МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

В. В. Максимов, Ю. А. Копыльцов

ОСНОВЫ MATLAB И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ МЕТРОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

ГУАП

Санкт-Петербург
2022

УДК 004.438(075)
ББК 32.973.-26-018.1я73
М17

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *С. Д. Шапорев*;
кандидат технических наук, доцент *А. С. Степашкина*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

Протокол № 6 от 29 ноября 2022 г.

Максимов, В. В.

М17 Основы MATLAB и его применение к задачам метрологии: учеб.-метод. пособие / В. В. Максимов, Ю. А. Копыльцов. – СПб.: ГУАП, 2022. – 79 с.

Изложены основы инженерной среды MATLAB и некоторые его приложения к задачам метрологии. Приведены примеры пользовательских функций, реализующих решения ряда задач средствами MATLAB. Представлены 8 лабораторных работ, позволяющие закрепить аналитические навыки для создания математических моделей физических процессов и применить их в контроле вычислений в среде MATLAB.

Пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению подготовки 27.04.01 – «Стандартизация и метрология», может быть полезным для студентов общеинженерной подготовки.

УДК 004.438(075)
ББК 32.973.-26-018.1я73

Verba volant, scripta manent
Кай Тит, римский император

ВВЕДЕНИЕ

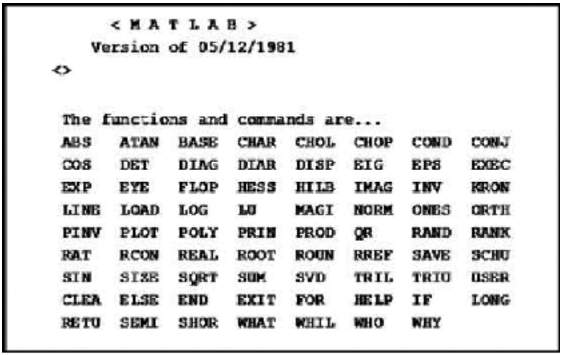
1. *История создания MATLAB*

MATLAB – это одна из старейших и проработанных систем автоматизации математических расчетов, выросшая из калькулятора, написанного на языке Фортран в 1981 г., до высокопроизводительной системы компьютерной математики, широко используемой инженерными и научными сотрудниками. Она развивается и в наши дни: два раза в год выходят очередные версии её. Инструментарий MATLAB в настоящее время содержит свыше 60 категорий, среди которых – параллельные вычисления, методы оптимизации, системы управления, обработка сигналов и беспроводные коммуникации, обработка изображений и компьютерное зрение, компьютерная биология, генерирование когда программ и многое другое, Дадим слово самому Кливу Моулеру (Cleve Moler) – создателю инженерной вычислительной среды MATLAB [1]:

«В 1970-х и начале 1980-х годов я преподавал линейную алгебру и численный анализ в Университете Нью-Мексико и хотел, чтобы мои студенты имели лёгкий доступ к библиотекам программ LINPACK и EISPACK, без написания программ на Фортране. Под «лёгким доступом» я подразумевал отсутствие необходимости проводить удаленную пакетную обработку и повторяющийся процесс редактирования-линковки-загрузки-выполнения, который обычно требовался на центральной ЭВМ, расположенной на территории кампуса.

Поэтому я изучил книгу Никлауса Вирта «Алгоритмы + Структуры данных = Программы» и научился разбираться в языках программирования. Я написал первый MATLAB – сокращение для Матричной Лаборатории – на Фортране, с матрицей в качестве единственного типа данных. Проект был своего рода хобби, новым для меня аспектом программирования и тем, что могли использовать мои студенты. Не было никакой формальной поддержки извне и уж тем более не было бизнес-плана.

Первая версия MATLAB была просто интерактивным матричным калькулятором. На этом снимке [прим. авт.: рис. 1] *показаны все зарезервированные слова и функции. Их всего 71. Чтобы добавить еще одну функцию, необходимо было получить*



```
      < M A T L A B >
    Version of 05/12/1981
<>

 The functions and commands are...
 ABS   ATAN  BASE  CHAR  CHOL  CHOP  COND  CONJ
 COS   DET   DIAG  DIAR  DISP  EIG   EPS   EXEC
 EXP   EYE   FLOP  HESS  HILB  IMAG  INV   KRON
 LINE  LOAD  LOG   LU    MAGI  NORM  ONES  ORTH
 PINV  PLOT  POLY  PRIN  PROD  QR    RAND  RANK
 RAT   RCON  REAL  ROOT  ROUN  RREF  SAVE  SCHU
 SIN   SIZE  SQRT  SUM   SVD   TRIL  TRIU  USER
 CLEA  ELSE  END   EXIT  FOR   HELP  IF    LONG
 RETU  SEMI  SHOR  WHAT  WHIL  WHO   WHY
```

Рис. 1. Зарезервированные слова и функции первоначального MATLAB

от меня исходный код, написать подпрограмму на Фортране, добавить имя этой функции в синтаксическую таблицу и перекомпилировать MATLAB.

1979-1980 учебный год я провел в Стэнфорде, где преподавал курс численного анализа для выпускников и познакомил их с этим матричным калькулятором. Некоторые из студентов изучали такие дисциплины, как теория управления и обработка сигналов, о которых я ничего не знал. Однако матрицы занимали центральное место в математическом описании этих областей, и MATLAB сразу же пригодился студентам.

Джек Литтл учился в аспирантуре по инженерной программе в Стэнфорде. Его друг, который посещал мой курс, показал ему MATLAB, и он взял его на вооружение для своей работы. В 1983 году Литтл предложил создать коммерческий продукт на основе MATLAB. Персональный компьютер фирмы IBM появился всего двумя годами ранее. Его мощности едва хватало для запуска такой программы, как MATLAB, но Литтл предвидел дальнейшее развитие компьютеров. Он оставил работу, купил в торговой компании Sears клон персонального компьютера фирмы Compaq, переехал поближе к Стэнфорду и с моей поддержкой написал новую, расширенную версию MATLAB на языке C. Его друг, Стив Бангерт, работал над новой версией MATLAB в своё свободное время.

Официальное представление MATLAB для персональных компьютеров состоялось в декабре 1984 года на конференции IEEE по принятию решений и управлению в Лас-Вегасе. Расширенная версия MATLAB для рабочих станций Unix появилась годом позже [Прим. авт.: рис. 2].

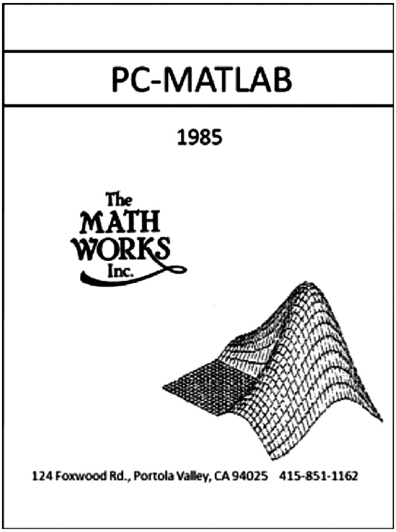


Рис. 2. Первая коммерческая версия MATLAB

Литтл и Бангерт внесли много важных изменений и улучшений в первоначальный вариант MATLAB при создании новой расширенной версии. Наиболее значительным было появление функций, инструментария и графического отображения.

Сохраняя свои корни в матричной математике, MATLAB продолжает развиваться, чтобы соответствовать меняющимся потребностям инженеров и ученых… MATLAB объединяет среду рабочего стола, настроенную на итеративный анализ и процессы проектирования, с языком программирования, который напрямую выражает математику матриц и массивов. Он включает оперативный редактор Live Editor для создания сценариев, которые объединяют код, вывод и форматированный текст в исполняемом блокноте.»

Широкое распространение у начинающих пользователей MATLAB получила популярная книга Клива Моулера «Численные вычисления с помощью MATLAB» [2], электронная версия которой размещена на сайте фирмы «The MathWorks,Inc» mathworks.com.

2. *Развитие MATLAB Советском Союзе и современной России*

Первой публикацией в Советском Союзе [3] была книга доктора технических наук, профессора Смоленского университета Владимира Павловича Дьяконова «Справочник по применению системы

PC MatLab», выпущенной небольшим тиражом в 1993 г. В ней подробно рассмотрены технические детали установки системы, запуска ее, работы в режиме калькулятора. Далее автор раскрывает применение для основных матричных операций и функций, показывает работу со стандартными и специальными функциями, иллюстрирует обработку данных, операции с многочленами и функциями пользователя, дает обзор внешних расширений, приводит основы программирования в среде, представляет результаты работы графического постпроцессора, показывает, как осуществляется в среде процедуры спектрального анализа и фильтрации.

В нынешнем веке появилось некоторое количество книг по MATLAB на русском языке [4–11]. Среди них есть учебники, самоучители, а также книги для научно-технических работников по особенностям применения MATLAB в отдельных конкретных областях.

Отметим, что MATLAB (как и другие современные интегрированные пакеты, например, Mathematica или Maple) содержит разветвлённую и содержательную справочную систему по всем его элементам. Поэтому изучить основы MATLAB можно, находясь и регулярно работая в самой среде.

