под знаком интеграла

$$\frac{d^m F(\omega)}{d\omega^m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{i\omega y}(iy)^m\,dy.$$

Если $F(\omega)$ и $G(\omega)$ — образы Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то образ Фурье свертки двух функций $f(x)$ и $g(x)$

$$f*g=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\,g(x-\omega)\,d\omega$$

равен

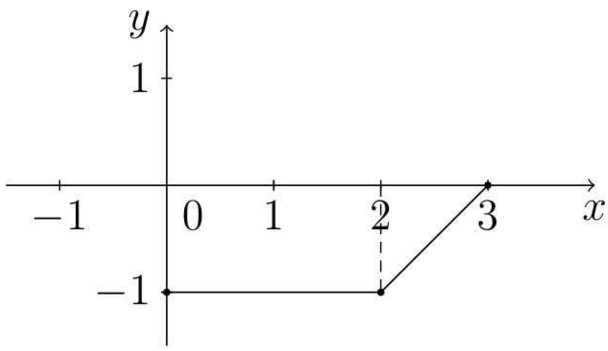
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)e^{i\omega x}\,dx=\sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega).$$

Если $F(\omega)$ — образ Фурье функции $f(x)$, а $F_n(\omega)$— образ Фурье производной $f^{(n)}(x)$(если она существует), то $F_n(\omega)=(-i\omega)^n F(\omega)$при условии, что все производные от $f(x)$ порядка, меньше n, стремятся к нулю при$|x|\to+\infty$.

Примеры решения заданий по теме «Ряды и интегралы Фурье».

1. Задать аналитически функцию, график которой изображен на рисунке. Построить для этой функции 4 ряда Фурье: общий тригонометрический, по синусам, по косинусам и в комплексной форме. Изобразить графики сумм построенных рядов.

   Дано:



Решение.

1) Зададим функцию, график которой изображен на рисунке, аналитически. Прежде всего заметим, что определена она только на отрезке [0; 3]. Видим, что на промежутке $[0;\ 2]$ функция постоянна и все значения ее равны -1, то есть $f(t) = -1$ при $t \in [0;\ 2]$. На интервале $[2;\ 3]$ график функции есть отрезок прямой L, проходящей через точки $(2;\ -1)$ и $(3;\ 0)$. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Подставим в это уравнение величины $x = t, x_1 = 2, y_1 == -1, x_2 = 3, y_2 = 0$, получим уравнение $y = t - 3$ прямой L в координатах t, y.

Окончательно, аналитическое значение данной функции будет иметь следующий вид:

$$f(t) = \begin{cases} -1, 0 \le t \le 2, \\ t - 3, 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

2) Построим общий тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T – длина промежутка$[a;\ b]$, на котором создана исходная, интегрируемая на нем, функция $f(t)$, а также период суммы ряда Фурье. Коэффициенты a_n, b_n вычисляются по функции$f(t)$следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\cos n\omega t\, dt\,, n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\sin n\omega t\, dt\,, n = 1,2,3,\ldots.$$

Так как функция задана на интервале $[0;\ 3]$, то

$$a = 0, b = 3, T = b - a = 3.$$

Вычислим коэффициенты $a_n, n \geq 0;\ b_n, n > 0$:

$$a_0 = \frac{2}{3}\left(\int_0^2 (-1)dt + \int_2^3 (t-3)dt\right) = \frac{2}{3}\left(-2 + \left(\frac{t^2}{2} - 3t\right)\Big|_2^3\right) = -\frac{5}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left(-\int_0^2 \cos\frac{2\pi nt}{3}dt + \int_2^3 (t-3)\cos\frac{2\pi nt}{3}dt\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{3}\Big|_0^2 + \frac{3}{2\pi n}(t-3)\sin\frac{2\pi nt}{3}\Big|_2^3 + \frac{9}{(2\pi n)^2}\cos\frac{2\pi nt}{3}\Big|_2^3\right) =$$

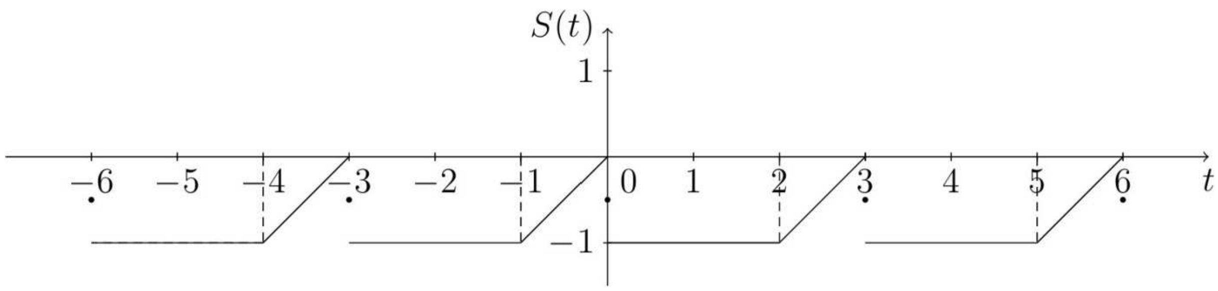
$$= -\frac{3}{2\pi^2 n^2}\left(1 - \cos\frac{4\pi n}{3}\right),$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left(-\int_0^2 \sin\frac{2\pi nt}{3}dt + \int_2^3 (t-3)\cos\frac{4\pi n}{3}dt\right) =$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{3}\Big|_0^2 - \frac{3}{2\pi n}(t-3)\cos\frac{2\pi nt}{3}\Big|_2^3 + \frac{9}{(2\pi n)^2}\sin\frac{2\pi nt}{3}\Big|_2^3\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} - \frac{3}{2\pi^2 n^2}\sin\frac{4\pi n}{3}.$$

