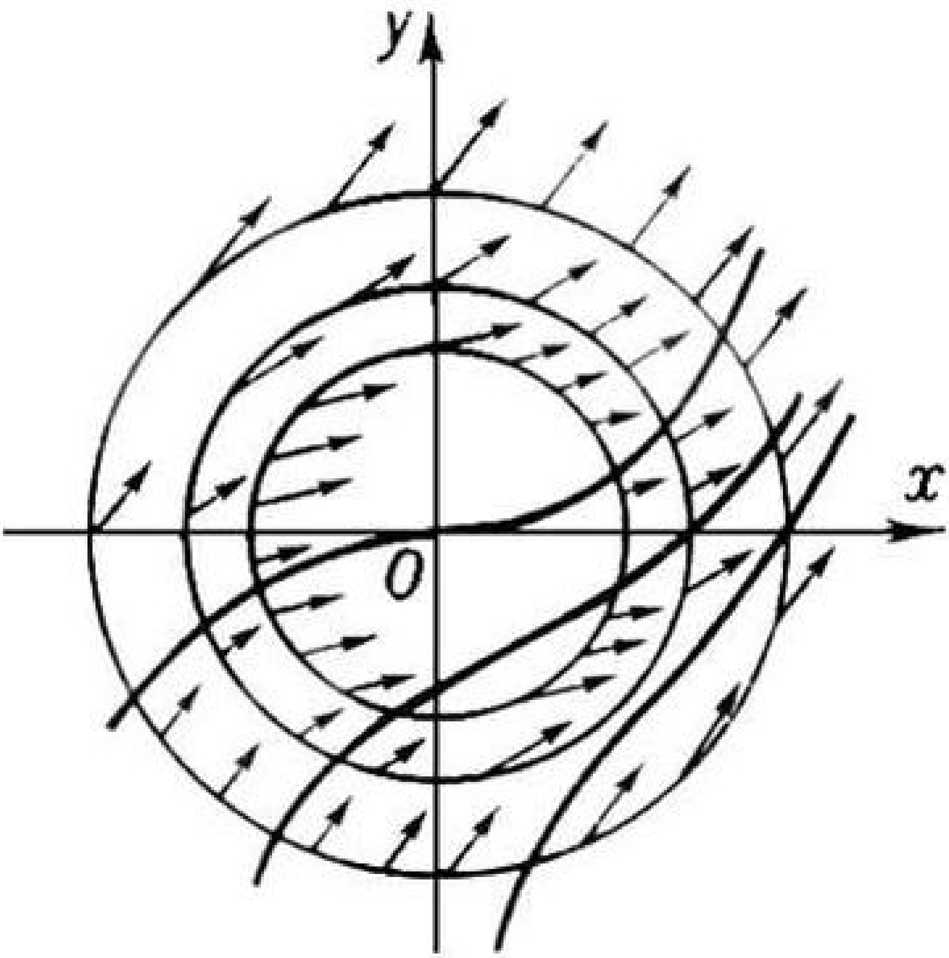
Типовой расчет по математике

Функции многих переменных

Дифференциальные уравнения

4 модуль

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Брагина О.И., Панкратова Т.Ф., Рябова А.В.

Типовой расчет по математике

Функции многих переменных

Дифференциальные уравнения

4 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2013

Брагина О.И., Панкратова Т.Ф., Рябова А.В. Типовой расчет **“Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения”. 4 модуль**. Учебно-методическое пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. –41 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов технических специальностей первого курса.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 22.01.2013, протокол №1.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

Методические указания.

Типовой расчёт состоит из пяти заданий по темам "Функции нескольких переменных "и "Дифференциальные уравнения". Методические указания не содержат полного изложения теории, а лишь напоминают некоторые факты и типовые приёмы. Для каждого задания разобраны типовые примеры.

1. В первом задании предлагается проверить, является ли функция трёх переменных $u(x, y, z)$ решением дифференциального уравнения в частных производных (e).

Задача 1.

$u = z \cdot y^{x^3+z+4}$, (e):

$$z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 3x^2(1 + z\ln y)\ln y \cdot u.$$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^{x^3+z+4} + z\ y^{x^3+z+4}\ln y = y^{x^3+z+4}(1 + z\ln y).$$

Теперь возьмём частную производную по x от полученной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y^{x^3+z+4} 3x^2 \ln y(1 + z\ln y).$$

Умножим результат на z и сравним с правой частью уравнения (e):

$$z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 3x^2(1 + z\ln y)\ln y\ u.$$

Ответ. Функция u удовлетворяет уравнению (e).

2. Во втором задании предлагается найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных $z(x, y)$ в замкнутой области D.

Задача 2,а.

$z = x^2 + 6x + y^2 + 2y + 9$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le -2$ и $-2 \le y \le 0$.

Решение.

Ищем стационарные точки. Для этого находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и приравниваем их к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1.$$

Стационарная точка (-3;-1) лежит внутри области D. Это точка минимума функции z, т.к. выполнены достаточные условия

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-3,-1)} * \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-3,-1)} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|\right)^2 > 0$$

и

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-3,-1)} > 0.$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

а

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

В этой точке $z_{min} = z(-3,-1) = -1$. Теперь исследуем границу C области D. Она состоит из четырёх частей. Часть C_1: $\begin{cases} y = 0, \\ -4 \leq x \leq 2. \end{cases}$ Часть C_2: $\begin{cases} x = -4, \\ -2 \leq y \leq 0. \end{cases}$ Часть C_3: $\begin{cases} y = -2, \\ -4 \leq x \leq 2. \end{cases}$ Часть C_4: $\begin{cases} x = -2, \\ -2 \leq y \leq 0. \end{cases}$

На C_1 и C_3 $z = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. $x = -3$ - точка минимума функции z на этих отрезках, $z(-3,0) = z(-3,-2) = 0$. На границах каждого из четырёх отрезков

$$z(-4,0) = z(-2,0) = z(-4,-2) = z(-2,-2) = 1.$$

На C_2 и C_4 $z = (y+1)^2$. Точка минимума $y = -1$. Минимальное значение $z(-4,-1) = z(-2,-1) = 0$. Сравнивая найденные значения, находим, что наименьшее значение функции z в области D $z_{min}(D) = -1$, а наибольшее $z_{max}(D) = 1$.