Многие университеты, научно-технические компании и инженерные центры в России интенсивно используют MATLAB, который в настоящее время существенно вырос и обладает дружелюбным интерфейсом, что позволяет достаточно просто использовать эту вычислительную среду, проводить многочисленные исследования во многих научных областях и находить эффективные научно-технические решения.

1. ОСНОВЫ MATLAB

1.1. MATLAB как матричный калькулятор

Язык среды MATLAB строится из прописных и строчных букв латинского алфавита, арабских цифр и специальных символов, расположенных на клавиатуре компьютера. При этом учитывается зависимость от регистра. Например, переменная Sol и sol – разные переменные. Как уже отмечалось выше, основной тип в MATLAB – это массив, т. е. любая переменная есть матрица. Например, скаляр – это матрица с размерами 1×1, вектор – матрица размером $n \times 1$ или $1 \times n$ (в зависимости от того, как мы его зададим.

Символы русского алфавита допускаются только в комментариях, которые обозначаются символом процента %, и в текстовых переменных, где они ограничиваются одинарными скобками, например, 'русский текст'.

При открытии MATLAB (в варианте Layout -> Default) оказываются открытыми линейка с категориями HOME (работа с файлами, отладка программ и т. д.), PLOTS (графические приложения) и APS (инструментарий) и 3 окна: Current Folder (Текущая папка), Workspace (Рабочее пространство) и Command Window (Командное окно).

В Текущей папке находится директория, с которой используется MATLAB. Её можно заменить другой директорией, добавив путь в категории HOME, используя утилиту Set Path.

В рабочем пространстве находятся все переменные, которые использованы в текущей сессии MATLAB. Содержимое их легко проверить, щёлкнув по ним дважды. Над Командным окном откроется таблица со значением переменной. В ней же можно изменить это значение. Впрочем, вряд ли это покажется логичным.

Ввод для непосредственных вычислений осуществляется в Командном окне и завершается нажатием на клавишу Enter. Результат вычисления получается непосредственно под исходным выражением. Если при вычислении выражения не используется какая-либо переменная, то результат предваряется значением служебной переменной Ans, которая и содержит результат. Его можно использовать для дальнейших вычислений.

Если оператор присвоения заканчивается символом «;» (точка с запятой), то выражение вычисляется, хранится в Рабочем пространстве, но его значение не выводится в Командном окне. Цель этого вполне ясна: не «засорять» Командное окно выводом больших массивов.

Очень удобны операторы clc (Clear Commands – очистка Командного окна) и clear (очистка Рабочего пространства). Заметим, что окно Command History (История команд) остаётся в сохранности, хотя, по умолчанию, скрыто от пользователя. Его легко открыть, используя клавишу управления курсора ↑. Удобно использовать наработанный пользователем в данной сессии набор выражений, слегка изменяя их согласно своим новым задачам.

Редактор Edit входит в среду MATLAB и открывается командой edit. При этом, по умолчанию, он располагается над Командным окном и предназначается для создания, редактирования, отладки и исполнения функций и скриптов MATLAB, о которых речь пойдёт дальше. При запуске он автоматически создаёт файл названием Untitled и расширением m. После написания кода и начала его отладки пользователь задаёт имя этому файлу. Далее, после каждого исправления или дополнения, при выполнении файла, тот обновляется автоматически, перед каждым запуском.

Введем в Командном окне

```
disp('Привет, Мир!')
```

и нажмём клавишу Enter.

В результате, в Командном окне получим:

```
Привет, Мир!
>>
```

(Математический знак «намного больше» >> означает в MATLAB готовность к дальнейшим действиям. Дальше мы будем опускать его).

Мы знаем, что константа e, лежащая в основании логарифма, равна приблизительно 2,72, а число π, равное отношению длины окружности к её диаметру, равно приблизительно 3,14. Интересно что больше: e^{π} или π^{e}? Если округлить эти числа до целых, получим в уме одинаковое число 27. Возьмём обычный калькулятор, вычисляя 2 знака после запятой. Получим, соответственно, 23,15 и 22,47. Похоже, что $e^{\pi} > \pi^{e}$. Можно, конечно, аналитически доказать, что это именно так. Воспользуемся, однако, встроенными функциями MATLAB:

```
>> format long
>> e = exp(1)
e =
   2.718281828459046
>> pi
ans =
   3.141592653589793
>> e^pi
```

```
ans =
  23.140692632779274
>> pi^e
ans =
  22.459157718361052
```

Пришли ко вполне определённому выводу. Точность MATLAB довольно высока. Видно, что в формате `long` значения выдаются с 15 знаками после запятой. С такой точностью они и хранятся в Рабочем пространстве. Если такое представление по каким-либо причинам неудобно для пользователя, положение легко исправить, записав инструкцию `format short`. В MATLAB содержится много форматов, но это лишь способы представления одних и тех же переменных, но не способы изменения из значений.

Интересно, что число π с точностью до двух знаков после запятой можно получить, представив его в виде:

```
>> pi2zn=1.49^2.87
pi2zn =
          3.14
```

В таблицах 1, 2 и 3 приведены списки арифметических операторов, операторов отношения и логических операторов.

Таблица 4 содержит список элементарных функций. Аргументы у тригонометрических функций необходимо указывать в радианах. Сами аргументы могут быть как вещественными, так и комплексными выражениями.

Отметим, что обозначения элементарных функций в MATLAB, по причине его происхождения, даются в англоязычной научной традиции. В научно-технических статьях и монографиях, публи-

Таблица 1

Список арифметических операторов

Функция	Обозначение
Сложение	+
Вычитание	–
Матричное умножение	*
Поэлементное умножение массивов	.*
Возведение матрицы в степень	^
Поэлементное возведение массива в степень	.^
Деление матриц слева направо	/
Поэлементное деление массивов слева направо	./
Деление матриц справа налево	\
Поэлементное деление массивов справа налево	.\

куемых на русском языке, следует придерживаться традиционных обозначений.

Таблица 2

Операторы отношения

Функция	Обозначение
Равно	=
Не равно	~=
Меньше	<
Больше	>
Меньше или равно	<=
Больше или равно	>=

Таблица 3

Логические операторы

Функция	Оператор
Логическое И	&
Логическое ИЛИ	|
Логическое НЕ	~
Исключающее ИЛИ	xor
Верно, если все элементы вектора равны нулю	any
Верно, если все элементы вектора не равны нулю	all

Таблица 4

Элементарные функции

Функция	Обозначение в MATLAB
$\|x\|$ – модуль	abs(x)
e^x – экспонента	exp(x)
$\ln x$– натуральный логарифм	log(x)
$\log_2 x$ – логарифм по основанию 2	log2(x)
$\lg x$ – десятичный логарифм	log10(x)
$\sqrt{x}$ – квадратный корень	sqrt(x)
$\arccos x$ – арккосинус	acos(x)
$\arcsin x$ – арксинус	asin(x)
$\mathrm{arcctg}\, x$ – арккотангенс	acot(x)
$\mathrm{arccosec}\, x$ – арккосеканс	acsc(x)
$\mathrm{arcsec}\, x$ – арксеканс	asec(x)

Окончание табл. 4

Функция	Обозначение в MATLAB
arctg x – арктангенс	atan(x)
cos x – косинус	cos(x)
ctg x – котангенс	cot(x)
sec x – секанс	sec(x)
cosec x – косеканс	csc(x)
sin x – синус	sin(x)
tg x – тангенс	tan(x)
arch x – арккосинус гиперболический	acosh(x)
arcth – арккотангенс гиперболический	acoth(x)
arcsch x – арккосеканс гиперболический	acsch(x)
arsch x – арксеканс гиперболический	asech(x)
arsh x – арксинус гиперболический	asinh(x)
arth x – арктангенс гиперболический	atanh(x)
ch x – косинус гиперболический	cosh(x)
cth x – котангенс гиперболический	coth(x)
csch x – косеканс гиперболический	csch(x)
sech x – секанс гиперболический	sech(x)
sh x – синус гиперболический	sinh(x)
th x – тангенс гиперболический	tanh(x)

Приведём пример выполнения матричных операций MATLAB:

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> B = [-3 2 0; 8 2 1; 5 0 -1]
B =
    -3     2     0
     8     2     1
     5     0    -1
>> C = A * B
C =
    28     6    -1
    58    18    -1
    88    30    -1
>> CP = A.*B
CP =
    -3     4     0
    32    10     6
    35     0    -9
```