Затем, используя, например, теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный нами ряд Фурье сходится к периодическому (с периодом $T = 3$) продолжению исходной функции при всех $t \neq 3n$, и $S(3n) = -\frac{1}{2}$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где через $S(t)$ обозначена сумма ряда Фурье. График функции $S(t)$ имеет следующий вид:



Ответ:

$$f(t) = -\frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2\pi^2 n^2}\left(1 - \cos\frac{4\pi n}{3}\right)\cos\frac{2\pi nt}{3} - \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{3}{2\pi nt}\sin\frac{4\pi n}{3}\right)\sin\frac{2\pi nt}{3},$$

$t \neq 3n$; $\quad S(3n) = -\frac{1}{2}, \quad$ при $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) Построим ряд Фурье по синусам.

Ряд Фурье по синусам в общем случае существует только для нечетной функции. Для того, чтобы построить ряд Фурье по синусам для нашей функции, продолжим ее нечетным образом на промежуток $[-3; 0]$. Затем, считая, что $T = 6$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для нечетной функции:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b_n} \sin n\omega t,$$

$$\widetilde{b_n} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\, dt, n = 1,2, \ldots$$

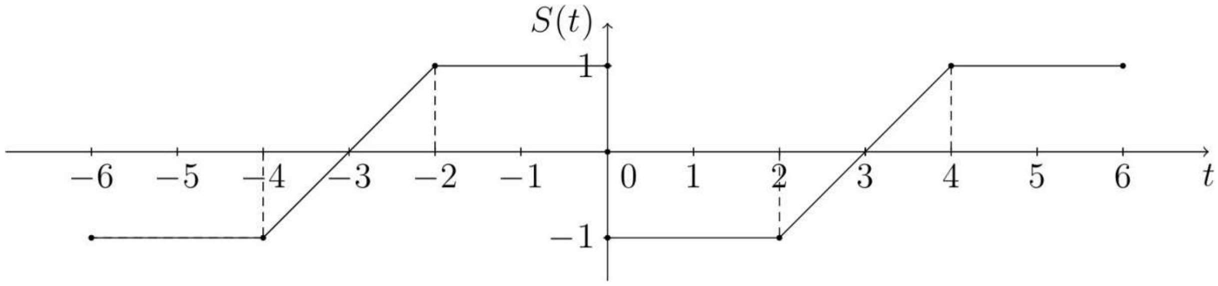
Вычислимкоэффициенты:

$$\widetilde{b_n} = \frac{2}{3}\left[-\int_0^2 \sin\frac{\pi nt}{3}dt + \int_2^3 (t-3)\sin\frac{\pi nt}{3}dt\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n t}{3}\Big|_0^2 - \frac{3}{\pi n}(t-3)\cos\frac{\pi n t}{3}\Big|_2^3 + \frac{9}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n\, t}{3}\Big|_2^3\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} - \frac{3}{4(\pi n)^2}\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

Применив теорему Дирихле, видим, что $f(t) = S(t)$ при $t \neq 6k$, и $S(6k) == 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:



Ответ:

$$f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi n} + \frac{3}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{2\pi n}{3}\right]\sin\frac{\pi n t}{3}$$

при $\quad t \neq 6k, \quad$ и $\quad S(6k) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4) Построим ряд Фурье по косинусам.

Аналогично, ряд Фурье по косинусам существует только для четной функции. Для того, чтобы построить ряд по косинусам для нашей функции, продолжим ее четным образом на промежуток $[-3;\ 0]$. Затем, как и в предыдущем случае, считая, что $T=6$, воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для четной функции:

$$f(t)=\frac{\widetilde{a_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{a_n}\cos n\,\omega\,t,$$

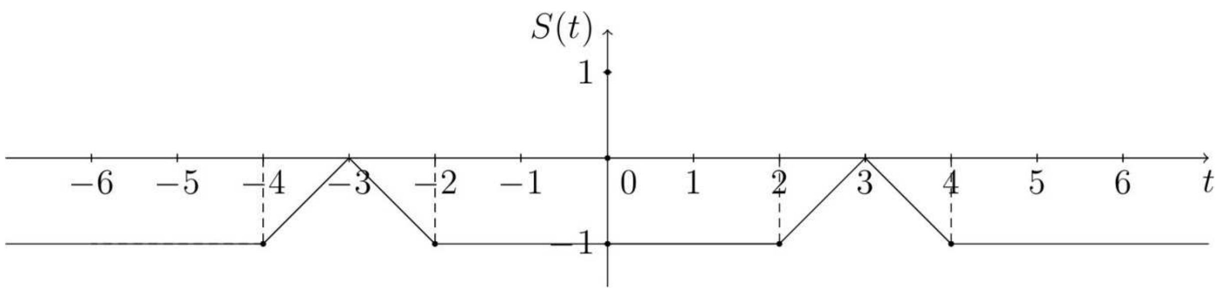
$$\widetilde{a_n}=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\,\omega\,t\ dt,\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Вычислим коэффициенты $\widetilde{a_n}$:

$$\widetilde{a_0}=\frac{2}{3}\left[-\int_0^2 dt+\int_2^3(t-3)\,dt\right]=-\frac{5}{3},$$

$$\widetilde{a_n}=\frac{2}{3}\left[-\int_0^2\cos\frac{\pi n t}{3}dt+\int_2^3(t-3)\cos\frac{\pi n t}{3}\,dt\right]=\frac{6}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-\cos\frac{2\pi n}{3}\right].$$