Задача 2,b.

Функция та же, а область D задана неравенствами

$-4 \leq x \leq -2$ и $0 \leq y \leq 2$. Теперь точка минимума функции z лежит вне области D. Остаётся исследовать функцию z на границе, которая состоит из четырёх отрезков. C_1: $\begin{cases} y = 0, \\ -4 \leq x \leq -2. \end{cases}$ C_2: $\begin{cases} x = -2, \\ 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$

C_3:$\begin{cases} y = 2, \\ -4 \leq x \leq -2. \end{cases}$ C_4: $\begin{cases} x = -4, \\ 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$

На C_1 $z = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Как и в задаче 2,а, наименьшее значение $z(-3,0) = 0$. На концах отрезка $z(-4,0) = z(-2,0) = 1$. На C_3 $z = (x+3)^2 + 8$. Наименьшее значение $z(-3,2) = 8$. На концах отрезка $z(-4,2) = z(-2,2) = 9$. В этом примере как наименьшее, так и наибольшее значения функции в области D достигаются на границе.

$z_{min}(D) = 0$, а $z_{max}(D) = 9$.

3. В третьем задании рассматриваются четыре обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка. Предлагается указать тип каждого уравнения и найти общее (в пунктах a,b,d) или частное (в пункте c) решение.

Задача 3,a. Найдите общее решение уравнения

$$(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x.$$

Решение.

Запишем данное уравнение в симметричной форме

$$(1 + e^{2x})y^2 dy - e^x dx = 0.$$

Это уравнение имеет вид

$$m_1(x)n_1(y)dx + m_2(x)n_2(y)dy = 0,$$

т.е. является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$y^2 dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

Проинтегрируем последнее уравнение (с разделёнными переменными):

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + \frac{c}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{3 \operatorname{arctg} e^x + c}\ .$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Задача 3,b.

Найдите общее решение уравнения

$$y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}\ .$$

Решение.

Запишем уравнение в симметричной форме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$$

или

$$(y-x)dx - (x+y)dy = 0.$$

Это однородное уравнение, т.к. коэффициенты при dx, dy есть однородные функции первой степени. Заменой $y = z(x)x$ исходное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$(zx - x)dx - (x + zx)(zdx + xdz) = 0$$

Сокращая на x $\quad$ ($x = 0$ не является решением), получим

$$(z-1)dx - (1+z)(zdx + xdz) = 0;$$

$$(z - 1 - z - z^2)dx - (1+z)xdz = 0;$$

$$(-z^2 - 1)dx = (1+z)xdz.$$

Разделим переменные:
$$\frac{z+1}{z^2+1}dz = -\frac{dx}{x}.$$
Проинтегрируем последнее уравнение
$$\int \frac{z+1}{z^2+1}dz = -\int \frac{dx}{x};$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+1)}{z^2+1} + \int \frac{dz}{z^2+1} = -\ln|x| + \ln c;$$
$$\frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \operatorname{arctg} z = \ln|\frac{c}{x}|;$$
$$\operatorname{arctg} z = \ln|\frac{c}{x\sqrt{z^2+1}}|.$$
Заменяя z на $\frac{y}{x}$, окончательно получим общий интеграл
$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\frac{|c|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задача 3,с.

Найдите решение задачи Коши
$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x, \quad y(0) = 1.$$

Решение.

Исходное дифференциальное уравнение - это линейное неоднородное уравнение первого порядка
$$y' = p(x)y + q(x).$$
Рассмотрим 2 способа решения данного уравнения.

1 способ. Метод вариации произвольной постоянной (Лагранжа). Сначала решим соответствующее линейное однородное уравнение
$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y$$
$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln c.$$

Получим общее решение линейного однородного уравнения

$$y = \frac{c}{\cos x}.$$

Теперь будем искать общее решение линейного неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{c(x)}{\cos x}.$$

Подставляя y и $y' = \dfrac{c'\cos x + c\sin x}{\cos^2 x}$ в исходное уравнение, получим

$$\frac{c'}{\cos x} + c\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \frac{c}{\cos x} + \cos x,$$

$$c' = \cos^2 x dx, \quad \text{откуда}$$

$$c(x) = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1)\frac{1}{\cos x}.$$

Подставив начальное условие $y(0) = 1$ в это решение, получим, что $c_1 = 1$. Таким образом, решением задачи Коши будет

$$y(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + 1)\frac{1}{\cos x}.$$

2 способ. Для решения линейного неоднородного уравнения можно также применить подстановку Бернулли $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ и исходное уравнение примет вид

$$u(x)[v'(x) - p(x)v(x)] + u'(x)v(x) = q(x).$$

Выберем функцию $v(x)$ такой, чтобы обратилась в ноль квадратная скобка, т.е. чтобы

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v(x) = 0.$$

Очевидно, что получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В качестве функции $v(x)$ можно выбрать любое частное решение. Затем из уравнения

$$v(x)\frac{du}{dx} = q(x)$$

найдём $u(x)$ (опять имеем уравнение с разделяющимися переменными). В нашем примере сначала решаем уравнение

$$\frac{dv}{dx} - \operatorname{tg} x \; v(x) = 0,$$

откуда

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{c}{\cos x}.$$

Полагая $c = 1$, выбираем частное решение

$$v = \frac{1}{\cos x}.$$

Далее, ищем общее решение уравнения

$$\frac{1}{\cos x}\frac{du}{dx} = \cos x.$$

Имеем

$$du = \cos^2 x dx, \quad \text{откуда}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1.$$

В итоге

$$y(x) = u(x)v(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1)\frac{1}{\cos x}.$$

Задача 3,d.

