Лабораторная работа №6. Аппроксимация табличной функции по методу наименьших квадратов

Цель работы - подобрать аналитическую функцию, наиболее адекватно описывающую табличную функцию и вычислить ее коэффициенты

Если значения табличной функции получены в ходе выполнения эксперимента, то подобрать выражение, правильно описывающее зависимость между экспериментальными данными, с помощью точной в узлах интерполяции проблематично. Это обусловлено тем, что значения табличной функции определяются с погрешностью, в результате интерполяционный полином строится с ошибкой. Вместо того, чтобы «сгладить» ошибки, интерполяционная функция включает их в себя. Кроме того, в случае наличия большого количества узлов таблицы и применения интерполяционного полинома большой степени, математическое выражение становится слишком громоздким.

Одним из способов решить эту проблему, является подбор математической функции по методу наименьших квадратов. Суть этого метода заключается в том, что подбираемая функция должна соответствовать условию

$$\sum_{i=0}^{n}\left(y(X_i)-Y_i\right)^2 = \min$$

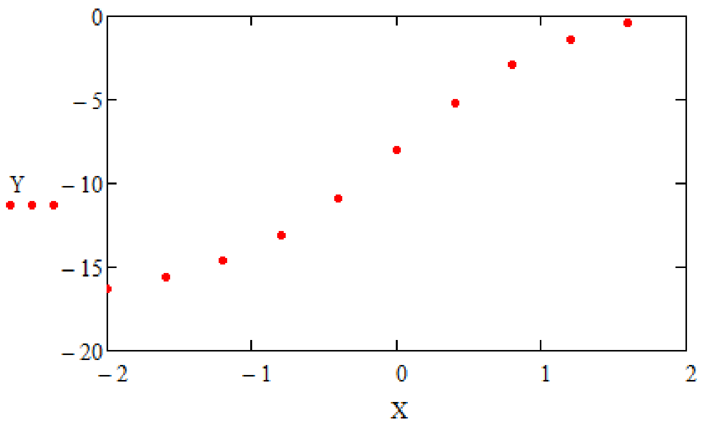
т.е сумма квадратов отклонений значений аппроксимирующей функции в узлах таблицы от экспериментально полученных данных была минимальна.

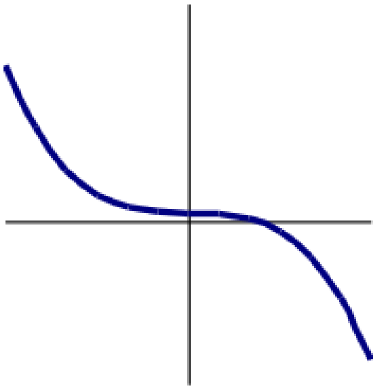
Подберем аппроксимирующую функцию для табличной функции

x	-2,00	-1,60	-1,20	-0,80	-0,40	0,00	0,40	0,80	1,20	1,60
y	-16,30	-15,59	-14,57	-13,06	-10,85	-8,00	-5,15	-2,94	-1,43	-0,41

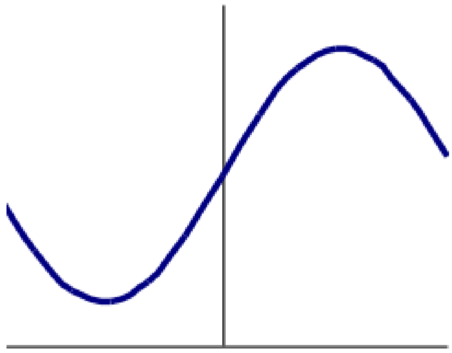
Порядок выполнения работы

1. Задать матрицы исходных данных X и Y в MathCAD
2. Построить на графике точки, соответствующие узлам табличной функции и по их виду выдвинуть не менее трех гипотез о предполагаемом виде аппроксимирующей функции, пользуясь для этого Приложением 1. Для данной табличной функции, судя по ее внешнему виду, аппроксимирующими могут быть функции вида $y(x)=a+bx^3$, $y(x)=a+b\sin(x)$ и $y(x)=a+b\,arctg(x)$