```
>> D = B * A
D =
     5     4     3
    23    34    45
    -2     2     6
>> DP = B.* A
DP =
    -3     4     0
    32    10     6
    35     0    -9
>> G = 2 * A - 10 * B
G =
    32   -16     6
   -72   -10     2
   -36    16    28
>> H = A./B
H =
   -0.3333    1.0000       Inf
    0.5000    2.5000    6.0000
    1.4000       Inf   -9.0000
>> I = A.\B
I =
   -3.0000    1.0000         0
    2.0000    0.4000    0.1667
    0.7143         0   -0.1111
>> X = [1; 2; 3]
X =
     1
     2
     3
>> Y = A * X
Y =
    14
    32
    50
```

Сделаем некоторые комментарии к указанным выше операциям. Элементы матрицы вводятся построчно, разделяясь запятой или пробелом. Строки матрицы отделяются друг от друга символом; (точка с запятой). Заметим, что два элемента матрицы H получили значение Inf (от слова Infinity). Это – обозначение для бесконечности, используемой в MATLAB (событие – «деление на ноль»).

В MATLAB используется и выражение NaN (Not-a-Number). Оно получается, когда происходит попытка деления 0 на 0 или выполняется операция ∞–∞.

Поэлементное умножение или деление матриц в классической математике редко используется, но в технических областях, например, в метрологии, при калибровке измерительных датчиков, эта процедура представляется вполне уместной.

Приведем несколько вычислений значений функций:

```
>> format short
>> a = sin(pi/4)
a =
    0.7071
>> b = cos(pi/4)
b =
    0.7071
>> c = a^2 + b^2
c =
     1
>> d = sin(atan(pi/6))
d =
    0.4639
>> E = exp(-sqrt(2)/2) * sin(1.3)
E =
    0.4751
>> F = sin(0.5)+sin(0.5)^2/2-cos(0.5)-cos(0.5)^2
F =
   -1.0534
>> g = sinh(1.5)/sin(1.5)+cosh(1.5)^sin(0.5)
g =
    3.6416
```

Мы убедились, что вычислять элементарные функции MATLAB «умеет». Отметим здесь, что и практически всё многообразие так называемых специальных функций тоже легко вычисляются подобным образом.

Особая роль досталась в MATLAB оператору «:» (двоеточие). Он часто используется для задания диапазона значений вектора или матрицы.

Рассмотрим, как он используется для построения графика функции. Для этого сформируем последовательность операторов и обращений к встроенным функциям MATLAB:

```
>> x = -2*pi:0.1:2*pi;
>> y1 = sin(x);
>> y2 = cos(x);
>> y3 = sin(x) .* cos(x);
>> plot (x,y1,x,y2,x,y3)
>> title('Графики трёх функций')
>> xlabel('x'), ylabel('y')
>> legend('sin(x)','cos(x)','sin(x)*cos(x)')
>> grid on
```

Сперва определяется массив аргументов для функций x: начальное значение аргумента -2π конечное значение 2π, шаг 0,1. Далее вычисляются массивы функций

$$y_1(x) = \sin(x);\ y_2(x) = \cos(x);\ y_3(x) = \sin(x)\cdot\cos(x).$$

Обращаем внимание на вычисление $y_3(x)$. Здесь мы использовали функцию поэлементного умножения, поскольку как sin(x), так и cos(x) – одномерные числовые массивы, векторы-строки размерностью 1×126. И если бы мы использовали обычную операцию умножения, то это привело бы к появлению сообщения об ошибке:

*Error using **

Incorrect dimensions for matrix multiplication. Check that the number of columns in the first matrix matches the number of rows in the second matrix. To perform elementwise multiplication, use '.'.*

Кстати, чем и ещё хорош MATLAB. Указав на ошибку:

*«Ошибка при использовании оператора **

Неправильные размеры для операции матричного умножения. Убедитесь в том, что число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы»,

система сразу же показывает возможный путь избавления от неё, а именно:

«Для выполнения поэлементного умножения используйте оператор «.»*

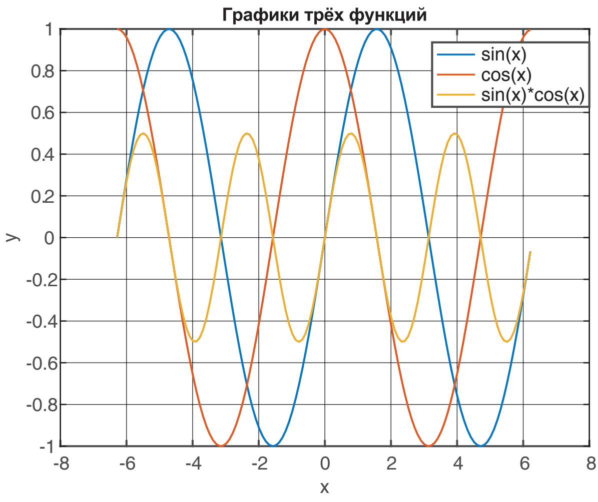


Рис. 3. Пример использования оператора «двоеточие» при построении графика

С помощью функции plot() создается окно для вывода графиков и происходит их построение в окне. Следующие далее обращения к встроенным функциям MATLAB носят опциональный характер. Функция title() выводит на график название рисунка, функции xlabel(), ylabel() наносят название координатных осей. Функция legend() строит обозначение (легенду) для каждой кривой графика. И, наконец, функция grid добавляет на график координатную сетку. Таким образом, мы с помощью оператора «двоеточие» получили график с тремя кривыми (рис. 3).

1.2. Функции и сценарии (скрипты) MATLAB

Как уже упоминалось выше, в среде MATLAB находится множество встроенных функций, дающих возможность решать несложные задачи, не прибегая к программированию. Впрочем, набор этих функций легко расширить введением новых, решающих именно задачи конкретного пользователя.

Поговорим сперва о файлах-сценариях, или просто сценариях, или ещё проще, скриптах. Составление их – совсем не сложная задача. Вы набираете последовательность команд, которые вам необходимо выполнить, но не в командном окне, а в каком-нибудь простом текстовом редакторе. Для этого лучше использовать внутренний редактор `edit` MATLAB, поскольку он всегда под рукой и к тому же высвечивает возможные ошибки набора операторов и функций. Далее вызываете этот набор команд на выполнение. Перед первым выполнением система попросит присвоить скрипту имя. Используется латинский шрифт, первый символ – буква, остальные – буквы или цифры, в имени может быть символ подчеркивания, верхний и нижний регистры различаются.

Например, наберём в редакторе следующие операторы, сохранив его в скрипт с именем kino (расширение *.m появится автоматически):

```
t=-2*pi: 0.1: 2*pi;
Nframes=3; % число кадров
Mframe=moviein(Nframes); % матрица кадров
for i=1:Nframes  % цикл по i
x=sin(t); y=cos(t); % данные
plot(x,y)
Mframe(:, i) =getframe;
end
for j=1:Nframes % цикл по j
x=sin(t); y=sin(t) .*cos(t); % данные
```

```
Mframe(:, j)=getframe;
end
N=100;
movie (Mframe,N) % проигрывание ролика из кадров N раз
```

Скрипты используют текущее рабочее пространство, поэтому во избежание возможного влияния предыдущих вычислений, проделанных в командном окне, следует очистить рабочее пространство командой `clear` (если мы не используем какие-либо значения, полученные ранее при выполнении команд или других скриптов), а также – очистить содержимое командного окна функцией `clc`. Примем на заметку, что история команд сохраняется в текущей сессии MATLAB.

Поговорим теперь о функциях, определяемых пользователем. Они имеют то же расширение, но гораздо более удобны в использовании. В начале тела функции полезно ввести её назначение с помощью комментариев, введя в первую позицию строки символ комментария %, после которого можно писать текст, поясняющий назначение функции и её входных и выходных параметров.

1.3. Примеры программирования функций на MATLAB

Приведём несколько примеров функций:

3. *Функция построения обратной матрицы n-го порядка.*

```
Function Ainv = imnord1(A,n)
% Функция imnord1 вычисляет обратную матрицу n-го порядка.
% Оставлены лишь важные сообщения.
% © Максимов В.В., 2022
m = length(A);
if m ~= n
    disp('Порядок матрицы отличается указанного в обращении поряд-
ка.')
    return
end
if abs(det(A)) > 10^(-14)
AE = [A eye(n)];
y = AE(1,1);
k = 1;
for i = 1:n
    if(abs(y) < abs(AE(i,1)))
        y = AE(i,1);
        k = i;
    end
end
   x(:) = AE(1,:);
   AE(1,:) = AE(k,:);
```

```
   AE(k,:) = x(:);
for i = 1:n
    AE(i,:) = AE(i,:) / AE(i,i);
    for j = 1:n
        if j ~= i
        AE(j,:) = AE(j,:) - AE(i,:) * AE(j,i);
    end
    end
end
Ainv = AE(1:n, n+1:2*n);
Ed = A * Ainv;
if abs(Ed - eye(n)) >= 10^(-6)
    disp(' ')
    disp('Вывод:')
    disp('Исходная матрица плохо обусловлена (определитель близок
к нулю)')
    disp('Найденное решение неудовлетворительно!')
    return
end
else
    disp('Вывод:')
    disp('Определитель матрицы A равен нулю. ')
    disp('Обратной матрицы не существует!')
    return
end
```

4. ***Решение системы линейных алгебраических уравнений n-го порядка методом Гаусса – Жордана.***

```
Function X = GssJrd(A,b,n)
% Функция GssJrd находит решение СЛАУ методом Гаусса - Жордана.
% Оставлены лишь важные сообщения.
% © Максимов В.В., 2022
m = length(A);
m1 = length(b);
if m ~= n
    disp('Порядок матрицы отличается от указанного порядка.')
    return
end
if m1 ~= n
    disp('Порядок вектора правых частей системы отличается указан-
ного порядка.')
    return
end
if abs(det(A)) > 10^(-14)
Ab = [A b];
y = Ab(1,1);
k = 1;
for i = 1:n
    if(abs(y) < abs(Ab(i,1)))
```