Найдите общее решение уравнения

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Решение.

Данное дифференциальное уравнение - это уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}; \quad (\alpha \neq 0; \alpha \neq 1).$$

Рассмотрим два способа его решения.

1 способ. С помощью подстановки $z(x) = y^{1-\alpha}$ исходное уравнение приводится к линейному. В нашем примере $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
Разделим обе части уравнения на $\sqrt{y}$ ($y = 0$ $-$ решение исходного уравнения)

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{4}{x}\sqrt{y} + x$$

и сделаем замену переменной $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$.
Т.к.

$$z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}, \quad \text{то получим}$$

$$2z' = \frac{4}{x}z + x \quad \text{или}$$

$$z' = \frac{2}{x}z + \frac{x}{2} \quad \text{- линейное неоднородное уравнение.}$$

Решим его методом вариации произвольной постоянной. Найдём общее решение однородного уравнения

$$z' = \frac{2}{x}z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = 2\ln x + \ln c \Rightarrow z = cx^2.$$

Теперь ищем решение линейного неоднородного уравнения в виде $z(x) = c(x)x^2$. Так как $z' = c'x^2 + c\, 2x$, то

$$c'x^2 + 2cx = \frac{2cx^2}{x} + \frac{x}{2},$$

$$c' = \frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad c(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = (\frac{1}{2}\ln|x| + c_1)x^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = z^2 = (\frac{1}{2}\ln|x| + c_1)x^4 -$$

общее решение исходного уравнения.

2 способ. Можно непосредственно применять подстановку Бернулли $y(x) = u(x)v(x)$. Имеем

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv}$$

или

$$u[v' - \frac{4}{x}v] + u'v = x\sqrt{uv}$$

Для определения функции $v(x)$ потребуем, чтобы $v' - \dfrac{4}{x}v = 0$, откуда $v = x^4$. Далее получим $u'x^4 = x\sqrt{ux^4}$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = (\frac{1}{2}\ln|x| + c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (\frac{1}{2}\ln|x| + c)^2 x^4.$$

4. В четвёртом задании рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. В пункте a предлагается решить уравнение, допускающее понижение порядка. В пункте b следует найти решение задачи Коши для линейного неоднородного уравнения со специальной правой частью методом неопределённых коэффициентов. В пункте c ищется общее решение линейного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

Задача 4,a.

Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y''(e^x + 1) + y' = 0.$$

Решение.

Это уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$ $(k = 1)$, т.е. не содержащее в явном виде искомую функцию. Понизить порядок уравнения удаётся, вводя новую функцию $p(x) = y^{(k)} = y'$. Тогда

$$p' = y^{(k+1)} = y'' \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dx}(e^x + 1) + p = 0,$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{e^x + 1}$$

($p = 0$ является решением дифференциального уравнения),

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

Путём замены переменной $e^x+1=t$, находим

$$\ln|p| = \ln(e^x+1) - \ln e^x + \ln c,$$

$$p = c\,\frac{e^x+1}{e^x}$$

(решение $p=0$ содержится в этом семействе при $c=0$),

$$\frac{dy}{dx} = c\,\frac{e^x+1}{e^x},$$

$$y = c\int \frac{e^x+1}{e^x}dx = c(x-e^{-x})+c_1,$$

т.е. нашли общее решение исходного уравнения.

Задача 4,b.

Найдите общее решение дифференциального уравнения $y^3y''=-1$.

Решение.

Это уравнение вида $F(y,y',y'')=0$, т.е. не содержащее в явном виде независимую переменную x. Понизим порядок уравнения с помощью подстановки

$$y' = p(y). \quad \text{Тогда} \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Далее

$$y^3p\frac{dp}{dy} = -1, \quad pdp = -\frac{dy}{y^3}$$

($y=0$ не является решением исходного уравнения);

$$\int pdp = -\int\frac{dy}{y^3}, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2}+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{y^2}+2c \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2c};$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1+2cy^2}}{y} \quad \Rightarrow dx = \pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2cy^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2cy^2}} = \pm\frac{1}{4c}\int\frac{d(1+2cy^2)}{\sqrt{1+2cy^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{1+cy^2}+c_1.$$

Задача 4,с.

Найдите общее решение уравнения

$$xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

Решение.

Данное уравнение является уравнением вида $F(x, y, y^{'}, y^{''}) = 0$, где функция F - однородная относительно y, y', y'' (в нашем примере имеем однородную функцию второй степени). Можно понизить порядок уравнения заменой $y' = p(x)y$. Тогда $y'' = (p^2 + p')y$ и

$$xy^2(p^2 + p') - xy^2p^2 = y^2p.$$

Разделим обе части уравнения на y^2 ($y = 0$ - решение исходного уравнения):

$$x(p^2 + p') - xp^2 = p,$$
$$x\frac{dp}{dx} = p,$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда получаем $p = cx$. Возвращаясь к функции y, получим

$$\frac{y'}{y} = cx \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = cxdx \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = c_1 e^{\frac{cx^2}{2}}$$

(заметим, что $y = 0$ является частным решением и получается из общего при $c_1 = 0$).

