Кафедра механики

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Методические указания к расчетно-графической работе

2.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ №2

Задача: Расчет на прочность элементов статически неопределимой стержневой системы.

Рассчитываемая система представляет собой стержневую конструкцию с одной шарнирной опорой и двумя деформируемыми тягами. Пример схемы задания изображен на рис.2.1.

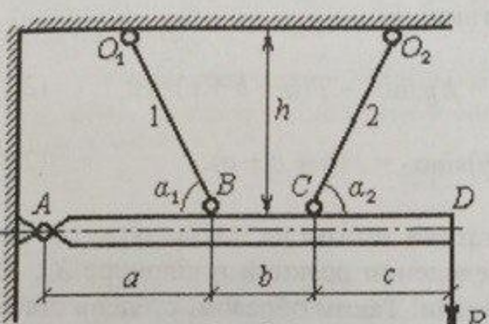

Рис. 2.1

Заданы материалы стержней: стержень 1 – сталь, стержень 2 – медь; упругие модули на растяжение (сжатие): $E_1 = 2\cdot10^5$ МПа; $E_2 = 1\cdot10^5$ МПа; внешняя сила $P = 2\cdot10^5$ Н; коэффициенты линейного температурного расширения материалов стержней:

$\alpha_1^t = 12\cdot10^{-6}$ град $^{-1}$;

$\alpha_2^t = 16\cdot10^{-6}$ град $^{-1}$.

Неточность изготовления элемента системы: стержень 2 изготовлен длиннее на величину $\delta = 0{,}002\cdot l_2$.

Изменение температуры системы $\Delta T = 20°C$.

Допустимые напряжения для материалов каждого из стержней: $[\sigma]_1=160$ МПа, $[\sigma]_2 = 100$ МПа. Конструктивное соотношение площадей стержней $F_1/F_2 = 2$.

Геометрические размеры: $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$.

Определить величины F_1, F_2, учитывая, что балка AD (рис.2.1) предполагается абсолютно жёсткой и невесомой.

Пример решения:

1. *Определение усилий от внешней силы P ($\Delta T = 0$, $\delta = 0$).*

Вычертим расчётную схему балки с указанием всех размеров. Для расчёта усилий используем метод сечений. Сечения проведём через оба стержня. Рассмотрим равновесие нижней части системы, заменяя действие отбрасываемой верхней части стержней внутренними усилиями реакций S_1, S_2 (рис.2.2).

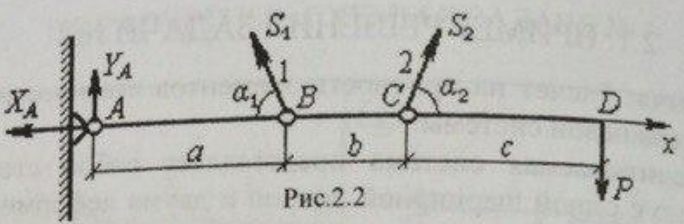

Рис.2.2

Составим уравнения статики:

$$\sum M_A = S_1 \cdot a \cdot \sin\alpha_1 + S_2(a+b)\sin\alpha_2 - P(a+b+c) = 0 \tag{2.1}$$

или

$$S_1 \cdot a \cdot \sin\alpha_1 + S_2(a+b)\sin\alpha_2 = P(a+b+c). \tag{2.2}$$

Остальные уравнения статики можно не составлять, так как они необходимы лишь при определении реакций в шарнире X_A, Y_A, чего не требуется по условию задачи. Таким образом, степень статической неопределимости системы $K = 1$, так как мы имеем два неизвестных усилия S_1,S_2 и одно уравнение равновесия статики.

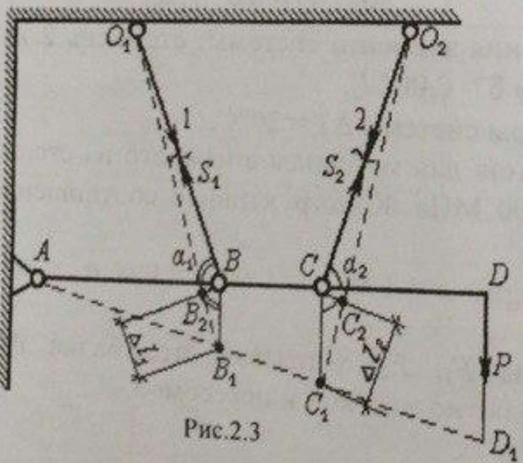

Рис.2.3

Для составления одного уравнения совместности деформаций необходимо рассмотреть схему перемещений в системе (рис.2.3). Под действием внешней силы P первый стержень удлинится на величину Δl_1, а второй – на величину Δl_2, при этом жёсткая балка AD повернётся в положение AD_1. Ввиду малости упругих деформаций, горизонтальными смещениями точек B и C, лежащих на оси балки, пренебрежем и будем считать, что точки B и C в ходе деформирования системы переместятся строго вертикально и займут положение

C_1. Положение этих точек определяется пересечением линий AD и перпендикуляров, проведённых к первоначальному направлению осевой линии балки AD в точки B и C.