```
        y = Ab(i,1);
        k = i;
    end
end
   x(:) = Ab(1,:);
   Ab(1,:) = Ab(k,:);
   Ab(k,:) = x(:);
for i = 1:n
    Ab(i,:) = Ab(i,:) / Ab(i,i);
    for j = 1:n
        if j ~= i
        Ab(j,:) = Ab(j,:) - Ab(i,:) * Ab(j,i);
    end
    end
end
X = Ab(:,n+1);
else
    disp('Вывод:')
    disp('Определитель матрицы А равен нулю. ')
    disp('Система решений не имеет!')
    return
end
```

5. *Минимизация скалярной функции методом золотого сечения.*

```
% Функция GOLDS  минимизирует пользовательскую одномерную функцию MyFun
% на отрезке [a,b]  методом золотого сечения.
% Входные параметры функции:
% eps - интервал неопределённости (точность вычисления);
% a - левая граница отрезка;
% b - правая граница отрезка;
% n - количество точек, на которые разбивается последний интервал
%    (необходим для построения графика функции в окрестности мини-
мума).
%
% (дата создания: 01.12.2021)
% (дата изменения: 10.12.2021)
% © Максимов В.В., 2021
function x0 = GOLDS (eps,a,b,n)
gs = 0.6180339;% Точное значение константы: (sqrt(5)-1)/2
%
% Вычисление золотого сечения отрезка [a,b]
%
xx = a:0.1:b;
yy = MyFun(xx);
subplot (1,2,1); plot(xx,yy,'g','LineWidth',2)
title('График функции MyFun в заданном интервале>)% Имя функции
xlabel('x')% Название горизонтальной оси
ylabel('MyFun') % Название вертикальной оси
```

```
grid on
axes = 'normal'
%hold on
a0 = a;
b0 = b;
xp = a + (b - a) * gs;
xl = b - (b - a) * gs;
yp = MyFun(xp);
yl = MyFun(xl);
n = 1;
disp('   ');
disp('Шаг    Левая граница     Правая граница')
disp('   ');
while b - a > eps
    disp([ num2str(n),'        ',num2str(a), '        ',num2str(b) ]);
    n = n +1;
    if yp < yl % Выбор отрезка
        a = xl;
        xl = xp;
        yl = yp;
    else
        b = xp;
        xp = xl;
        yp = yl;
        %
        % золотое сечение отрезка [a,xp]
        %
        xl = b - (b - a) * gs;
        yl = MyFun(xl);
    end
    %
    % Золотое сечение отрезка [xl,b]
    %
    xp = a + (b - a) * gs;
    yp = MyFun(xp);
end
format long
x0 = 0.5 * (a + b)
y0 = MyFun(x0)
disp('   ');
disp([' Всего шагов: ',num2str(n), '  Точка минимума: ',…
        num2str(x0),' Значение функции: ',num2str(y0)]);
    % Построение графика функции MyFun в пределах последнего
    % найденного отрезка.
    % st - величина шага построения функции;
    % xi - вектор значений аргумента функции;
    % myfi - задаваемый пользователем вектор значений функции MyFun.
St = (b0 - a0) / (10*n);
xi = a0/10 : st : b0/10;
```

```
myfi = xi.^2 + exp(xi);
%myfi = (xi.^2)/2+5*cos(xi); % функция вводится вручную
subplot (1,2,2); plot(xi, myfi,'b','LineWidth',2); % построение и вывод
графика функции в окно Figure
% Здесь нужно поместить маркер в точку минимума…
hold on
line(x0,y0,'Marker','.','MarkerEdgeColor','r','MarkerSize',20)
xlabel('x')% Название горизонтальной оси
ylabel('MyFun') % Название вертикальной оси
title('Поведение функции MyFun в окрестности точки минимума>)% Имя
графика
grid on % добавление к графику функции сетки.
Hold off
end
%
% Функция пользователя MyFun.(Вводится вручную.)
%
function y = MyFun(x)
y = x.^2+exp(x);
%y = (1/x^2/2)+5*cos(x);
end
```

6. *Минимизация функции двух аргументов*

```
% Применениие функции fminunc для  многомерной безусловной
% минимизации  гладкой функции на примере функции «Декартов лист»:
%   f = x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)*x(2)
% (используются метод Ньютона и метод доверительного интервала, а также
% аналитически задаются градиент g и гессиан H, что не является
% обязательным, поскольку, в противном случае, они строятся численно)
function QNMCIM
axes('Xlim',[-1.5 2.5],'Ylim',[-1.5 2.5]);   % Ограничения диапазона
                                              % значений переменных
axis equal; grid on; hold on;    % Установка одинакового масштаба по
                   % обеим осям, построение сетки и удержание рисунка
xlabel('x'); ylabel('y'); colormap default;
title('Минимизация функции «Декартов лист»: f = x^3+y^3-3xy'); % Название
                                    % рисунка
X0=-1.5:0.05:2.5; % Диапазон значений по сетке
[X Y]=meshgrid(X0); % Формирование сеточной матрицы
s=size(X); Z=zeros(s);
for i = 1:s(1)
    for j = 1:s(2)
        Z(i,j) = Descartes([X(i,j); Y(i,j)]);  % Формирование числового
                                      % массива исследуемой функции
    end
end
V=-0.8:0.2:1; contour(X,Y,Z,V) % Задание интервала значений изолиний и
                         % построение изолиний исследуемой функции
options = …
    optimset('Display','final','GradObj','on','Hessian','on');
```

```
% Задание
% вывода дополнительной информации
x0=[1;2]; % Координаты начальной точки
line(x0(1),x0(2),'Marker','.','MarkerSize',10); % Рисование начальной
                                        % точки
[x,f1,e_flag,out,grad,hes] = fminunc(@Descartes,x0,options)
line(x(1),x(2),'Marker','.','MarkerSize',20);  % Рисование точки минимума
plot([x0(1),x(1)],[x0(2),x(2)],'k-');          % Рисование отрезка прямой,
                   % соединяющего начальную точку с точкой минимума
function [f,g,H] = Descartes(x)   % Задание функции «Декартов лист»
f = x(1)^3+x(2)^3-3*x(1)*x(2);
if nargout >1
    g = [3*(x(1)^2-x(2)); 3*(x(2)^2-x(1))];     % Аналитическое задание
                                               % градиента
end
if nargout >2
    H = [6*x(1)-3 -3; -3 6*x(2)];           % Аналитическое задание
                                           % гессиана
end
end
end
```

7. Сравнение аналитического и численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, а также их первых производных.

```
Function ode2o
% Вывод графиков.
% Строятся графики аналитически полученного решения
% задачи с начальными данными для линейного ОДУ 2-го порядка
% с постоянными коэффициентами и неоднородной правой частью.
% Там же наносятся маркерами результаты численного
% интегрирования данного ОДУ, приведённого к системе
% двух дифференциальных уравнений 1-го порядка.
X=0:0.01:0.4; % Интервал задания
plot(x,exp(5.*x).*(0.5*x.^2-5.*x+1)); % Рисование аналитического решения.
Hold on; % Закрепление окна для рисования нескольких графиков.
Plot(x,exp(5.*x).*x.*(5/2*x-24)); % Рисование производной аналитическо-
го решения.
% Задание вектора начальных условий:
% функции y(x) и её производной y›(x) в точке x=0
Y0 = [1;0];
% Вызов решателя ODE системы обыкновенных дифференциальных уравнений
[X, Y] = ode113(@f, [0 0.4], Y0);
% Построение графика решения (маркеры - красные  точки)
plot(X, Y(:,1),'r.','MarkerSize',10)
plot(X, Y(:,2),'g.','MarkerSize',10)
% Вывод названия графика
title('Решение уравнения  d2y/dx2 - 10 dy/dx + 25y = exp(5x)')
xlabel('x'); % Обозначение горизонтальной оси
```