Задача 4,d.

Найдите решение задачи Коши

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

методом неопределённых коэффициентов.

Решение.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $y = y_0 + \tilde{y}$, где y_0- общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}$ - частное решение исходного неоднородного уравнения. Сначала ищем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет один вещественный корень $\lambda = 3$ кратности 2. Тогда функции $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = xe^{3x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$, а их линейная комбинация - его общее решение

$$y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Исходное неоднородное уравнение имеет правую часть специального вида $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$- многочлен степени n. В нашей задача $\alpha = 3, \quad n = 0; \quad \alpha = 3 \quad$ является корнем кратности 2 характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 e^{3x}$, где A- произвольный многочлен нулевой степени (этот коэффициент и надо найти). Тогда

$$\tilde{y}' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2 e^{3x} = A(2x + 3x^2)e^{3x},$$

$$\tilde{y}'' = A((2 + 6x)e^{3x} + 3(2x + 3x^2)e^{3x}) = A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x}.$$

Коэффициент A найдём, подставив $\tilde{y}, \quad \tilde{y}', \quad \tilde{y}''$ в исходное уравнение:

$$A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x} - 6A(2x + 3x^2)e^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} = e^{3x}.$$

Сокращая на e^{3x}, имеем:

$$2A + 12Ax + 9Ax^2 - 12Ax - 18Ax^2 + 9Ax^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\quad \tilde{y}(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x};$

$y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x} -$ общее решение исходного уравнения;

$$y'(x) = 3C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + 3C_2xe^{3x} + xe^{3x} + \frac{3}{2}x^2e^{3x}$$

Для решения задачи Коши подставим начальные условия в выражения для y, y': $\begin{cases} C_1 = 1 \\ 3C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -3. \end{cases}$

Искомое решение задачи Коши:

$$y(x) = e^{3x} - 3xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}.$$

Задача 4,e.

Найдите решение задачи Коши

$$y^{''} + y^{'} = \cos 2x, \quad y(0) = \frac{1}{5}, \quad y^{'}(0) = 1$$

методом неопределённых коэффициентов.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, сначала ищем общее решение однородного уравнения $y^{''} + y^{'} = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет два различных вещественных корня $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$; общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 + C_2e^{-x}$. Неоднородное уравнение имеет специальную правую часть более общего вида, чем в задаче 4,d:

$$f(x) = e^{\alpha x}(S_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x,)$$

где $S_{m_1}, \quad Q_{m_2}(x)$- многочлены степени m_1 и m_2 соответственно. В данном случае $\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad m_1 = 0$. Число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение должно иметь вид: $\tilde{y} = e^{0x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. Тогда $\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad \tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$

Подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, найдём коэффициенты A и B:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = \cos 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$, $\sin 2x$, получим систему:

$$\begin{cases} -4A + 2B = 1 \\ -2A - 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B \\ 10B = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ B = \dfrac{1}{10} \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

а общее решение

$$y = y_0 + \tilde{y} = c_1 + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Вычислим $y' = -c_2 e^{-x} + \dfrac{2}{5}\sin 2x + \dfrac{1}{5}\cos 2x$ и подставим начальные условия в выражения y, y':

$$\begin{cases} c_1 - c_2 - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{5} \\ -c_2 + \dfrac{1}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{4}{5} \\ c_2 = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Искомое решение задачи Коши:

$$y(x) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Задача 4,f.

Найдите общее решение задачи Коши:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1-e^{-x}}$$

методом вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

Решение.

Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет два различных вещественных корня $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2; \quad y_0(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}$. Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} c_1'e^x + c_2'e^{2x} = 0 \\ c_1'e^x + 2c_2'e^{2x} = \dfrac{e^x}{1-e^{-x}}. \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно c_1' и c_2'. Её определитель есть определитель Вронского $W(x)$ для системы функций e^x, e^{2x}. Так как эти функции образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, то $W(x) \neq 0$, при любом вещественном x. Тогда система имеет единственное решение. Для его нахождения вычтем из второго уравнения первое:

$$c_2'e^{2x} = \frac{e^x}{1-e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad c_2'(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Из первого уравнения получим:

$$c_1' = -c_2'e^x = -\frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Интегрируя, находим функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$:

$$c_1(x) = -\int \frac{dx}{1-e^{-x}} = -\int \frac{e^x dx}{e^x - 1} = -\int \frac{d(e^x-1)}{e^x-1} = -\ln\left|1-e^{-x}\right|;$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-x}} = \int \frac{d(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \ln|1-e^{-x}|.$$

Подставляя найденные функции, получаем общее решение уравнения:

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \ln|e^x - 1|e^x + \ln|1 - e^{-x}|e^{2x}.$$

Задача 5.