Удлинения Δl_1 и Δl_2 находим также графически, для чего из точек B и C опустим перпендикуляры на линии O_1B_1 и O_2C_1, соответствующие новым положениям стержней 1 и 2 после приложения нагрузки P. Отрезки B_1B_2 и C_1C_2 определяют удлинения соответственно Δl_1 и Δl_2.

Уравнения совместности деформаций в данном случае проще всего составить, воспользовавшись подобием треугольников ABB_1 и ACC_1:

$$\frac{BB_1}{a} = \frac{CC_1}{a+b}. \qquad (2.3)$$

Из $\Delta\, BB_1B_2$ и $\Delta\, CC_1C_2$ определим

$$BB_1 = \frac{B_1B_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha_1}; \quad CC_1 = \frac{C_1C_2}{\sin\alpha_2} = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha_2}. \qquad (2.4)$$

Подставив равенства (2.4) в формулу (2.3), получим уравнение совместности деформаций заданной стержневой системы

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a}{(a+b)} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}, \qquad (2.5)$$

или $$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot k,$$

где $k = \dfrac{a}{(a+b)} \cdot \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ безразмерный коэффициент, учитывающий особенности геометрической конфигурации системы. Используя закон Гука для каждого из стержней

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2},$$

из уравнения (2.5) получим

$$\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} \cdot k.$$

Учитывая, что $l_1 = h/\sin\alpha_1$; $l_2 = h/\sin\alpha_2$ (рис.2.1), последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$S_1 = S_2 \frac{E_1F_1}{E_2F_2} \cdot \frac{a}{(a+b)} \cdot \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2}. \qquad (2.6)$$

Далее решаем совместно систему уравнений (2.2) и (2.6):

$$S_2 = P\frac{\dfrac{(a+b+c)}{(a+b)\sin\alpha_2}}{1+\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\dfrac{a^2}{(a+b)^2}\dfrac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}; \quad S_1 = P\frac{\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\dfrac{a(a+b+c)}{(a+b)^2}\dfrac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2}}{1+\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\dfrac{a^2}{(a+b)^2}\dfrac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}.$$

Из последних двух выражений при известном отношении F_1/F_2 находим численные значения усилий:

$$S_1 = 19{,}4 \cdot 10^4 \text{ Н (растяжение)}, \; S_2 = 29{,}1 \cdot 10^4 \text{ Н (растяжение)}.$$

Проверка правильности найденных численных значений производится путём подстановки $S_1 = 19{,}4 \cdot 10^4$ Н и $S_2 = 29{,}1 \cdot 10^4$ Н в уравнение равновесия (2.2):

$$19{,}4 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 29{,}1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 3 \cdot 2 \cdot 10^5.$$

2. *Определение напряжений, вызванных неточностью изготовления стержней ($P = 0$, $\Delta T = 0$, $\delta \neq 0$).*

Пусть первый стержень изготовлен с неточностью по длине $\delta_1 = 0$ (номинальный размер), а второй – с неточностью $+\delta_2$, т.е. с фактической длиной несколько большей номинальной. Тогда при сборке в них появятся внутренние напряжения. Расчётная схема при этом будет выглядеть так, как показано на рис.2.4. Знаки внутренних усилий будут разными, так как при сборке необходимо второй стержень сжать на величину Δl_2 и в нём появится сжимающее усилие S_2.

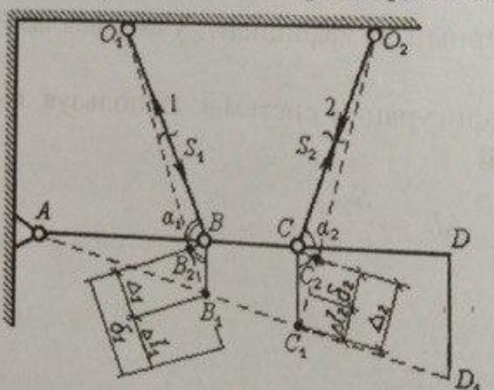

Рис.2.4

усилие S_2.

При этом первый стержень будет испытывать растягивающее усилие S_1.