```
ylabel('y') % Обозначение вертикальной оси
legend('аналитическое решение', 'производная решения',…
'численное решение', 'численная производная решения');
grid on; % Включение сетки
hold off % Освобождение окна.
End
function F = f(x,y)
F = [y(2); 10*y(2)-25*y(1)+exp(5*x)];
end
```

Как видно из приведённых примеров, функция может иметь один или несколько входных или выходных параметров или не иметь их вовсе. Тем самым, в MATLAB используется расширенное понятие функции. Важно только, чтобы имя файла, содержащего функцию, совпадало с именем функции.

Кроме того, отметим, что после выполнения функции рабочее пространство текущей сессии MATLAB не изменяется. Такая ситуация объясняется тем, что функция работает с локальными переменными, которые создаются только на время ее исполнения. Сразу после завершения работы функции они уничтожаются.

Отметим также важность применения комментариев по тексту программы, особенно, если она имеет большой объём и к тому же если ей приходится пользоваться нечасто. В этом случае её разработчику, по прошествии некоторого времени, приходится, с известным трудом и потерей личного времени, каждый раз «дешифровывать» её. Добавим, что наличие даже подробных комментариев практически не влияет на скорость выполнения функции или скрипта.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ПРИМЕНЕНИЮ MATLAB К ЗАДАЧАМ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Лабораторная работа 1. Операции линейной алгебры, нахождение обратной матрицы

Задание 1.

Даны две квадратные матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Найти вручную и на MATLAB:

транспонированные матрицы $\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}=3\cdot\mathbf{A}-8\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

Решение:

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=3\cdot\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}-8\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3(-4), & 3\times 0, & 3\times 1\\ 3\times 2, & 3(-1), & 3\times 3\\ 3\times 3, & 3\times 2, & 3\times 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8\times 1, & 8\times 2, & 8(-3)\\ 8\times 2, & 8\times 0, & 8\times 1\\ 8(-2), & 8\times 1, & 8\times 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}-12 & 0 & 3\\ 6 & -3 & 9\\ 9 & 6 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 16 & -24\\ 16 & 0 & 8\\ -16 & 8 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12-8, & 0-16, & 3+24\\ 6-16, & -3-0, & 9-8\\ 9+16, & 6\text{-}8, & 6-24\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-20 & -16 & 27\\ -10 & -3 & 1\\ 25 & -2 & -18\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{C} = 3 \cdot \mathbf{A} - 8 \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -20 & -16 & 27 \\ -10 & -3 & 1 \\ 25 & -2 & -18 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \times 1 + 0 \times 2 + 1(-2), & -4 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times 1 & -4 \times (-3) + 0 \times 1 + 1 \times 3 \\ 2 \times 1 - 1 \times 2 + 3(-2), & 3 \times 2 - 1 \times 0 + 3 \times 1, & 2(-3) - 1 \times 1 + 3 \times 3 \\ 3 \times 1 + 2 \times 2 + 2(-2), & 3 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 1, & 3(-3) + 2 \times 1 + 2 \times 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -3 & 15 \\ -6 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1(-4) + 2 \times 2 - 3 \times 3, & 1 \times 0 + 2(-1) - 3 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times 3 - 3 \times 2 \\ 2(-4) + 0 \times 2 + 1 \times 3, & 2 \times 0 + 0(-1) + 1 \times 2, & 2 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 2 \\ -2(-4) + 1 \times 2 + 3 \times 3, & -2(0) + 1 \times (-1) + 3 \times 2, & -2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Мы убедились, что умножение матриц в общем случае некоммутативно. Существуют, однако, матрицы, для которых операция умножения является коммутативной, например, матрица и обратная к ней.

Задание 2.

Даны матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти обратные им матрицы и их произведения вручную и с использованием MATLAB, т. е.:

$$\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A}, \mathbf{B} \times \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{B}.$$

Указание: для выполнения задания в MATLAB можно воспользоваться функцией нахождения обратной матрицы `imnord1(A,n)`, приведённой в примере 1 и встроенной функцией `inv()`.

Решение: воспользуемся методом элементарных преобразований:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) \sim \left(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}\right)$$

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{39}{4} & \frac{7}{4} & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{39}{4} & \frac{7}{4} & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{array}\right] = \left(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}.$$

Вычислим

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8(-4)+2\times2+1\times3, & -8\times0+2(-1)+1\times2, & -8\times1+2\times3+1\times2 \\ 5(-4)-11\times2+14\times3, & 5\times0-11(-1)+14\times2, & 5\times1-11\times3+14\times2 \\ 7(-4)+8\times2+4\times3, & 7\times0+8(-1)+4\times2, & 7\times1+8\times3+4\times2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

$$\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8(-4)+2\times2+1\times3, & -8\times0+2(-1)+1\times2, & -8\times1+2\times3+1\times2 \\ 5(-4)-11\times2+14\times3, & 5\times0-11(-1)+14\times2, & 5\times1-11\times3+14\times2 \\ 7(-4)+8\times2+4\times3, & 7\times0+8(-1)+4\times2, & 7\times1+8\times3+4\times2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

Следовательно, $\mathbf{A}\times\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{A}$, т. е. мы убедились, что матрица и обратная к ней являются коммутативными.

Для матрицы **B** действия выполняются аналогично. Данные вариантов расположены в табл. 5.

Таблица 5

Варианты заданий к лабораторной работе 1

№	Матрицы
1	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$
3	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$
4	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
5	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$
6	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

№	Матрицы
7	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{bmatrix}$
8	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{bmatrix}$
9	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}$
10	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{bmatrix}$
11	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$
12	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{bmatrix}$
13	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{bmatrix}$
14	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$
15	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$
16	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

№	Матрицы
17	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$
18	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
19	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$
20	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
21	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$
22	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
23	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
24	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$
25	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
26	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

№	Матрицы
27	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$
28	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$
29	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$
30	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

2.2. Лабораторная работа 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Задание:

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений вручную (методом Гаусса) и с помощью MATLAB. Сравнить полученные решения.

Указание: при решении системы средствами MATLAB использовать функцию `GssJrd(A,b,n)`, представленную в примере 2, и встроенные функции MATLAB.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & 20 \\ 3 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right].$$

(Поменяем местами 1-ю и 2-ю строку):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 20 \\ 2 & -1 & -3 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right]$$

(вычитаем из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на 2; вычитаем из 3-й строки 1-ю строку, умноженную на 3)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 20 \\ 0 & -11 & -5 & -49 \\ 0 & -11 & -1 & -45 \end{array}\right]$$

(вычитаем из 3-ей строки 2-ю строку)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 20 \\ 0 & -11 & -5 & -49 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

(разделим 2-ю строку на (-1); разделим 3-ю строку на 4)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 20 \\ 0 & 11 & 5 & 49 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Таким образом, мы пришли к треугольной системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ \quad 11x_2 + 5x_3 = 49. \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Поднимаясь вверх, найдём соответственно

$$x_2 = \frac{49 - 5x_3}{11}\frac{49 - 5}{11} = \frac{44}{11} = 4. \quad x_1 = 20 - 5x_2 - x_3 = 20 - 5 \times 4 - 1 = -1.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2(-1) - 4 - 3 \times 1 \equiv -9 \\ \quad -1 + 5 \times 4 + 1 \equiv 20. \\ 3(-1) + 4 \times 4 + 2 \equiv 15 \end{cases}$$

Получены тождества. Значит, решение корректно.

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 1.$

```
Command Window
>> % Выписываем матрицу A и столбец првых частей b системы уравнений Ax = b
>> A = [2 -1 -3; 1 5 1; 3 4 2]

A =

     2    -1    -3
     1     5     1
     3     4     2

>> b = [-9; 20; 15]