В пятом задании предлагается тремя способами решить задачу Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 8x + 3y, \end{cases}$$
$$x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$$

а) Решим систему методом исключения, то есть сведения к одному уравнению второго порядка. Выразим y из первого уравнения: $y = x' - x$, дифференцируя по t, получим $y' = x'' - x'$. Подставим y и y' во второе уравнение:

$$x'' - x' = 8x + 3(x' - x) \Rightarrow x'' - 4x' - 5x = 0.$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $x(t)$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 5; \quad \lambda_2 = -1$ дают нам его общее решение

$$x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}.$$

Найдём $x^{'}(t) = 5c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t}$ и

$$y(t) = x' - x = 5c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} - c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} = 4c_1 e^{5t} - 2c_2 e^{-t}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = c_1\ e^{5t} + c_2\ e^{-t} \\ y(t) = 4c_1\ e^{5t} - 2c_2\ e^{-t}. \end{cases}$$

Подставив начальные условия $x(0) = 0)$ и $y(0) = 2$ в это решение, получим

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{3} \\ c_2 = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Получили решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}e^{5t} - \dfrac{1}{3}e^{-t} \\ y(t) = \dfrac{4}{3}e^{5t} + \dfrac{2}{3}e^{-t}. \end{cases}$$

b) Решим эту же систему матричным методом. Введём обозначения:
$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X('t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y('t) \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.
В матричной форме система принимает вид:

$$X'(t) = AX(t).$$

Решение будем искать в виде:

$$X(t) = \Gamma e^{\lambda t},$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - ненулевой вектор-столбец. Известно, что $\Gamma e^{\lambda t}$ будет решением системы тогда и только тогда, когда λ - собственное число матрицы A, а Γ- собственный вектор матрицы A, соответствующий числу λ. Начинаем, как обычно, с нахождения собственных чисел матрицы A. Для этого решаем характеристическое уравнение $det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных вещественных корня $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = -1$. В этом случае вектор-функции $\Gamma_1 e^{\lambda_1 t}$, $\Gamma_2 e^{\lambda_2 t}$ образуют фундаментальную систему решений. Найдём собственные векторы Γ_1, Γ_2, соответствующие λ_1, λ_2. Для каждого λ составим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\left(\ A - \lambda E \ \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$det(A - \lambda E) = 0$, то система имеет ненулевое решение

1) $\lambda = \lambda_1 = 5$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -0 \end{pmatrix},$$

то есть $-4\alpha + \beta = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ - собственный вектор, соответствующий числу $\lambda_1 = 5$.

2) $\lambda = \lambda_2 = -1$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$2\alpha + \beta = 0 \quad \Rightarrow \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2. \end{pmatrix}$$

Выпишем общее решение в матричной форме

$$X(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В координатной форме общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \ e^{5t} + c_2 \ e^{-t} \\ y(t) = 4c_1 \ e^{5t} - 2c_2 \ e^{-t}. \end{cases}$$

Так же, как и раньше, из начальных условий получаем

$$c_1 = \frac{1}{3}; \quad c_2 = -\frac{1}{3}.$$

c*) Решим систему операционным методом. Применим оператор Лапласа к обеим частям системы. Пусть изображением искомых функций $x(t), y(t)$ будут $X(p), Y(p)$ соответственно; тогда, по теореме дифференцирования оригинала, получаем:

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p)$$

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 2.$$

Система дифференциальных уравнений относительно оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ переходит в алгебраическую систему относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + Y(p) \\ pY(p) - 2 = 8X(p) + 3Y(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)X(p) - Y(p) = 0 \\ -8X(p) + (p-3)Y(p) = 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом исключения или по правилу Крамера. При $p \neq 5; -1$ получаем:

$$X(p) = \frac{2}{(p-5)(p+1)}; \quad Y(p) = \frac{2p-2}{(p-5)(p+1)}.$$

Разложим изображения на простейшие дроби и применим обратное преобразование Лапласа:

$$X(p) = \frac{1}{3}\frac{1}{p-5} - \frac{1}{3}\frac{1}{p+1} \div \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$Y(p) = \frac{4}{3}\frac{1}{p-5} + \frac{2}{3}\frac{1}{p+1} \div \frac{4}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t}.$$

Получено решение задачи Коши: $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + -\frac{1}{3}e^{-t} \\ y(t) = \frac{4}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t}. \end{cases}$

Задание 1.

В этом задании в каждом варианте даны функция u трёх переменных x, y, z и уравнение в частных производных (e). Проверьте, является ли функция u решением уравнения (e).

1. $u = x^{z^3} y,$ (e): $3x \ln x \dfrac{\partial u}{\partial x} = yz \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$

2. $u = z^{x^2+y,}$ (e): $2xz \ln^2 z \ \dfrac{\partial u}{\partial z} = (x^2+y) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$

3. $u = \sin(x^3 y^2 z),$ (e): $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x^6 y^4 u = 0.$

4. $u = z \operatorname{tg}(x^2 y),$ (e): $z^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2(u^2 + z^2).$

5. $u = z^{2y} \arcsin x,$ (e): $2 \ln z \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$

6. $u = x^{y^3 z},$ (e): $x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y^3(zy^3 \ln x + 1)u.$

7. $u = x^2 y^z,$ (e): $xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2zu.$

8. $u = y^{z^3} \operatorname{arctg} x,$ (e): $3z^2 \ln y \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$

9. $u = z^4 e^{xy^3},$ (e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 4y^3 u.$

10. $u = z^{x^5 y^3} - 1,$

(e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 5x^4 y^3 (1 + x^5 y^3 \ln z)(u+1).$

11. $u = (3z+1)^{(5x^2+y^3)} - 1,$ (e):

$(3z+1) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = ((150x^3 + 30xy^3) \ln(3z+1) + 30x)(u+1).$

12. $u = z^{x^5 \cos y},$ (e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 5x^4 \cos y (1 + x^5 \cos y \ \ln z) u.$

13. $u = y^{x^3+1} \operatorname{ctg} z,$ (e): $y \sin 2z \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2(x^3+1)u = 0.$

14. $u = x^{(y^z)},$

(e): $y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y^z \ln x (zy^z \ln x \ln y + z \ln y + 1)u.$