Применив теорему Дирихле, видим, что $f(t)=S(t)$ при всех вещественных значениях аргумента t. Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:



Ответ:

$$f(t) = -\frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - \cos\frac{2\pi n}{3}\right]\cos\frac{\pi n t}{3}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5) Построим ряд Фурье в комплексной форме.

Ряд Фурье для функции в комплексной форме имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}, c_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)e^{-i\omega n t}dt, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

В нашем примере, считая, как и ранее, что $a = 0, b = 3, T = 3, \omega = \frac{2\pi}{3}$, находим коэффициенты $c_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$c_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt = \frac{a_0}{2} = -\frac{5}{6},$$

$$c_n = \frac{1}{3}\left[-\int_0^2 e^{-i\omega n t}dt + \int_2^3 (t-3)e^{-i\omega n t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{3i}{2\pi n}e^{-i\omega n t}\Big|_0^2 + \frac{3i}{2\pi n}\left[(t-3)e^{-i\omega n t} - \frac{3i}{2\pi n}e^{-i\omega n t}\right]\Big|_2^3\right] =$$

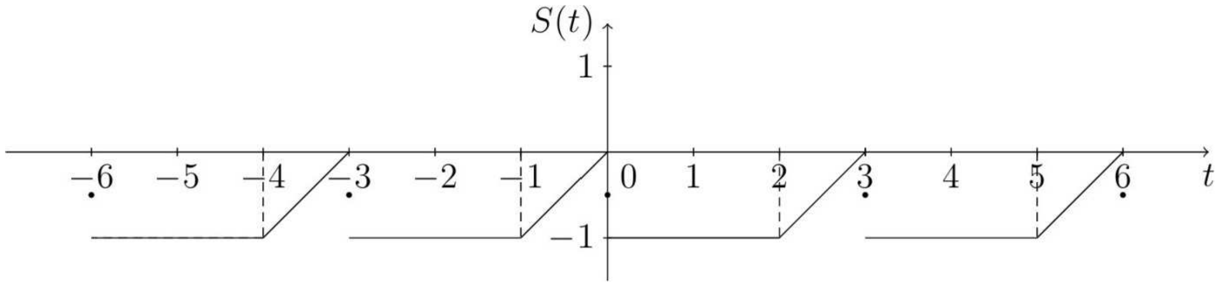
$$= \frac{i}{2\pi n} + \frac{3}{4\pi^2 n^2}\left(1 - e^{-2\omega n i}\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi^2 n^2}\left(1 - \cos\frac{4\pi n}{3}\right) + \frac{i}{2\pi n}\left(1 + \frac{3}{2\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}\right).$$

Отметим, что коэффициенты c_n связаны с коэффициентами a_n, b_n общего ряда Фурье следующим образом:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n \le 0, \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n), & n > 0. \end{cases}$$

Затем, как и ранее, используя теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный нами ряд Фурье в комплексной форме сходится к периодическому, периода $T = 3$, продолжению исходной функции при всех $t \neq 3n$, и $S(3n) = -1/2$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. График суммы этого ряда Фурье имеет следующий вид (поведение ряда Фурье и его график в этом случае совпадают с поведением и графиком ряда Фурье для случая общего тригонометрического ряда Фурье):



Ответ:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{3}{4\pi^2 n^2}\left(1 - \cos\frac{4\pi n}{3}\right) + \frac{i}{2\pi n}\left(1 + \frac{3}{2\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}\right)\right] e^{\frac{i2\pi n t}{3}},$$

$t \neq 3n,$

$$S(3n) = -\frac{1}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

VII*. ***С помощью преобразования Фурье решить краевую задачу***

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty, \\ u_x(0,t) = 0, & 0 \le t < +\infty, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Решение.

Применим косинус-преобразование Фурье по переменной x:

$$\tilde{u}^c(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} u(\zeta,t)\cos(\lambda\zeta)\,d\zeta.$$

Проверим выполнение граничного условия $u_x(0,t) = 0$. Имеем

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda,t)\cos(\lambda x)\,d\lambda.$$

Дифференцированиепоx дает

$$u_x(x,t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda,t)\sin(\lambda x)\,d\lambda,$$

откуда следует, что $u_x(0,t) = 0$. Тогда, учитывая, что

$$\widetilde{u_{tt}}^c(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} u_{tt}(\zeta,t)\cos(\lambda\zeta)\,d\zeta,$$

$$-\lambda^2\tilde{u}^c(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} u_{\zeta\zeta}(\zeta,t)\cos(\lambda\zeta)\,d\zeta,$$

$$\tilde{f}^c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\zeta)\cos(\lambda\zeta)\,d\zeta,$$

$$\tilde{g}^c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(\zeta)\cos(\lambda\zeta)\,d\zeta,$$

приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{u}^c(\lambda,t)}{dt^2} + a^2\lambda^2\tilde{u}^c(\lambda,t) = 0, \quad t > 0, \\ \tilde{u}^c(\lambda,0) = \tilde{f}^c(\lambda), \\ \widetilde{u_t}^c(\lambda,0) = \tilde{g}^c(\lambda), \end{cases}$$

для определения функции $\tilde{u}^c(\lambda,t)$. Решениеэтойзадачиимеетвид

$$\tilde{u}^c(\lambda,t) = \tilde{f}^c(\lambda)\cos(a\lambda t) + \tilde{g}^c(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}.$$

Искомую функцию $u(x,t)$ находим с помощью обратного косинус-преобразования Фурье:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{u}^c(\lambda,t)\cos(\lambda x)\,d\lambda$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\tilde{f}^c(\lambda)\cos(a\lambda t) + \tilde{g}^c(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}\right]\cos(\lambda x)\,d\lambda =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{f}^c(\lambda)\cos(a\lambda t)\cos(\lambda x)\,d\lambda$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{g}^c(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}\cos(\lambda x)\,d\lambda.$$

Рассмотрим два случая.

1)$x - at > 0$. Тогда

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\tilde{f}^c(\lambda)[\cos\lambda(x+at)+\cos\lambda(x-at)]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{g}^c(\lambda)\frac{[\sin\lambda(x+at)-\sin\lambda(x-at)]d\lambda}{\lambda}=$$

$$=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\tilde{g}^c(\lambda)\int_{x-at}^{x+at}\cos(\lambda s)\,ds\right]d\lambda$$

$$==\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)ds.$$

2)$x-at<0$. Тогда

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\tilde{f}^c(\lambda)[\cos\lambda(x+at)+\cos\lambda(x-at)]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{g}^c(\lambda)\frac{[\sin\lambda(x+at)-\sin\lambda(x-at)]d\lambda}{\lambda}=$$

$$=\frac{f(x+at)+f(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\tilde{g}^c(\lambda)\int_{x-at}^{x+at}\cos\lambda s\,ds\right]d\lambda.$$

Поскольку функция $g(s)$ определена только для положительных значений x, то нужно преобразовать последний интеграл:

$$\int_{x-at}^{x+at}\cos(\lambda s)\,\mathrm{ds}=\int_{x-at}^{0}\cos(\lambda s)\,ds+\int_0^{x+at}\cos(\lambda s)\,ds$$

$$=-\int_{at-x}^{0}\cos(\lambda s)\,ds+\int_0^{x+at}\cos(\lambda s)\,ds=$$

$$=\int_0^{at-x}\cos(\lambda s)\,ds+\int_0^{x+at}\cos(\lambda s)\,ds.$$

Теперь

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{g}^c(\lambda)\left[\int_{x-at}^{x+at}\cos(\lambda s)\,ds\right]d\lambda =$$
$$= \left[\int_0^{x+at}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{g}^c(\lambda)\cos(\lambda s)\,d\lambda\right]ds\right.$$
$$\left.+\int_0^{at-x}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\tilde{g}^c(\lambda)\cos(\lambda s)d\lambda\right]ds\right] =$$
$$= \int_0^{x+at} g(s)ds + \int_0^{at-x} g(s)ds.$$

Итак, искомоерешениеесть

$$u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}$$
$$+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} g(s)ds - \operatorname{sgn}(x-at)\int_0^{|x-at|} g(s)ds\right],$$

где

$$\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

<u>*Замечание*</u>: в качестве функций$f(x)$и $g(x)$ могут быть, например, взяты функции e^{-ax^2}, e^{-ax} $(a > 0), \frac{1}{a^2+x^2}$.

VIII*. а) ***Найти область сходимости степенного ряда***

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\left(\sqrt{n-1}-i\right)z^n.$$

Найдем радиус сходимости по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n\left(\sqrt{n-1}-i\right)}{2^{n+1}\left(\sqrt{n}-i\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sqrt{n-1}-i\right|}{2\left|\sqrt{n}-i\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1+1}}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

На границе круга сходимости, т.е. при $|z| = \frac{1}{2}$, данный ряд расходится, т.к. последовательность $|c_n z^n|$ не стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Действительно,

$$|c_n z^n| = \left|2^n\left(\sqrt{n-1} - i\right)z^n\right| = 2^n\left|\sqrt{n-1} - i\right| \cdot |z|^n = 2^n\sqrt{n-1+1}\,\frac{1}{2^n} =$$

$$= \sqrt{n} \to \infty.$$

Итак, ряд сходится абсолютно при $|z| < \frac{1}{2}$ и расходится при $|z| \geq \frac{1}{2}$.

b) ***Исследовать на сходимость комплексный ряд***

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(3i-1)^n}{b^n}, \qquad b \in \mathbb{R}, \quad b > 0.$$

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость. Для выяснения сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n(3i-1)^n}{b^n}\right|$$

воспользуемся предельным признаком Даламбера. Таккак

$$|a_n| = \frac{n|3i-1|^n}{b^n} = \frac{n\sqrt{10^n}}{b^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{b^{n+1}}, \qquad |a_{n+1}| = \frac{(n+1)|3i-1|^{n+1}}{b^{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{10^{n+1}}}{b^{n+1}},$$