b =

    -9
    20
    15

>> % Получаем решение системы с помощью обратной матрицы
>> x = A^(-1)*b

x =

   -1.0000
    4.0000
    1.0000

>> % Получаме решение системы операцией деления
>> x1 = A\b

x1 =

   -1.0000
    4.0000
    1.0000

>> % Как видно, ответы операций совпадают. Аналитической решение (методом Гаусаа) совпадает
>> % с решением, полученным в MATLAB.
>>
```

Рис. 4. Пример скрипта решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью встроенных функций MATLAB

С помощью скрипта MATLAB, приведённого на рис. 4, получаем решение системы этих линейных алгебраических уравнений:

Данные для выполнения задания необходим выбрать из табл. 6.

Таблица 6

Варианты заданий к лабораторной работе 2

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

Продолжение табл. 6

№	Система уравнений	№	Система уравнений
5	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$	18	$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

№	Система уравнений	№	Система уравнений
25	$\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16 \\ x_1+3x_3=-6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$
26	$\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15 \\ 3x_1+x_2+4x_3=13 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 3x_2-7x_3=-6 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 4x_1-x_2=-6 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=-14 \\ x_1-3x_2+4x_3=-19 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-10 \end{cases}$

3. Выполнение лабораторных работ по вычислению определённых интегралов и решению дифференциальных уравнений

2.3. Лабораторная работа 3. Аналитическое и численное нахождение определённых интегралов

Задание:

Вычислить определённые интегралы вручную и с помощью функций MATLAB:

А) $I_1 = \int\limits_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Будем брать интеграл подведением под знак дифференциала и замены переменной:

$$x\,dx = -\frac{1}{2}d\left(1-x^2\right).$$

Тогда

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right).$$

Введём замену $t = 1-x^2$, тогда $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{3}{4}$.
Таким образом, после замены переменной

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_1^{3/4} t^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Поменяем местами пределы интегрирования

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{3/4}^{1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Получим табличный интеграл от степенной функции

$$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c.$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_{\frac{3}{4}}^{1} = \left.t^{\frac{1}{2}}\right|_{\frac{3}{4}}^{1} = \left.\sqrt{t}\right|_{\frac{3}{4}}^{1} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}1340.$$

Б) $I_2 = \int\limits_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx.$ Берём его интегрированием по частям

$$\left\langle \begin{matrix} u = \ln(x+1) & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2}, & v = -\dfrac{1}{x+1} \end{matrix} \right\rangle, I_2 = \left.\frac{ln2}{2} - \frac{ln3}{3} - \frac{1}{(x+1)}\right|_1^2 =$$

$$\frac{ln2}{2} - \frac{ln3}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{ln2}{2} - \frac{ln3}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1 + 3ln2 - 2ln3}{6} \approx 0{,}1410.$$

В) $I_3 = \int\limits_8^{10} \frac{x^2+3}{x^3 - x^2 - 6x}dx.$ Этот интеграл возьмём способом разложения дроби на простейшие дроби и последующим интегрированием табличных интегралов.

Вначале дробь в знаменателе упростим:

$$x^3 - x^2 - 6x = x\left(x^2 - x - 6\right) = x(x+2)(x-3).$$

Выпишем интеграл в виде

$$I_3 = \int\limits_8^{10} \frac{x^2+3}{x(x+2)(x-3)}dx.$$

Разложим дробь на сумму простейших дробей.

Для этого представим её в виде:

$$\frac{x^2+3}{x(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-3)}$$

здесь A, B и C – постоянные, которые мы найдём из тождества:

$$x^2+3\equiv A(x+2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+2)$$

Положим:

$$\begin{cases} x=0\Rightarrow 3=-6A\Rightarrow A=-\dfrac{1}{2} \\ x=3\Rightarrow 12=15C\Rightarrow C=\dfrac{4}{5} \\ x=-2\Rightarrow 7=10B\Rightarrow B=\dfrac{7}{10} \end{cases}.$$

Получили $A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{7}{10},\ C=\frac{4}{5}.$

$$I_3=\int_8^{10}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}+\frac{7}{10}\times\frac{1}{x+2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_8^{10}\frac{dx}{x}+\frac{7}{10}\int_8^{10}\frac{d(x+2)}{x+2}+\frac{4}{5}\int_8^{10}\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln x\Big|_8^{10}+\frac{7}{10}\ln(x+2)\Big|_8^{10}+\frac{4}{5}\ln(x-3)\Big|_8^{10}=$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 8)+\frac{7}{10}(\ln 12-\ln 10)+\frac{4}{5}(\ln 7-\ln 5)$$

$$=\left\langle \ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}\right\rangle=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{7}{10}\ln\left(\frac{6}{5}\right)+\frac{4}{5}\ln\left(\frac{7}{5}\right)=0{,}2852.$$

Приводим на рис. 5 скрипт файла MATLAB, реализующий вычисление этих трёх интегралов.

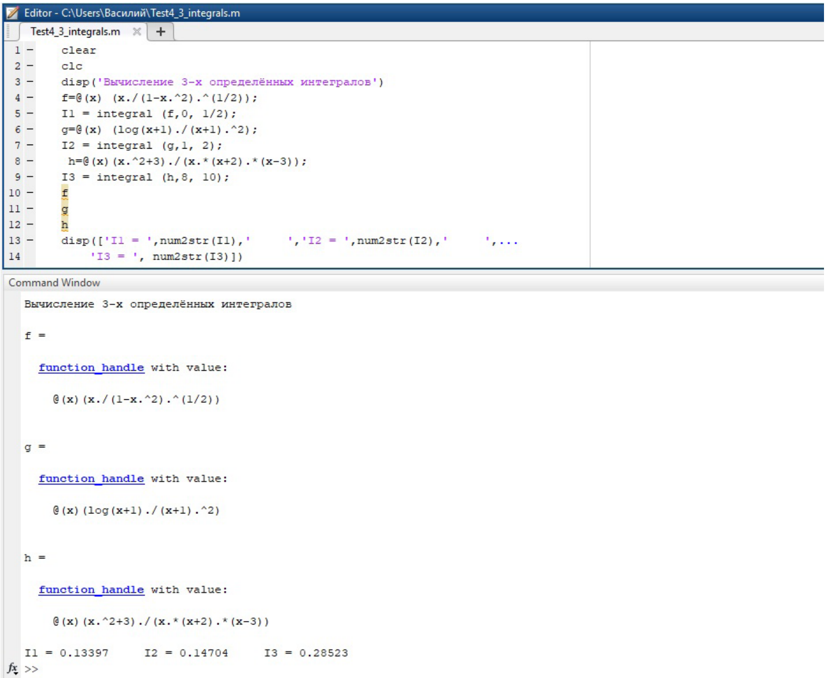


Рис. 5. Скрипт MATLAB, реализующий вычисление определённых интегралов

Данные для выполнения работы необходимо выбрать из табл. 7.

Таблица 7

Варианты заданий к лабораторной работе 3

Номер	Задание
1	$A)\ \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx;$ $\quad Б)\int_2^3 y\ln(y-1)\,dy;$ $\quad В)\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx.$
2	$A)\ \int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}}dx;$ $\quad Б)\ \int_{-2}^0 x^2e^{-x/2}\,dx;$ $\quad В)\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx.$
3	$A)\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx;$ $\quad Б)\ \int_0^{\pi/2} x\cos x dx;$ $\quad В)\int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)}dx.$
4	$A)\ \int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x dx;$ $\quad Б)\int_0^{\pi} x^2\sin x dx;$ $\quad В)\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}dx.$

Номер	Задание
5	$А)\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx;\quad Б)\int\limits_{-1/2}^{1/2}\arccos 2x\,dx;\quad В)\int\limits_{-1}^{1}\frac{y^5}{y+2}dy.$
6	$А)\int\limits_{3/4}^{4/3}\frac{1}{x^2+1}dx;\quad Б)\int\limits_{1}^{2}(y-1)\ln y\,dy;\quad В)\int\limits_{2}^{3}\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx.$
7	$А)\int\limits_{3/4}^{4/3}\frac{1}{x^2+1}dx;\quad Б)\int\limits_{1}^{2}(y-1)\ln y\,dy;\quad В)\int\limits_{1/3}^{1/2}\frac{x}{(x-1)^3}dx.$
8	$А)\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}dx;\quad Б)\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos x\,dx;\quad В)\int\limits_{4}^{5}\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx.$
9	$А)\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx;\quad Б)\int\limits_{1/3}^{2/3}\frac{x}{e^{3x}}dx;\quad В)\int\limits_{3}^{4}\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx.$
10	$А)\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx;\quad Б)\int\limits_{1/3}^{2/3}\frac{x}{e^{3x}}dx;\quad В)\int\limits_{0}^{1}\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx.$
11	$А)\int\limits_{3/4}^{3/2}\frac{1}{1-\cos^2 x}dx;\quad Б)\int\limits_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln x\,dx;\quad В)\int\limits_{2}^{3}\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}dx.$
12	$А)\int\limits_{2}^{5}\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx;\quad Б)\int\limits_{0}^{1}\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx;\quad В)\int\limits_{3}^{5}\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx.$
13	$А)\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx;\quad Б)\int\limits_{0}^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx;\quad В)\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx.$
14	$А)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx;\quad Б)\int\limits_{0}^{\pi/3}x^2\sin 4x\,dx;\quad В)\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx.$
15	$А)\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx;\quad Б)\int\limits_{1}^{2}y^2\ln y\,dy;\quad В)\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{x^2+3x+2}dx.$
16	$А)\int\limits_{0}^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;\quad Б)\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx;\quad В)\int\limits_{8}^{10}\frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}dx.$
17	$А)\int\limits_{0}^{1}3\left(x^2+x^2e^{x^3}\right)dx;\quad Б)\int\limits_{3/2}^{2}\mathrm{arctg}(2x-3)\,dx;\quad В)\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^4+x^2}.$

Номер	Задание
18	*А*) $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; *Б*) $\int\limits_0^{\pi/2}(x+3)\sin x dx$; *В*) $\int\limits_2^3 \frac{x^7dx}{1-x^4}$.
19	*А*) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^6}$; *Б*) $\int\limits_1^e x\ln^2 x dx$; *В*) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$.
20	*А*) $\int\limits_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$; *Б*) $\int\limits_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3}dx$; *В*) $\int\limits_{-1}^0 \frac{x\,dx}{x^3-1}dx$.
21	*А*) $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; *Б*) $\int\limits_0^{\pi/9} \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$; *В*) $\int\limits_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x+1}dx$.
22	*А*) $\int\limits_3^8 \sqrt{x+1}dx$; *Б*) $\int\limits_{1/2}^1 \arcsin(1-x)dx$; *В*) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$.
23	*А*) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\cos^3 x dx$; *Б*) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\frac{1}{x}dx$; *В*) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}dx$.
24	*А*) $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12\,\mathrm{ctg}\,3x\,dx$; *Б*) $\int\limits_{-1}^0 x\ln(1-x)dx$; *В*) $\int\limits_0^2 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$.
25	*А*) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}dx$; *Б*) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}dx$; *В*) $\int\limits_4^6 \frac{x\,dx}{x^3-6x^2+16x-6}dx$.
26	*А*) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; *Б*) $\int\limits_1^2 \ln(3x+2)dx$; *В*) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$.
27	*А*) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; *Б*) $\int\limits_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$; *В*) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx$.
28	*А*) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$; *Б*) $\int\limits_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$; *В*) $\int\limits_2^3 \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}$.
29	*А*) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\sin^3 x dx$; *Б*) $\int\limits_0^{\pi/4} x\ \mathrm{tg}^2 x dx$; *В*) $\int\limits_3^5 \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$.
30	*А*) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2)}$; *Б*) $\int\limits_0^1 x\ \mathrm{arctg} x dx$; *В*) $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$.

2.4. Лабораторная работа 4. Аналитическое и численное нахождение решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Задание:

Найти решение задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

аналитически и с использованием функции `ode2o`, реализованной в MATLAB (рис. 6).

Аналитическое решение:

Выпишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 10k + 25 = 0.$$

Его корни:

$$k_{1,2} = 5.$$