15. $u = xz^{y^4+3},$ (e): $xz \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = (y^4+3)u.$

16. $u = x^{z^3} y,$ (e): $3z^2 \ln x \ u = y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$

17. $u = z^{x^4+y},$ (e): $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4x^3 \ln^2 z \ u = 0.$

18. $u = \sin(x^3 y^2 z),$ (e): $z \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 3x^5 y^4 z^2 u = \dfrac{\partial u}{\partial x}.$

19. $u = z \operatorname{tg}(x^2 y),$ (e): $z^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^4 u(u^2 + z^2).$

20. $u = z^{2y} \arcsin x, \quad$ (e): $\quad 2y\dfrac{\partial u}{\partial x} = z\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$

21. $u = x^{y^3 z}, \quad$ (e): $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = uy^6 \ln^2 x.$

22.$u = x^2 y^z, \quad$ (e): $\quad y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (1 + z \ln y)u.$

23. $u = y^{z^3} \operatorname{arctg} x, \quad$ (e): $\quad z^3\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$

24. $u = z^4 e^{xy^2}, \quad$ (e): $\quad z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 8uxy.$

25. $u = z^{x^5 y^2} - 1, \quad$ (e):

$z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2x^5 y(1 + x^5 y^2 \ln z)(u + 1).$

26. $u = (3z + 1)^{5x^2 + y^3}, \quad$ (e):

$(3z + 1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = ((45x^2 y^2 + 9y^5) \ln(3z + 1) + 9y^2)u.$

27. $u = z^{x^5 \cos y}, \quad$ (e):

$z\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + x^5 \sin y(1 + x^5 \cos y \;\ln z)u = 0.$

28. $u = y^{x^2+1} \operatorname{ctg} z,$ (e): $\quad \sin 2z \;\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4x \ln y \; u = 0.$

29. $u = x^{y^z}, \quad$ (e): $\quad y \ln y \;\dfrac{\partial u}{\partial y} = z\dfrac{\partial u}{\partial z}.$

30. $u = xz^{y^4+3}, \quad$ (e): $\quad x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4y^3 \ln z \; u.$

Задание 2.

В этом задании в каждом варианте даны функция z двух переменных x и y и область D. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции z в области D.

1. $z = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 3$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 3$.
2. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 3$.
3. $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 3$.

4. $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 2y + 8$, область D задана неравенствами $0 \le y \le 4x - x^2 - 1$.

5. $z = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$, область D задана неравенствами $x^2 - 2x - 3 \le y \le 0$.

6. $z = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 4$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

7. $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4$, область D задана неравенствами $1 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 2$.

8. $z = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 6$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $-4 \le y \le 0$.

9. $z = -x^2 - 4x - 3y^2 + 6y + 8$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

10. $z = 4x^2 + 8x + y^2 + 4y + 7$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

11. $z = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 3$.

12. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 1$.

13. $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$.

14. $z = x^2 + 6x + 2y^2 - 4y + 8$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

15. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$, область D задана неравенством $x^2 + 2x + 1 \le y \le 4$.

16. $z = -x^2 + 6x - y^2 - 6y - 17$, область D задана неравенством $(x-3)^2 + (y+3)^2 \le 4$.

17. $z = x^2 + 6x + y^2 - 2y + 9$, область D задана неравенствами $-4 \le -2x \le 2$ и $0 \le y \le 2$.

18. $z = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3$, область D задана неравенствами

$-2 \le x \le 0$ и $-4 \le y \le -1$.

19. $z = -x^2 - 2x - y^2 + 6y + 8$, область D задана неравенствами $x + 1^2 + (y-3)^2 \le 1$.

20. $z = 4x^2 + 8x + y^2 + 4y + 8$, область D задана неравенством $(x+1)^2 + \dfrac{y+2^2}{4} \le 1$.

21. $z = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 3$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 1$.

22. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 3$.

23. $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$, область D задана неравенствами $0 \le x \le 2$ и $1 \le y \le 3$.

24. $z = 4x^2 - 16x + y^2 - 2y + 16$, область D задана неравенством $(x-2)^2 + \dfrac{y-1^2}{4} \le 1$.

25. $z = -x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$, область D задана неравенствами $x^2 - 2x - 3 \le y \le 0$.

26. $z = x^2 - 6x - y^2 + 2y - 9$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

27. $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

28. $z = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 6$, область D задана неравенствами $-2 \le x \le 0$ и $-4 \le y \le 0$.

29. $z = -x^2 - 6x - y^2 + 2y + 8$, область D задана неравенствами $-4 \le x \le 0$ и $0 \le y \le 2$.

30. $z = 2x^2 + 8x + 2y^2 + 4y + 9$, область D задана неравенством $(x+2)^2 + (y+1)^2 \le 1$.

Задание 3.

Укажите тип дифференциального уравнения первого порядка. В задачах a, b, d найдите общее решение уравнения.В задаче c найдите решение задачи Коши.

1. a) $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2$;

b) $y - xy' = x \sec \dfrac{y}{x}$;

c) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0$;

d*) $y' + y = x\sqrt{y}$.

2. a) $(x + 4)dy - xydx = 0$;

b) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;

c) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x, \quad y(0) = 0$;

d*) $y' + 2y = y^2 e^x$.

3. a) $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$;

b) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;

c) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}, \quad y(0) = 0$;

d*) $xdy + 2ydx = 2x\sqrt{y} \sec^2 x \; dx$.