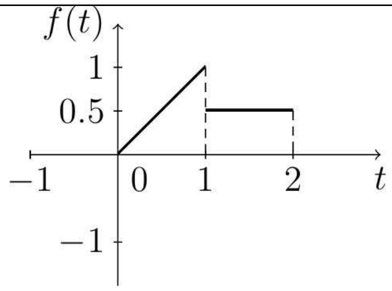
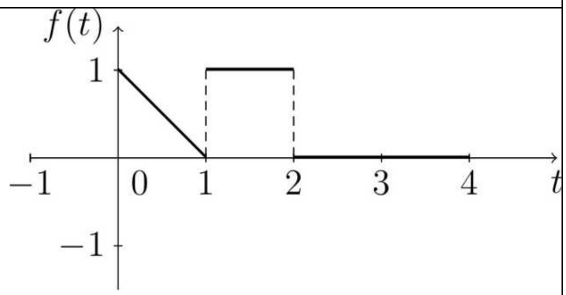
следовательно,

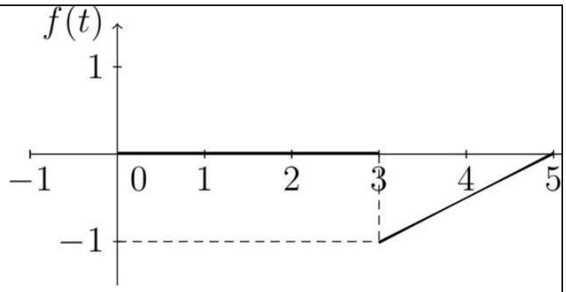
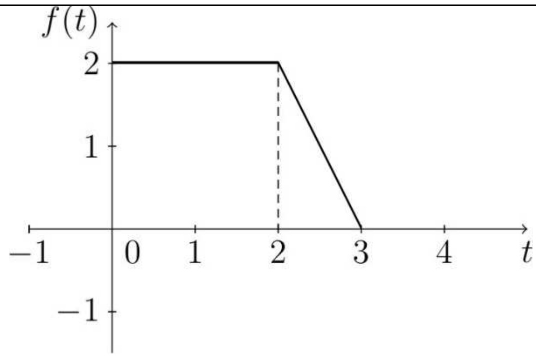
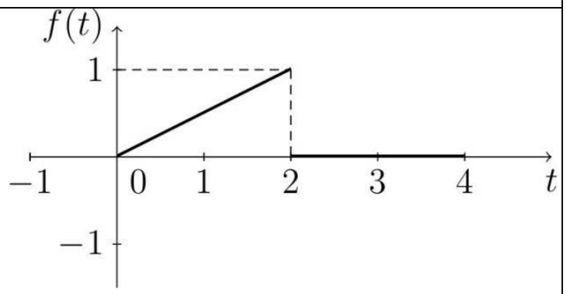
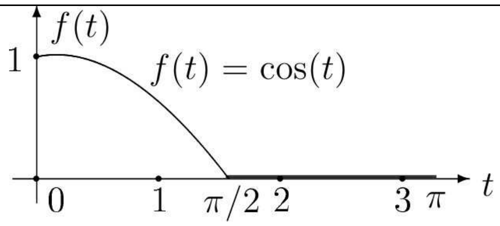
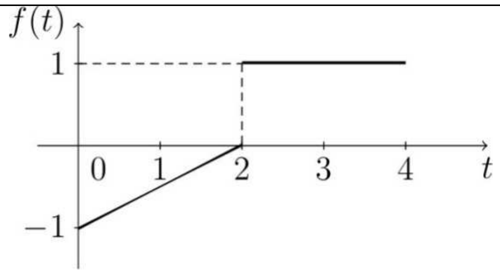
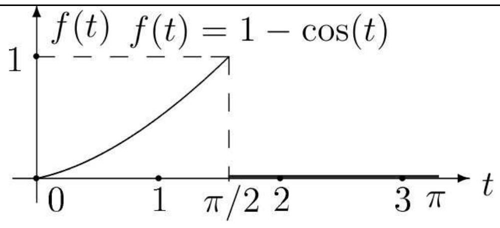
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)10^{\frac{n+1}{2}}b^n}{b^{n+1}n10^{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{10}}{b} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\sqrt{10}}{b}.$$