```
ode_secoond_order_solution.m

function ode2o
% Вывод графика полученного аналитического решения
x=0:0.01:1; % Интервал задания
plot(x,exp(5.*x).*(0.5*x.^2-5.*x+1)); % Рисование аналитического решения.
hold on; % Закрепление окна для рисования нескольких графиков.
% Задание вектора начальных условий:
% функции y(x) и её производной y'(x) в точке x=0
Y0 = [1;0];
% Вызов решателя ODE системы обыкновенных дифференциальных уравнений
[X, Y] = ode113(@f, [0 1], Y0);
% Построение графика решения (маркеры - красные  точки)
plot(X, Y(:,1),'r.')
% Вывод названия графика
title('Решение уравнения  d2y/dx2 - 10 dy/dx + 25y = exp(5x)')
xlabel('x'); % Обозначение горизонтальной оси
ylabel('y') % Обозначение вертикальной оси
legend('аналитическое решение', 'численное решение');
grid on; % Включение сетки
hold off % Освобождение окна.
end
function F = f(x,y)
F = [y(2); 10*y(2)-25*y(1)+exp(5*x)];
end
```

Рис. 6. Функция ode2o, реализующая численное решение задачи Коши и сравнение с полученным аналитическим решением

Таким образом. имеем линейно независимые решения:

$$y_1(x) = e^{5x}, \quad y_2(x) = x \cdot e^{5x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем получать методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных). Запишем решение в виде: $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные пока функции переменного x. Для их нахождения имеем систему из двух алгебраических (относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$) уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases},$$

где $f(x)$ – правая часть исходного уравнения, $f(x) = e^{5x}$.

В нашем случае получаем:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{5x} + C_2'(x) \cdot x \cdot e^{5x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 5e^{5x} + C_2'(x) \cdot \left(e^{5x} + 5x \cdot e^{5x}\right) = e^{5x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0 \\ 5C_1'(x) + C_2'(x) \cdot (1 + 5x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot x \\ 5\left(-C_2'(x) \cdot x\right) + C_2'(x) + 5x \cdot C_2'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot x \\ C_2'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x \\ C_2'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\int x dx = -\dfrac{x^2}{2} + \tilde{C}_1, & \tilde{C}_1 - \text{const}, \\ C_2(x) = \int 1 \cdot dx = x + \tilde{C}_2, & \tilde{C}_2 - \text{const}, \end{cases}$$

находим общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \left(\tilde{C}_1 - \frac{x^2}{2}\right)e^{5x} + \left(\tilde{C}_2 + x\right)xe^{5x}.$$

Для нахождения постоянных $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ используем начальные условия

$$y(0)=1 \Rightarrow \left(0+\tilde{C}_1\right)\cdot 1+\left(0+\tilde{C}_2\right)\cdot 0\cdot 1=1 \Rightarrow \tilde{C}_1=1,$$

$$y'(x)=-xe^{5x}+\left(-\frac{x^2}{2}+\tilde{C}_1\right)\cdot 5e^{5x}+xe^{5x}+\left(x+\tilde{C}_2\right)e^{5x}+\left(x+\tilde{C}_2\right)\cdot 5e^{5x}\cdot x,$$

$$y'(0)=0+\left(0+\tilde{C}_1\right)\cdot 5+\left(0+\tilde{C}_2\right)\cdot 1+\left(0+\tilde{C}_2\right)\cdot 5\cdot 1\cdot 0=$$

$$=0 \Rightarrow 5\tilde{C}_1+\tilde{C}_2=0 \Rightarrow \tilde{C}_2=-5.$$

Таким образом решением задачи Коши исходного уравнения будет:

$$y(x)=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)e^{5x}+\left(x-5\right)xe^{5x}=e^{5x}\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2-5x\right)=e^{5x}\left(\frac{x^2}{2}-5x+1\right).$$

Ответ: $y(x)=e^{5x}\left(\dfrac{x^2}{2}-5x+1\right).$

Замечание: при численном решении в MATLAB следует привести исходное уравнение (2-го порядка) к системе двух уравнений 1-го порядка следующим образом:

$$y(x)=y_1(x), \quad y'(x)=y_2(x),$$

тогда

$$y_2'(x)=y''(x)$$

и система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=10y_2-25y_1+e^{5x} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_2(0)=0 \end{cases}.$$

На рис. 6 приведён код m-функции MATLAB, реализующей этот вариант:

Сравнение полученного аналитически решения задачи Коши с численным решением, полученным в MATLAB, приведено на рис. 7.

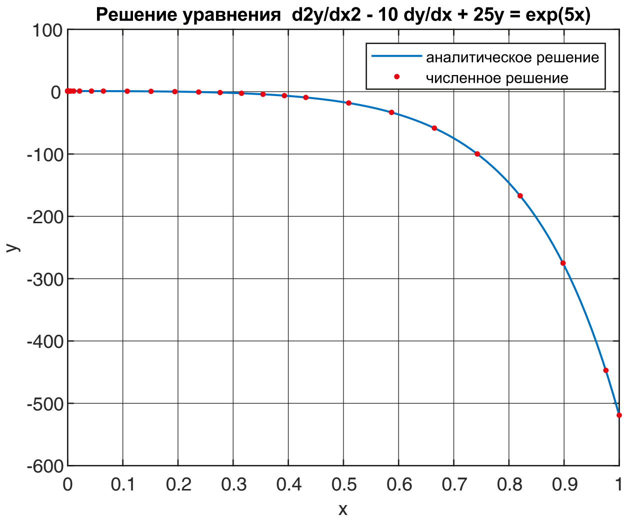


Рис. 7. Сравнение аналитического и численного решения задачи Коши

Данные для вариантов следует выбирать из табл. 7.

Таблица 7

Варианты заданий к лабораторной работе 4

№	Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка
1	$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$
2	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$
3	$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$
4	$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$
5	$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$
6	$y'' + 6y = e^x\left(\cos 4x - 8\sin 4x\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$
7	$y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
8	$y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

№	Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка
9	$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$
10	$y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$
11	$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$
12	$y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$
13	$y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin 3x - 36x\cos 3x,$ $y(0) = 4,\ y'(0) = 0.$
14	$y'' + 25y = e^{x}(\cos 5x - 10\sin 5x), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4.$
15	$y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$
16	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
17	$y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$
18	$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
19	$y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 4x + 8, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$
20	$y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$
21	$y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14.$
22	$y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
23	$y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
24	$y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
25	$y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2.$

Окончание табл. 7

№	Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка
26	$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7.$
27	$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$
28	$y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$
29	$y'' + 5y' + 6y = 52\sin(2x), \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2.$
30	$y'' - 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8.$

3. ПРИМЕНЕНИЕ MATLAB К ЗАДАЧАМ МЕТРОЛОГИИ

3.1. Лабораторная работа 5. Графические функции в MATLAB

Возможности графического препроцессора MATLAB весьма впечатляющие. В нем реализовано сотни встроенных функций, реализующих всевозможные варианты графического представления, от самых простых до достаточно сложных: явных, неявных функций, параметрически заданных кривых, пространственных кривых и многое другое.

Рассмотрим применение отдельных графических функций в лабораторной работе.

Выполнить следующие 10 заданий в соответствии с вариантом.

1. Построить график функции $y(t)$ с применением оператора `plot(t,y)`. Данные для вариантов следует выбирать из табл. 8.

Таблица 8

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 1

Вариант	Функция	Диапазон
1	$y(t) = e^{-2t} \cdot \cos(20 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$
2	$y(t) = e^{-t} \cdot \sin^2(10 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$
3	$y(t) = e^{-t} \cdot \sin^3(20 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$
4	$y(t) = e^{t} \cdot \cos(20 \cdot t)$	$t \in [0,2], \quad \Delta t = 0{,}01$
5	$y(t) = e^{t} \cdot \sin^2(20 \cdot t)$	$t \in [0,2], \quad \Delta t = 0{,}01$
6	$y(t) = e^{t} \cdot \cos^2(20 \cdot t)$	$t \in [0,2], \quad \Delta t = 0{,}01$
7	$y(t) = e^{t} \cdot \sin^3(20 \cdot t)$	$t \in [0,2], \quad \Delta t = 0{,}01$
8	$y(t) = \sqrt{t} \cdot \sin(10 \cdot t)$	$t \in [0,4], \quad \Delta t = 0{,}02$
9	$y(t) = \sqrt{t} \cdot \sin^2(10 \cdot t)$	$t \in [0,4], \quad \Delta t = 0{,}02$
10	$y(t) = t \cdot \sin^2(10 \cdot t)$	$t \in [0,2], \quad \Delta t = 0{,}01$
11	$y(t) = (1 - t) \cdot \cos(20 \cdot t)$	$t \in [0,2], \quad \Delta t = 0{,}01$

Окончание табл. 8

Вариант	Функция	Диапазон
12	$y(t) = \left(1 - e^{-t}\right) \cdot \cos\left(20 \cdot t\right)$	$t \in \left[0,2\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
13	$y(t) = \sin^2(t) \cdot \sin\left(10 \cdot t\right)$	$t \in \left[0,\pi\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
14	$y(t) = \cos^2(t) \cdot \sin\left(10 \cdot t\right)$	$t \in \left[0,\pi\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
15	$y(t) = \left(1 + e^{t}\right) \cdot \sin\left(20 \cdot t\right)$	$t \in \left[0,2\pi\right], \quad \Delta t = 0{,}01$