Уравнение равновесия для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид:

$$\Sigma M_A = -S_1 \cdot a \cdot \sin\alpha_1 + S_2(a + b)\sin\alpha_2 = 0. \qquad (2.7)$$

Для перемещений (рис. 3) получим

$$B_2B_1 = \Delta_1 = \delta_1 - \Delta l_1; \quad C_2C_1 = \Delta_2 = \delta_2 + \Delta l_2. \qquad (2.8)$$

Соотношение между Δ_1 и Δ_2 находим аналогично п.1 (см. уравнение (2.5)):

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cdot k. \qquad (2.9)$$

Подставив выражения (2.8) в равенство (2.9), получим уравнение совместности деформаций

$$\delta_1 - \Delta l_1 = (\delta_2 + \Delta l_2) \cdot k. \qquad (2.10)$$

Выразив согласно закону Гука удлинения Δl_1 и Δl_2 через усилия S_1, S_2, преобразуем уравнение (2.10):

$$\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} + \frac{k S_2 l_2}{E_2 F_2} = \delta_1 - k\delta_2. \qquad (2.11)$$

Перейдём в уравнении (2.11) к новым переменным, в качестве которых выберем напряжения

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}.$$

Тогда, выразив l_1 и l_2 через h, уравнению (2.11) можно придать следующий вид:

$$\sigma_1 + \sigma_2 k \frac{l_2 \sin\alpha_1 E_1}{l_1 \sin\alpha_2 E_2} = \left(\frac{\delta_1}{l_1} - k\frac{\delta_2}{l_1}\right) E_1. \qquad (2.12)$$

Перепишем уравнение (2.7) в напряжениях:

$$\frac{S_1}{F_1} a \sin\alpha_1 = \frac{S_2}{F_2}\frac{F_2}{F_1}(a+b)\sin\alpha_2$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{(a+b)\sin\alpha_2}{a\sin\alpha_1}\frac{F_2}{F_1} = \sigma_2 \frac{F_2}{F_1}\frac{1}{k}. \qquad (2.13)$$

Решим систему уравнений (2.12), (2.13) относительно неизвестных напряжений σ_1 и σ_2:

$$\sigma_2 = \frac{\left(\frac{\delta_1}{l_1} - k\frac{\delta_2}{l_1}\right)\frac{F_1}{F_2}\frac{a}{(a+b)}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}E_1}{1 + \frac{E_1F_1}{E_2F_2}\frac{a^2}{(a+b)^2}\frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}};$$

$$\sigma_1 = \frac{\left(\frac{\delta_1}{l_1} - k\frac{\delta_2}{l_1}\right)E_1}{1 + \frac{E_1F_1}{E_2F_2}\frac{a^2}{(a+b)^2}\frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}. \qquad (2.14)$$

При заданных величинах $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0{,}002 l_2$ из уравнений (2.14) получим

$$\sigma_1 = -55{,}9 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -32{,}3 \text{ МПа}.$$

Отрицательные значения найденных напряжений означают, что принятые направления усилий в стержнях S_1 и S_2 противоположны фактическим, т.е. первый стержень растягивается, а второй – сжимается:

$$\sigma_1 = 55{,}9 \text{ МПа (растяжение)}; \quad \sigma_2 = -32{,}3 \text{ МПа (сжатие)}.$$

3. *Расчёт температурных напряжений ($P = 0$, $\delta = 0$, $\Delta T \neq 0$).* Предположим, что оба стержня системы нагреты до температуры $T_к + \Delta T$, где $T_к$ – комнатная температура. Тогда их длины получат соответствующие приращения

$$\Delta l_1' = \alpha_1' \cdot l_1 \cdot \Delta T; \quad \Delta l_2' = \alpha_2' \cdot l_2 \cdot \Delta T. \qquad (2.15)$$

Эти приращения можно формально рассматривать как неточности изготовления стержней и воспользоваться для определения возникающих при этом температурных напряжений результатами решения п.2 (см. уравнения (2.14)), заменив в окончательных выражениях δ_1 на $\Delta l_1'$, δ_2 на $\Delta l_2'$. Тогда для температурных напряжений σ_1' и σ_2' будут справедливы соотношения:

$$\sigma_1' = \frac{\left(\alpha_1' - k\frac{l_2}{l_1}\alpha_2'\right) \cdot \Delta T \cdot E_1}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}};$$

$$\sigma_2' = \frac{\left(\alpha_1' - k\frac{l_2}{l_1}\alpha_2'\right) \cdot \Delta T \cdot E_1 \frac{F_1}{F_2} k}{1 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}}. \qquad (2.16)$$

При $\Delta T = 20°C$ и заданных геометрических и физических параметрах системы из уравнений (2.16) получим:

$$\sigma_1' = -31{,}3\,\text{МПа (сжатие)}; \quad \sigma_2' = 18{,}1\,\text{МПа (растяжение)}.$$

4. *Подбор сечений элементов системы.*

При расчёте сечений учитывается одновременное действие всех нагружающих факторов: внешней нагрузки, внутренних моментных и температурных напряжений. Полученные в пп.1, 2, 3 данные представим в виде табл.2.1.