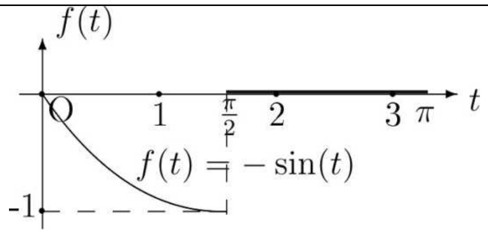
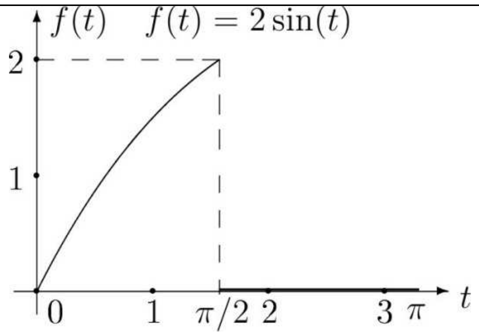
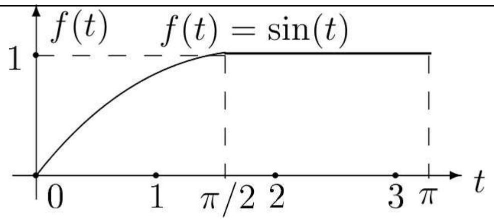
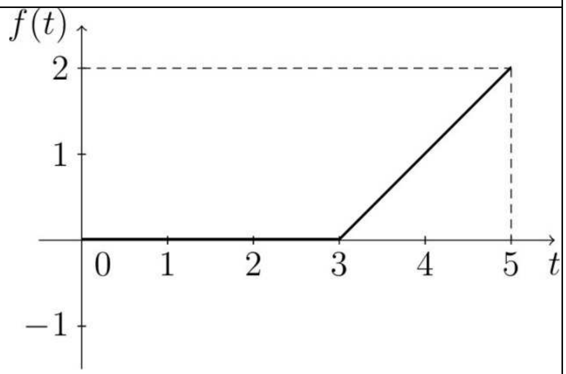
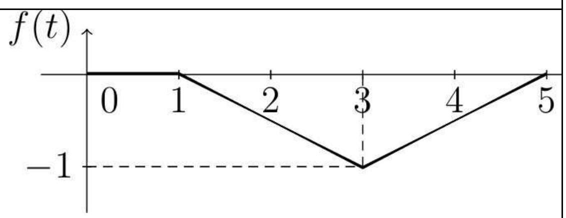
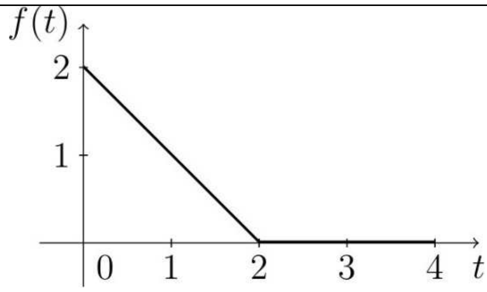
Таким образом, если $\frac{\sqrt{10}}{b} < 1$, т.е. $b > \sqrt{10}$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ сходится и, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. Если же $\frac{\sqrt{10}}{b} > 1$, т.е. $b < \sqrt{10}$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ расходится и, следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Более того, исходный ряд в этом случае расходится в силу невыполнения необходимого признака сходимости ряда.

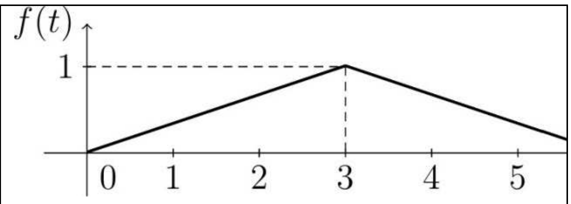
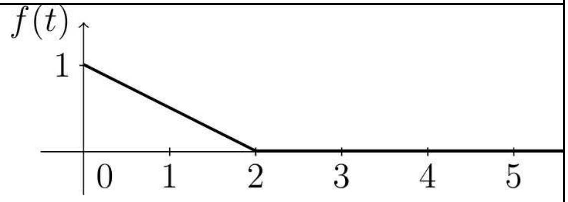
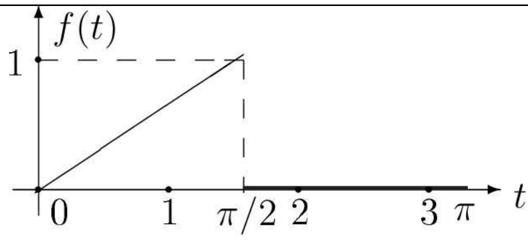
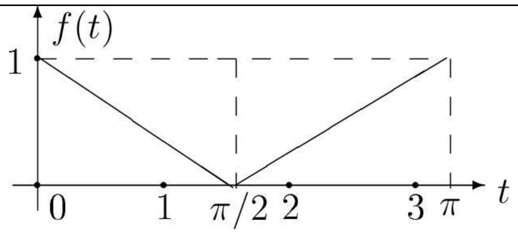
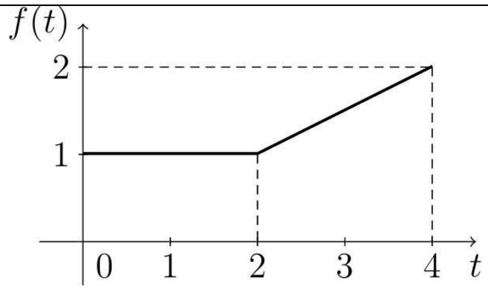
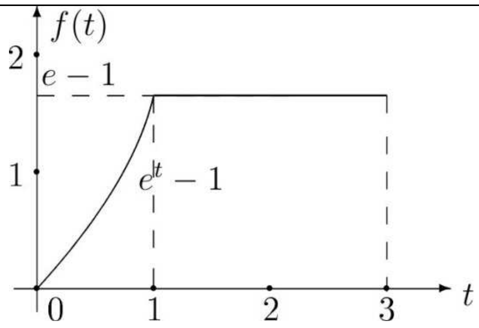
При $b = \sqrt{10}, |a_n| = n$, следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости как для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, так и для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Следовательно, в этом случае исходный ряд не является абсолютно сходящимся и не является сходящимся.