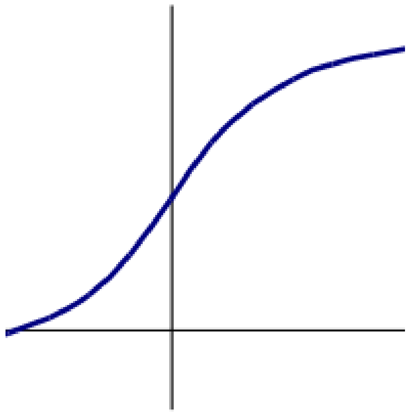




$y(x) = a + b \cdot x^3$



$y(x) = a + b \cdot \sin(x)$



$y(x) = a + b \cdot \mathrm{arctg}(x)$

3. Подберем коэффициенты a и b для каждой из этих двух функций. Для этого зададим сумму квадратов разностей аппроксимирующей функции и экспериментальных данных в виде функции D, зависящей от a и b.

$$D(a,b) := \sum_{i=1}^{10} \left[\left[a + b\cdot(X_i)^3\right] - Y_i\right]^2$$

Вычислим, при каких a и b функция $D(a,b) = \min$. Для этого воспользуемся вычислительным блоком Given - Minimize, в котором необходимо задать начальные приближения коэффициентов a и b. Результатом применения этого блока будет вектор-столбец, содержащий значения коэффициентов

Given

$a := 0$

$b := 0$

$R := \mathrm{Minimize}(D, a, b) = \begin{pmatrix} -7.6 \\ 1.538 \end{pmatrix}$

$a := R_1$

$b := R_2$

Коэффициенты могут быть рассчитаны и другим способом - с помощью функции аппроксимации общего вида **genfit**. В этом случае, сначала необходимо задать вектор-столбец с начальными приближениями коэффициентов a и b.

$V := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Далее требуется задать функцию F(x,a) в виде вектор-столбца, содержащего аппроксимирующую функцию, ее производную по коэффициенту a и ее производную по коэффициенту b. Сами коэффициенты необходимо задать как элементы одного массива, отличающиеся только нижним индексом.

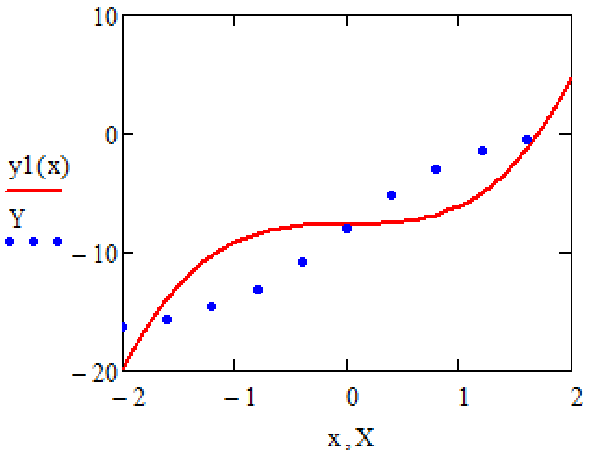
$$F(x,a) := \begin{pmatrix} a_2 x^3 + a_1 \\ 1 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Далее необходимо применить функцию genfit и задать в ней данные табличной функции (X и Y), начальные приближения коэффициентов и массив с производными. Результатом применения будет вектор-столбец с коэффициентами. Их значения не отличаются от значений, полученных первым способом.

$$A := \mathrm{genfit}(X, Y, V, F) = \begin{pmatrix} -7.6 \\ 1.538 \end{pmatrix}$$

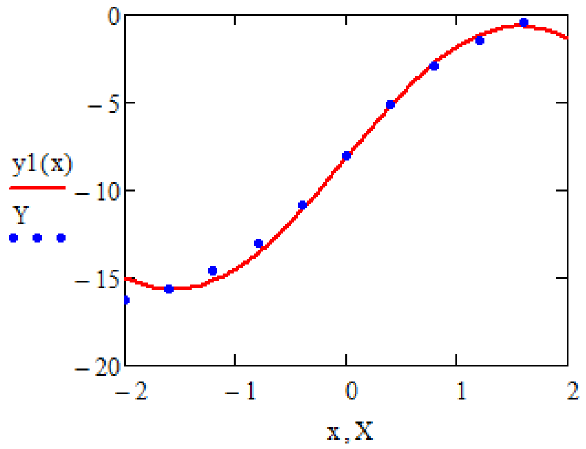
Далее полученные коэффициенты подставляются в аппроксимирующую функцию и строится ее график