Таблица 2.1

Внутренние усилия от силы P, МН	Напряжения, МПа			F_1/F_2
	от δ	от ΔT	допустимые	
$S_1 = 0{,}194$	$\sigma_1 = 55{,}9$	$\sigma_1' = 31{,}3$	$[\sigma]_1 = 160$	2
$S_2 = 0{,}291$	$\sigma_2 = -32{,}3$	$\sigma_2' = 18{,}1$	$[\sigma]_2 = 100$	

Условия прочности для каждого из стержней записываются в виде неравенств

$$\frac{S_1}{F_1}+\sigma_1+\sigma_1^t \le [\sigma]_1; \quad \frac{S_2}{F_2}+\sigma_2+\sigma_2^t \le [\sigma]_2. \qquad (2.17)$$

Отсюда

$$F_1 \ge \frac{S_1}{[\sigma]_1-\sigma_1-\sigma_1^t}, \quad F_2 \ge \frac{S_2}{[\sigma]_2-\sigma_2-\sigma_2^t}. \qquad (2.18)$$

При выбранных численных значениях для F_1 и F_2 получим

$$F_1 \ge 14{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2; \quad F_2 \ge 25{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2. \qquad (2.19)$$

Учитывая заданное отношение $F_1/F_2 = 2$, находим площадь первого стержня

$$F_1' = 2F_2 = 50{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2;$$

и второго

$$F_2' = 0{,}5F_1 = 7{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Первому из неравенств (2.19) удовлетворяет значение $F_1' = 50{,}8\cdot 10^{-4}$ м^2, при значениях F_2' второе неравенство не выполняется. Окончательно выбираем:

$$F_1 = 50{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2; \quad F_2 = 25{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Очевидно, что при этом напряжения в первом стержне будут меньше допустимых, т.е. $\sigma_1 < [\sigma]_1$, во втором – $\sigma_2 = [\sigma]_2$.

На рис.2.5 приведены схемы, а в табл. 2.2 – исходные данные для выполнения задания по вариантам.

2.3. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ К ЗАДАЧЕ № 2

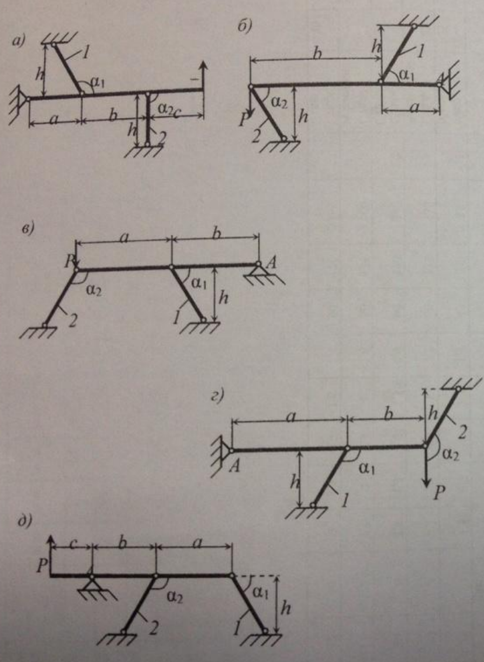

Рис.2.5

Таблица 2.3

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Материал	Модуль упругости E, МПа	Коэффициент линейного температурного расширения, $\alpha, {}^{\circ}c^{-1}$	[σ], МПа
Сталь	$2\cdot10^5$	$12\cdot10^{-6}$	160
Медь	$1\cdot10^5$	$16\cdot10^{-6}$	100
Алюминий	$0{,}7\cdot10^5$	$26\cdot10^{-6}$	60