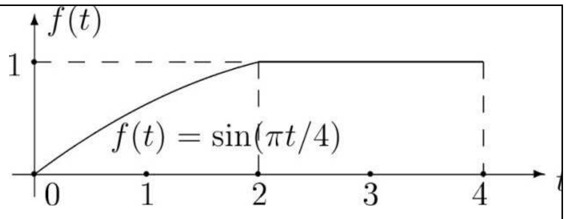
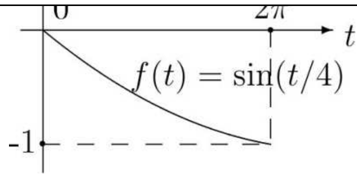
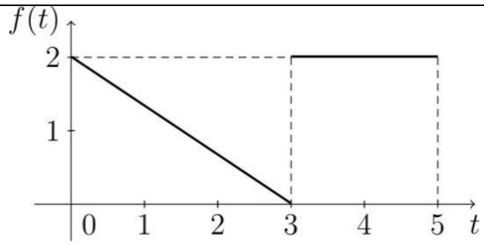
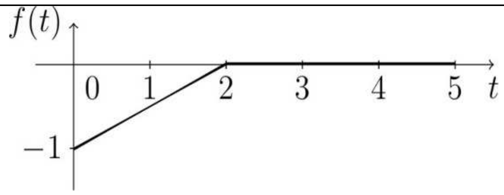
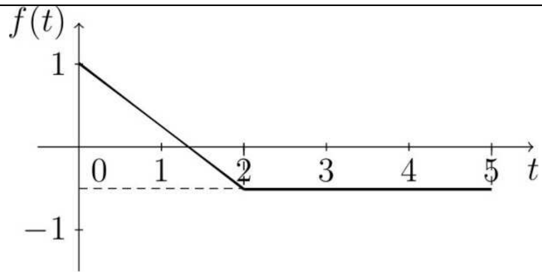
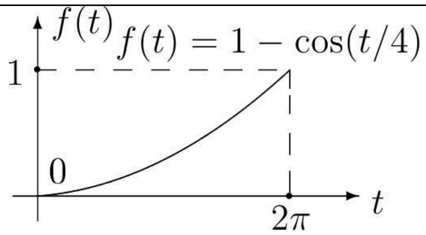
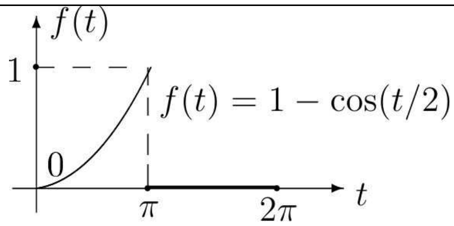
Варианты заданий.

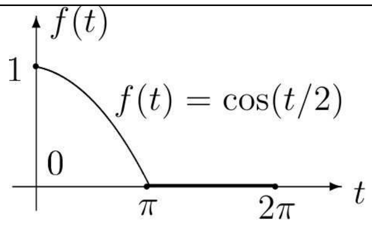
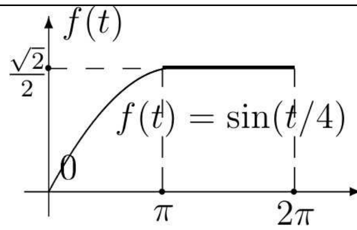
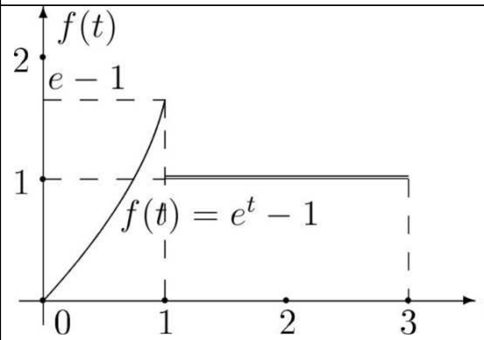
	V. *Разложить в ряд Фурье заданную функцию $f(x)$, построить графики функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье. Если не указывается, какой вид разложения в ряд необходимо представить, то требуется разложить функцию либо в общий тригонометрический ряд Фурье, либо следует выбрать оптимальный вид разложения в зависимости от данной функции*	**VI.** *Для заданной графически функции f(t) построить ряд Фурье в комплексной форме, изобразить график суммы построенного ряда*
1	$\begin{cases} f(x) = x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u(x,0) = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ на отрезке $[0;\pi]$ по косинусам кратных дуг;	
2	$\begin{cases} f(x) = x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u(x,0) = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ на отрезке $[0;\pi]$ по синусам кратных дуг;	

<table>
<tr><td>3</td><td>$f(x) = x^2$, на интервале $(1;2)$
по синусам кратных дуг;</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$f(x) = x^2$, на отрезке$[1;2]$
по косинусам кратных дуг;</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>$f(x) = \begin{cases} 0, -2 \le x < -1, \\ 1, \ -1 \le x < 1, \\ x^2, \ \ 1 \le x \le 2; \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>$f(x) = \cos x$, на отрезке $[0;\pi]$
по синусам кратных дуг;</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>$f(x) = \dfrac{x-\pi}{2}$, на отрезке$[0;\pi]$
по синусам кратных дуг;</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>$f(x) = \dfrac{x-\pi}{2}$, на отрезке$[0;\pi]$
по косинусам кратных дуг;</td><td></td></tr>
</table>