$$y1(x) := a + b \cdot x^3$$

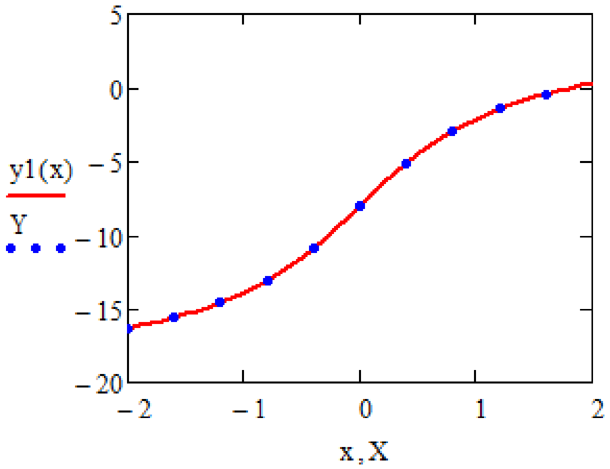


Аналогичным способом находятся коэффициенты двух остальных аппроксимирующих функций

$$y1(x) := a + b \cdot \sin(x)$$



$$y1(x) := a + b \cdot atan(x)$$



4. Выполним оценку достоверности для выбранных аппроксимирующих функций из выражения $\Delta = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1} \left(y(X_i) - Y_i\right)^2}{n}}$

$$\Delta1 := \sqrt{\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y1(X_i) - Y_i\right)^2\right]}{n}}$$

$$\Delta1 = 3.163$$

$$\Delta2 = 0.506$$

$$\Delta3 = 1.595 \times 10^{-3}$$

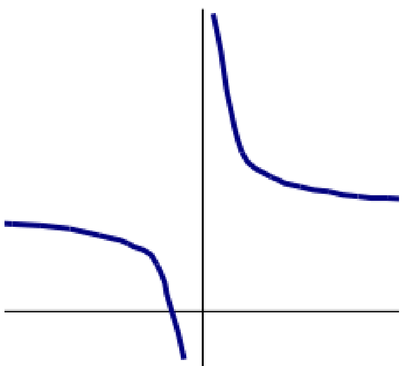
В случае аппроксимации функцией $y(x) = a + b\,arctg(x)$ разность значений табличной и аппроксимирующей функции в узлах наименьшая, что позволяет говорить о том, что она наилучшим образом описывает табличную функцию.

Варианты для домашних заданий

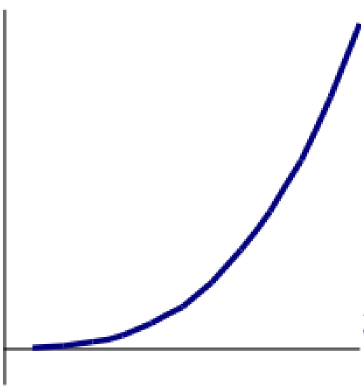
1	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
	y	0,81	0,97	1,17	1,40	1,67	2,00	2,39	2,87	3,43	4,11
2	x	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
	y	12,50	10,00	8,00	6,40	5,12	4,10	3,28	2,62	2,10	1,68
3	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	-4,91	-2,83	-1,61	-0,75	-0,08	0,47	0,93	1,33	1,68	2,00

4	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
	y	0,00	0,01	0,04	0,10	0,19	0,32	0,51	0,77	1,09	1,50
5	x	-3,00	-2,70	-2,40	-2,10	-1,80	-1,50	-1,20	-0,90	-0,60	-0,30
	y	47,00	38,45	30,80	24,05	18,20	13,25	9,20	6,05	3,80	2,45
6	x	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50
	y	143,00	86,13	48,00	24,88	13,00	8,63	8,00	7,38	3,00	-8,88
7	x	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80	2,05	2,30	2,55
	y	6,00	4,18	3,50	3,14	2,92	2,77	2,67	2,59	2,52	2,47
8	x	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
	y	2,24	1,50	1,01	0,67	0,45	0,30	0,20	0,14	0,09	0,06
9	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	0,72	1,29	2,30	4,11	7,36	13,17	23,55	42,13	75,37	134,82
10	x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
	y	-3,69	-2,83	-2,16	-1,61	-1,15	-0,75	-0,40	-0,08	0,21	0,47
11	x	0,08	0,20	0,32	0,44	0,56	0,68	0,80	0,92	1,04	1,16
	y	0,00	0,01	0,05	0,13	0,26	0,47	0,77	1,17	1,69	2,34
12	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85
	y	-36,29	-34,10	-30,64	-25,91	-19,91	-12,65	-4,11	5,68	16,75	29,08
13	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
	y	13,00	10,56	9,08	8,32	8,04	8,00	7,96	7,68	6,92	5,44
14	x	0,38	0,58	0,78	0,98	1,18	1,38	1,58	1,78	1,98	2,18
	y	-1,16	-0,07	0,46	0,78	0,98	1,13	1,24	1,33	1,39	1,45
15	x	2,00	2,60	3,20	3,80	4,40	5,00	5,60	6,20	6,80	7,40
	y	1,11	1,41	1,80	2,29	2,91	3,69	4,70	5,97	7,59	9,65
16	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	-0,85	-1,40	-2,30	-3,78	-6,21	-10,20	-16,77	-27,55	-45,27	-74,39