Таблица 2.2

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ЗАДАЧЕ № 2

№ п/п.	Расчетная схема (рис.2.5)	*a*, м	*в*, м	*c*, м	*d*, м	*h*, м	α_1, град	α_2, град	*P*, КН	F_2/F_1	Материал стержней	ΔT, °C	δ
1	*д*	1,5	2	0,5	0,5	1	60	120	30	1,5	Медь Алюминий	25 –	0,0005 –
2	*а*	1	1,5	1	0,5	1	45	45	40	1	Сталь Сталь	30 –	0,0004 –
3	*а*	1	2	0,5	0,5	1,5	120	90	35	2	Сталь Медь	-20 –	0,0003 –
4	*б*	1,5	2	1,5	0,6	1	60	90	50	1	Сталь Сталь	20 –	-0,0002 –
5	*б*	3	2	1	1	1,5	45	90	45	4	Сталь Алюминий	– 30	0,0003 –
6	*в*	1	1,5	1	1	0,75	120	60	65	0,5	Алюминий Сталь	-30 –	0,0003 –
7	*в*	1,5	1	1,5	0,4	0,8	120	90	50	0,5	Медь Сталь	– 15	-0,0004 –
8	*г*	1,5	1,5	1	1	1	45	30	50	1	Медь Медь	– -25	-0,0002 –
9	*г*	2	2	1	1	1,2	60	135	65	3	Сталь Алюминий	25 –	-0,0001 –
10	*д*	2	1	1	1,5	0,7	90	120	45	2	Сталь Сталь	– 20	0,0002 –
11	*д*	2	1,5	0,7	0,5	0,8	60	120	35	1,5	Медь Сталь	-25 –	0,0005 –
12	*а*	1,5	1,5	1	0,5	1	45	45	45	1	Сталь Сталь	- –30	0,0004 –
13	*а*	1,2	2,2	0,5	0,5	1,5	120	90	60	2	Сталь Медь	20 –	0,0003

Продолжение таблицы 2.2

№ п/п.	Расчетная схема (рис.2.5)	a, м	$в$, м	c, м	d, м	h, м	α_1, град	α_2, град	P, КН	F_2/F_1	Материал стержней	ΔT, °С	δ
14	*б*	1,5	12	1,5	0,6	1	60	90	50	1	Сталь Сталь	- -20	- 0,0002
15	*б*	2,5	!,6	0,8	1	1,5	45	90	100	4	Сталь Алюминий	– 30	0,0003 –
16	*в*	1,4	1,5	1	0,7	0,75	120	60	80	0,5	Алюминий Сталь	30 –	- 0.0003
17	*в*	2,5	1,2	1,5	0,8	0,8	120	90	75	0,5	Медь Сталь	– -15	- 0,0004
18	*г*	2	2	1,3	1	1,2	45	30	40	1	Медь Медь	– 25	-0,0002 –
19	*г*	1,6	1,2	1	0,8	1,2	60	135	90	3	Сталь Алюминий	-25 –	- 0,0001
20	*д*	2,3	1,2	1	1,2	0,9	90	120	60	2	Сталь Медь	– 20	0,0002 –
21	*д*	2,5	2	0,3	0,5	1,4	60	120	70	1,5	Медь Алюминий	25 –	- 0,0005
22	*а*	1,5	1,5	0,5	0,5	1,7	45	45	180	1	Сталь Сталь	-30 –	- 0,0004
23	*а*	2	1,2	0,5	0,5	0,9	120	90	90	2	Сталь Медь	-20 –	0,0003 –
24	*б*	1,9	2,2	1,5	0,6	1,25	60	90	200	1	Сталь Сталь	20 –	-0,0002 –
25	*б*	2,5	2	1,4	1,4	1,8	45	90	140	4	Сталь Алюминий	– -30	0,0003 –
26	*в*	2	1,7	1	0,7	0,75	120	60	100	0,5	Алюминий Сталь	30 –	- 0,0003
27	*в*	1,5	1,5	1,5	0,4	0,8	120	90	150	0,5	Медь Сталь	– -15	-0,0004 –

Окончание таблицы 2.2

№ п/п.	Расчетная схема (рис.2.5)	a, м	$в$, м	c, м	d, м	h, м	α_1, град	α_2, град	P, КН	F_2/F_1	Материал стержней	ΔT, °С	δ
28	*г*	1,5	0,7	1	1,3	1,3	45	30	85	1	Медь Медь	– 25	-0,0002 –
29	*г*	2,2	1,6	0,8	1	1,2	60	135	130	3	Сталь Алюминий	25 –	-0,0001 –
30	*д*	2,4	1,3	0,6	1,5	0,9	90	120	240	2	Сталь Сталь	– -20	- 0,0003
31	*г*	1,7	2	1,3	1	1,6	60	135	100	3	Сталь Алюминий	25 –	-0,0001 –
32	*д*	2	1,5	0,9	1,5	1,4	90	120	260	2	Сталь Сталь	– -20	- 0,0002