4. a) $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$;

b) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$;

c) $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0$;

d*) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

5. a) $(1 + e^x)ydy - e^y dx = 0$;

b) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;

c) $y' = 2x(x^2 + y), \quad y(0) = 0$;

d*) $xydy = (y^2 + x)dx$.

6. a) $(y^2 + 3)dx - \dfrac{e^x}{x} ydy = 0$;

b) $y^2 + x^2 y' = xyy'$;

c) $y' - y = e^x, \quad y(0) = 1$;

d*) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.

7. a) $(1+y^2)dx-(y+yx^2)dy=0$;
b) $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;
c) $xy'+y+xe^{-x^2}=0, \quad y(1)=\dfrac{1}{2e}$;
d*) $y'-\dfrac{y}{x-3}=\dfrac{y^2}{x-3}$.

8. a) $y'=(2y+1)\operatorname{tg}x$;
b) $xy'=y-xe^{(x^{-1}y)}$;
c) $y'=2y-x+e^x, \quad y(0)=-1$;
d*) $(2y^2x\ln x-y)dx=xdy$.

9. a) $2xyy'=1-x^2$;
b) $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;
c) $x^2y'+xy+1=0, \quad y(1)=0$;
d*) $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$.

10. a) $(1+e^x)yy'=e^x$;
b) $xy'=y\cos(\ln\dfrac{y}{x})$;
c) $xdy=(e^{-x}-y)dx, \quad y(1)=1$;
d*) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

11. a) $\sin x\operatorname{tg}y dx-\dfrac{dy}{\sin x}=0$;
b) $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$;
c) $xy'+y=4x^3+3x^2, \quad y(1)=2$;
d*) $xy^2y'=x^2+y^3$.

12. a) $3e^x\sin y dx+(1-e^x)\cos y dy=0$;
b) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$;
c) $dx=\dfrac{xdy}{3y-x^2}, \quad y(1)=0$;
d*) $(x+1)(y'+y^2)=-y$.

13. a) $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$;
b) $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$;
c) $(2y + x)dx = xdy + 4\ln x dx$,
$y(1) = 0$;
d*) $y'x + y = -xy^2$.

14. a) $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$;
b) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;
c) $x(y' - y) = e^x, \quad y(1) = 0$;
d*) $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.

15. a) $2x^2yy' + y^2 = 2$;
b) $y'x + x + y = 0$;
c) $y = x(y' - x\cos x), \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$;
d*) $xy' - 2\sqrt{x^3y} = y$.

16. a) $y' = e^{x^2}x(1 + y^2)$;
b) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;
c) $(xy' - 1)\ln x = 2y, \quad y(e) = 0$;
d*) $y' + xy = x^3y^3$.

17. a) $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$;
b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$;
c) $(2e^x - y)dx = dy, \quad y(0) = 0$;
d*) $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$.

18. a) $\sin x y' = y\cos x + 2\cos x$;
b) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$;

c) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}, \quad y(1) = 0;$

d*) $y' + 3y = e^{2x}y^2.$

19. a) $1 + (1+y')e^y = 0;$

b) $(x-y)ydx - x^2dy = 0;$

c) $(y+x^2)dx = xdy, \quad y(1) = 0;$

d*) $x(x-1)y' + y^3 = xy.$

20. a) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2;$

b) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$

c) $dx(\sin^2 x + y \operatorname{ctg} x) = dy, \; y(\frac{\pi}{2}) = 0;$

d*) $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0.$

21. a) $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{cos^2y} = 0;$

b) $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2;$

c) $(x+1)y' + y = x^3 + x^2, \quad y(0) = 0;$

d*) $\dfrac{dy}{y} = (\dfrac{1}{x} - 2y)dx.$

22. a) $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0;$

b) $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0;$

c) $xy' - 2y + x^2 = 0, \quad y(1) = 0;$

d*) $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y.$

23. a) $(1 + e^{3y})xdx = e^{3y}dy;$

b) $xy' + y(\ln \dfrac{y}{x} - 1) = 0;$

c) $xy' + y = \sin x, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi};$

d*) $xy' + y = y^2 \ln x.$

24. a) $y - xy' = 3(1 + x^2y');$

b) $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$;

c) $(x^2-1)y'-xy=x^3-x, \quad y(\sqrt{2})=1$;

d*) $(\frac{y^2}{x}-x^3)dx=ydy$.

25. a) $\cos y dx=2\sqrt{1+x^2}dy+\cos y\sqrt{1+x^2}dy$;

b) $(y^2-2xy)dx-x^2dy=0$;

c) $(1-x^2)y'+xy=1, \quad y(0)=1$;

d*) $y'+2xy=2x^3y^3$.

26. a) $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$;

b) $(x+2y)dx+xdy=0$;

c) $y'\operatorname{ctg} x-y=2\cos^2 x\operatorname{ctg} x, \ \ y(0)=0$;

d*) $y'+y=\dfrac{x}{y^2}$.

27. a) $e^x\operatorname{tg} y dx=(1-e^x)\sec^2 y dy$;

b) $(2x-y)dx+(x+y)dy=0$;

c) $x^2y'=2xy+3, \quad y(1)=-1$;

d*) $y'-y\operatorname{tg} x+y^2\cos x=0$.

28. a) $y-xy'=2(1+x^2y')$;

b) $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$;

c) $y'+2xy=xe^{-x^2}, \quad y(0)=0$;

d*) $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

29. a) $y'\sqrt{1+y^2}=\dfrac{x^2}{y}$;

b) $x^2y'=y(x+y)$;

c) $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0, \quad y(0)=0$;

d*) $y'-y+y^2\cos x=0$.