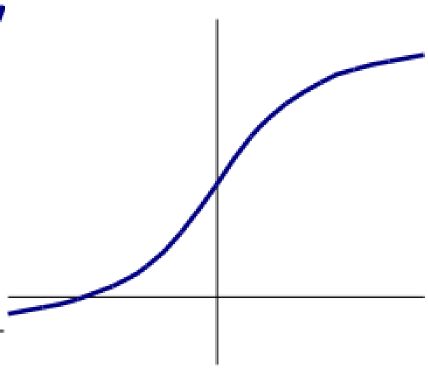
Приложение 1. Графики нелинейных зависимостей



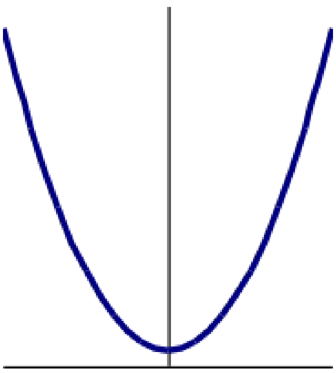
$$y(x) = a + \frac{b}{x}$$



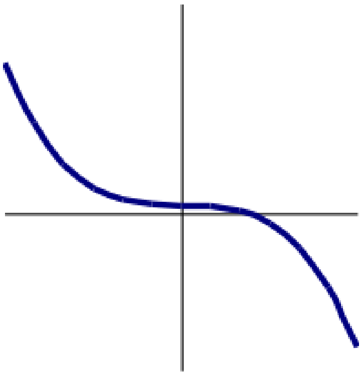
$$y(x) = a \cdot x^b$$



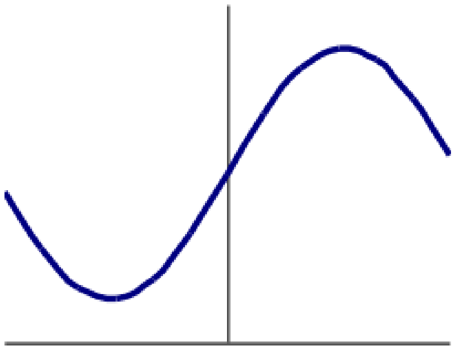
$$y(x) = a + b \cdot \mathrm{arctg}(x)$$



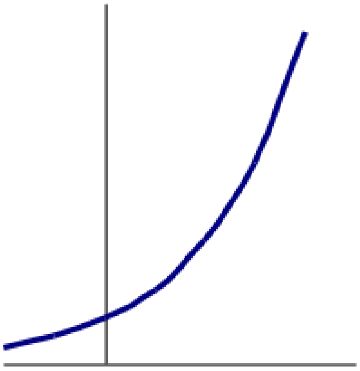
$y(x) = a + b \cdot x^2$



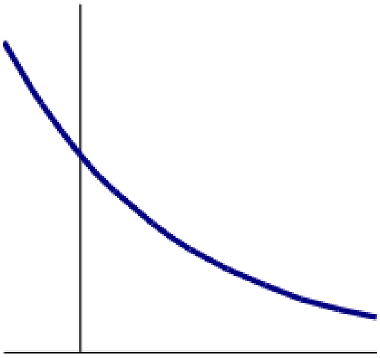
$y(x) = a + b \cdot x^3$



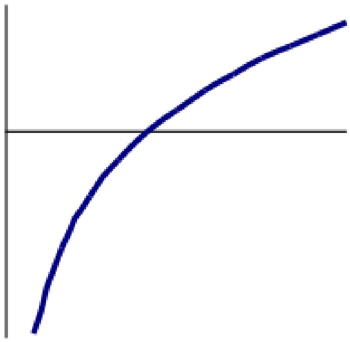
$y(x) = a + b \cdot \sin(x)$



$y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$



$y(x) = a \cdot b^x$



$y(x) = a + b \cdot \ln(x)$