9	$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ x^2, \ 0 \le x \le \pi; \end{cases}$	
10	$f(x) = \begin{cases} 2x, -\pi \le x \le 0, \\ 3x, \ 0 \le x \le \pi; \end{cases}$	
11	$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ \sin x, \ 0 \le x \le \pi; \end{cases}$	
12	$f(x) = x^3$, на отрезке $[-\pi;\pi]$;	
13	$f(x) = \|x\|^3$, на отрезке $[-\pi;\pi]$;	
14	$f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$, на отрезке $[-\pi;\pi]$;	

15	$f(x) = x^2$, на отрезке $[0; 2\pi]$;	
16	$f(x) = x^2$, на отрезке $[0; \pi]$;	
17	$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ -x^2, & -\pi < x < 0; \end{cases}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$;	
18	$f(x) = \sin x$, на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;	
19	$f(x) = \cos x$, на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;	
20	$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 2, \\ 0, & -2 \le x \le 0; \end{cases}$ на отрезке $[-2; 2]$;	

21	$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\end{cases}$ по синусам кратных дуг;	
22	$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le1,\\ (x-1)^2, & 1<x\le2,\end{cases}$ по косинусам кратных дуг;	
23	$f(x)=\begin{cases}-1-x, & -1<x\le0,\\ 1-x, & 0<x\le1;\end{cases}$	
24	$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le1,\\ (x-1)^2, & 1<x\le2,\end{cases}$ по синусам кратных дуг;	
25	$f(x)=\cos 4x$, на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ по синусам кратных дуг;	
26	$f(x)=\sin 3x$, на полуинтервале $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ по косинусам кратных дуг;	
27	$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le0,\\ \cos x, & 0<x<\pi;\end{cases}$	

28	$f(x) = x\cos x$, на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;	
29	$f(x) = x\sin 2x$, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$;	
30	$f(x) = (x)$, на отрезке $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, где (x) – расстояние от числа x до ближайшего целого числа	

VII*.С помощью преобразования Фурье решить краевую задачу

1. $\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x}\sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \sin t, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}\sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{2x-x^2}\sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = xe^{-x^2}\sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 4, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \\ u(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ u(0,t) = -2, & t > 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_t = 16u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 4, & 0 < x < +\infty, \\ u(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - 9u, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 1, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = 1, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

Указание: *В преобразованиях использовать формулу*

$$\int_0^a J_0\left(b\sqrt{a^2 - x^2}\right)\cos\lambda x\,dx = \frac{\sin a\sqrt{b^2 + \lambda^2}}{\sqrt{b^2 + \lambda^2}}$$

и интегральное представление дельта-функции

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} d\lambda$$

9. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = 4x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

Указание: *Искать решение в виде*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где функции $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ *являются решениями следующих краевых задач:*

$$\begin{cases} u_{1tt} = u_{1xx} + 6, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_1(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u_{1t}(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} u_{2tt} = u_{2xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_2(x,0) = x^2 & -\infty < x < +\infty, \\ u_{2t}(x,0) = 4x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

В вычислениях использовать интегральные представления дельта-функции:

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} d\lambda$$

и формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{при} \quad |b| < 1, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{при} \quad |b| = 1, \\ 0, & \text{при} \quad |b| > 1, \end{cases} \quad (1)$$

которую можно получить, вычисляя интеграл в левой части с помощью вычетов.

10. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ u_t(0,t) = 5\sin 2t, & t > 0. \end{cases}$$

Указание: *в вычислениях использовать интегральное представление дельта-функции:*

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\lambda z\, d\lambda.$$

11. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & t > 0, \\ u_x(0,t) = \frac{1}{(t^2+1)^3}, & t > 0. \end{cases}$$

Указание: *в вычислениях использовать интеграл Дирихле:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{при} \quad a > 0, \\ 0, & \text{при} \quad a = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{при} \quad a < 0. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x,0) = x + \cos x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Указание: *учитывая линейность задачи, можно провести ее редукцию и представить решение* $u(x,t)$ *в виде суммы решений двух задач:*

$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$

где $u_1(x,t)$ *– решение начальной задачи для однородного уравнения с неоднородными начальными условиями,* $u_2(x,t)$ *– решение начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями. Использовать интегральное представление дельта-функции*

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} d\lambda$$

и формулу (1) *(предыдущей страницы).*

VIII*.

1. ***Найти область сходимости комплексного степенного ряда***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1+i)^n}{n2^n}.$$

2. ***Найти область сходимости функционального ряда***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

3. ***Исследоватьсходимостьряда***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \cdot \frac{z^n}{1+z^n}.$$

4. ***Определить радиус сходимости степенного ряда***

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(in)\, z^n.$$

5. ***Доказать, что ряд*** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^n}$ ***сходится абсолютно, но не равномерно на множестве***

$$\left\{z \in \mathbb{C}\colon |\arg z| \le \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Найти область сходимости следующих рядов:

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nz}{n}$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nz}{n}$.

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} nz}{n}$.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} nz}{n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^{n^2} z^{n^2}}{n!}$.

11. ***Исследовать на абсолютную сходимость функциональный ряд***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{z+n}{3n}\right)^n.$$

12. ***Исследоватьнасходимостьряд***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}}{n + \ln^2 n + \operatorname{arctg} n^2} z^n.$$

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно- методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А.
Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-
математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных
дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”.

Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 7 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе
российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных
изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю.Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом.

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики
и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49