30. a) $3^{y^2-x^2} = \dfrac{yy'}{x}$;

b) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

c) $xy' + y = \ln x + 1, \quad y(1) = 0$;

d*) $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2-1}$.

Задание 4.

a) Найдите общее решение дифференциального уравнения методом понижения порядка;

b) Найдите решение задачи Коши методом неопределённых коэффициентов;

c) Найдите общее решение методом Лагранжа.

1. a) $x^3y'' + x^2y' = 1$;

b) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$,

$y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$;

c) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

2.a) $2yy'' = y'^2$;

b) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$;

c) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

3. a) $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$;

b) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$;

c) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

4. a)$y''\operatorname{tg} y = 2y'^2$;

b) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$,

$y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$;

c) $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$.

5. a) $xy'' - y' = x^2 e^x$;

b) $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$,

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$;

c) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.

6. a) $(y'')^2 = y'$;

b) $y'' + 16y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x)$,

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$;

c) $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$.

7. a) $y'' x \ln x = 2y'$;

b) $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;

c) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

8. a) $y'' = y' + y'^2$;

b) $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$,

$y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$;

c) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

9. a) $xy'' = y'$;

b) $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$;

c) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

10. a) $yy'' - 2y'^2 = 0$;

b) $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$;

c) $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

11. a) $xy'' + y' = \ln x$;

b) $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$,

$y(0) = 3, \quad y'(0) = 0;$

c) $y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x)$.

12. a) $y'' + \dfrac{2}{1-y} y'^2 = 0;$

b) $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6;$

c) $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$.

13. a) $xy'' = y' + x^2$

b) $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}, \quad y(0) = -1, \; y'(0) = 5;$

c) $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

14.a) $y''(1 + y) = 5y'^2;$

b) $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10 \sin 5x),$

$y(0) = 3, \quad y'(0) = -4;$

c) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$.

15. a) $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x;$

b) $y'' - 10y' + 25y = 2e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

c) $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.

16. a) $1 + y'^2 = yy'';$

b) $y'' + y' - 12y = (16x + 26)e^{4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5;$

c) $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

17. a) $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x;$

b) $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$

c) $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

18. a) $yy'' - y'(1 + y') = 0;$

b) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$

c) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}.$

19. a) $x(y'' + 1) + y' = 0;$

b) $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8,$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

c) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$

20. a) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}};$

b) $y'' + y = \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$

c) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}.$

21. a) $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x;$

b) $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14;$

c) $y'' - y' = e^{2x}\sin(e^x).$

22. a) $y'' = 1 + y'^2;$

b) $y'' - y = 2(1 - x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

c) $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$

23. a) $y'''x \ln x = y'';$

b) $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2;$

c) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}.$

24. a) $y'' + 2yy'^3 = 0;$

b) $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$

c) $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}.$

25. a) $(1+x^2)y'' = 2xy'$;

b) $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -16$

c) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

26. a) $yy'' = y^2y' + y'^2$;

b) $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$;

c) $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

27. a) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$;

b) $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x - 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$;

c) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

28. a) $y'' + yy'^3 = 0$;

b) $y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$;

c) $y'' - 6y + 9y = 36\sqrt{x}e^{3x}$.

29. a) $2xy''y' = y'^2 - 4$;

b) $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -5$;

c) $y'' - 3y' + 2y = 1 + \dfrac{1}{1+e^x}$.

30. a) $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$;

b) $y'' - 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8.$;

c) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

Задание 5.

Найдите решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

a) методом исключения;

b) матричным методом;

c*) операционным методом.

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$

2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y, \end{cases}$

$x(0) = 3, \quad y(0) = -2.$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y, \end{cases}$

$x(0) = 6, \quad y(0) = 0.$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x, \end{cases}$

$x(0) = 4, \quad y(0) = 0.$

5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y, \end{cases}$

$x(0) = 2, \quad y(0) = 7.$

6. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y, \end{cases}$

$x(0) = -2, \quad y(0) = -4.$

7. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y, \end{cases}$

$x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y, \end{cases}$

$x(0) = -2, \quad y(0) = 5.$

9. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

$x(0) = 3, \; y(0) = -1.$

10. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$

$x(0) = 3, \quad y(0) = -4.$

11. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y, \end{cases}$
$x(0) = -2, \quad y(0) = 2.$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y, \end{cases}$
$x(0) = 4, \quad y(0) = -1.$

13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$
$x(0) = 4, \quad y(0) = 3.$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$
$x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$
$x(0) = 2, \quad y(0) = 6.$

16. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$
$x(0) = -1, \quad y(0) = 4.$

17. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$
$x(0) = 0, \quad y(0) = 4.$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$
$x(0) = 3, \quad y(0) = 3.$

19. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$
$x(0) = 4, \quad y(0) = 0.$

20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
$x(0) = 3, \quad y(0) = 0.$

21. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
$x(0) = 0, \quad y(0) = 3.$

22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$
$x(0) = -4, \quad y(0) = 3.$

23. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$
$x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$
$x(0) = -2, \quad y(0) = 2.$

25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$
$x(0) = 6, \quad y(0) = -2.$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$
$x(0) = -2, \quad y(0) = 2.$

27. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$
$x(0) = -3, \quad y(0) = 3.$

28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$
$x(0) = 3, \quad y(0) = 0.$

29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$
$x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$

30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$
$x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 7 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом.

Ольга Игоревна Брагина, Татьяна Фёдоровна Панкратова,
Анна Викторовна Рябова

Типовой расчет по математике
Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения. 4 модуль
Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Дизайн обложки Л.В. Гортинская
Верстка О.И. Брагина
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ № 2975
Тираж 1000
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики

и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49