2. Построить в одном окне графики двух функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с использованием оператора `plotyy(...)`.

Данные для вариантов следует выбирать из табл. 9.

Таблица 9

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 2

Вариант	Функции	Диапазон
1	$y_1(t) = 10 \cdot e^{-2t}, \quad y_2(t) = \cos(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
2	$y_1(t) = 10 \cdot e^{-2t}, \quad y_2(t) = \sin^2(10 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
3	$y_1(t) = 10 \cdot e^{-t}, \quad y_2(t) = \sin^3(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
4	$y_1(t) = 10 \cdot e^{t}, \quad y_2(t) = \cos(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
5	$y_1(t) = 10 \cdot e^{t}, \quad y_2(t) = \sin^2(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
6	$y_1(t) = 10 \cdot e^{t}, \quad y_2(t) = \cos^2(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
7	$y_1(t) = 10 \cdot e^{t}, \quad y_2(t) = \sin^3(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
8	$y_1(t) = \sqrt{t}, \quad y_2(t) = \sin(10 \cdot t)$	$t \in \left[0,4\right], \quad \Delta t = 0{,}02$
9	$y_1(t) = 10 \cdot \sqrt{t}, \quad y_2(t) = \sin^2(10 \cdot t)$	$t \in \left[0,4\right], \quad \Delta t = 0{,}02$
10	$y_1(t) = 10 \cdot t, \quad y_2(t) = \sin(10 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$
11	$y_1(t) = 10 \cdot \left(1 - t\right), \quad y_2(t) = \cos(20 \cdot t)$	$t \in \left[0,1\right], \quad \Delta t = 0{,}01$

Окончание табл. 9

Вариант	Функции	Диапазон
12	$y_1(t) = 10 \cdot \left(1 - e^t\right), \quad y_2(t) = \cos(20 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$
13	$y_1(t) = 10 \cdot \sin^2(t), \quad y_2(t) = \sin(10 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$
14	$y_1(t) = 10 \cdot \cos^2(t), \quad y_2(t) = \sin(10 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$
15	$y_1(t) = 10 \cdot \left(1 + e^t\right), \quad y_2(t) = \sin(20 \cdot t)$	$t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}01$

3. С помощью оператора `plot(t,y1,'S1',t,y2,'S2')` построить в одном окне графики двух функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$. При построении графиков вид функций, пределы, шаг изменения аргумента и параметр S выбрать с использованием следующей таблицы.

Данные для вариантов следует выбирать из табл. 10.

Таблица 10

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 3

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
1	$y_1(t) = e^{-0,5t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Желтый, точка, сплошная
	$y_2(t) = \cos(3 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Розовый, кружок, пунктирная
2	$y_1(t) = e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Голубой, крестик, штрихпунктирная
	$y_2(t) = \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Красный, знак плюс, штриховая
3	$y_1(t) = e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Зеленый, треугольник вершиной влево, сплошная
	$y_1(t) = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Синий, треугольник вершиной вправо, пунктирная
4	$y_1(t) = 0{,}05 \cdot e^t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Черный, пятиконечная звезда, штрихпунктирная
	$y_2(t) = 60 \cdot \cos(2 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Желтый, знак плюс, штриховая

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
5	$y_1(t) = 0{,}1 \cdot e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Желтый, квадрат, штрих-пунктирная
	$y_2(t) = 60 \cdot \sin^2(2 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Розовый, ромб, штриховая
6	$y_1(t) = 0{,}1 \cdot e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Голубой, треугольник вершиной вниз, сплошная
	$y_2(t) = 60 \cdot \cos^2(2 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Красный, треугольник вершиной вверх, пунктирная
7	$y_1(t) = 0{,}1 \cdot e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Розовый, знак плюс, пунктирная
	$y_2(t) = 60 \cdot \sin^3(3 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Голубой, пятиконечная звезда, штрих-пунктирная
8	$y_1(t) = \sqrt{t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Зеленый, шестиконечная звезда, штриховая
	$y_2(t) = 2{,}5 \cdot \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Желтый, точка, сплошная
9	$y_1(t) = \sqrt{t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Розовый, кружок, пунктирная
	$y_2(t) = 2{,}5 \cdot \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Голубой, крестик, штрих-пунктирная
10	$y_1(t) = t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Красный, знак плюс, штриховая
	$y_2(t) = 8 \cdot \sin(10 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Зеленый, треугольник вершиной влево, сплошная
11	$y_1(t) = 1 - t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Синий, треугольник вершиной вправо, пунктирная
	$y_2(t) = 6 \cdot \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Черный, пятиконечная звезда, штрих-пунктирная
12	$y_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Желтый, знак плюс, штриховая
	$y_2(t) = 2 \cdot \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0{,}2$	Красный, квадрат, штрих-пунктирная

Окончание табл. 10

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
13	$y_1(t) = \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Розовый, ромб, штриховая
	$y_2(t) = \sin(10 \cdot t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Голубой, треугольник вершиной вниз, сплошная
14	$y_1(t) = \cos^2(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Красный, треугольник вершиной вверх, пунктирная
	$y_2(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Розовый, знак плюс, пунктирная
15	$y_1(t) = 0,1 \cdot \left(1 + e^t\right), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Голубой, пятиконечная звезда, штрихпунктирная
	$y_2(t) = 20 \cdot \sin(t) - 10 \cdot \cos(2 \cdot t),$ $t \in [0, 2\pi], \Delta t = 0,2$	Зеленый, шестиконечная звезда, штриховая

4. С помощью оператора `stem(t,y2,'S2')` построить график функции $y_2(t)$. При построении графиков вид функций, пределы, шаг изменения аргумента и параметр **S** выбрать из табл. 11.

Таблица 11

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 4

№	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
1	$y_2(t) = \sin^2(t) - 2 \cdot \cos^4(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Розовый, кружок, пунктирная
2	$y_2(t) = \sin^2(t) + \cos^4(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Красный, знак плюс, штриховая
3	$y_2(t) = \sin^2(t) - \cos^3(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Синий, треугольник вершиной вправо, пунктирная
4	$y_2(t) = \sin^3(t) - \cos^3(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Зеленый, знак плюс, штриховая
5	$y_2(t) = \sin^3(t) + \cos^3(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Delta t = 0,2$	Розовый, ромб, штриховая

6	$y_2(t)=\sin^2(t)+\cos^3(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Красный, треугольник вершиной вверх, пунктирная
7	$y_2(t)=\sin^3(t)+\cos^2(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Голубой, пятиконечная звезда, штрих-пунктирная
8	$y_2(t)=\sin^3(t)+\cos(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Желтый, точка, сплошная
9	$y_2(t)=2\cdot\sin^2(t)-\cos(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Голубой, крестик, штрих-пунктирная
10	$y_2(t)=3\cdot\sin(t)+\sqrt{2}\cdot\cos(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Зеленый, треугольник вершиной влево, сплошная
11	$y_2(t)=3\cdot\sin(t)+4\cdot\cos(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Черный, пятиконечная звезда, штрих-пунктирная
12	$y_2(t)=2\cdot\cos(t)+4\cdot\cos\left(t^2\right),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Красный, квадрат, штрих-пунктирная
13	$y_2(t)=\sin(10\cdot t)-4\cdot\cos\left(\sqrt{t}\right),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Голубой, треугольник вершиной вниз, сплошная
14	$y_2(t)=2\cdot\sin(t)+4\cdot\sin\left(\sqrt{t}\right),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Розовый, знак плюс, пунктирная,
15	$y_2(t)=6\cdot\sin(t)-2\cdot\cos(3\cdot t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Зеленый, шестиконечная звезда, штриховая

5. С помощью оператора `stairs(t,y1,'S')` построить график функции $y_1(t)$. При построении графиков вид функций, пределы, шаг изменения аргумента и параметр S выбрать из табл. 12.

Таблица 12

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 5

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
1	$y_1(t)=\sqrt{t}\cdot\cos(2\cdot t)\cdot e^{-2\cdot t},\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Черный, треугольник вершиной вверх, сплошная
2	$y_1(t)=\sqrt{t}\cdot\sin(10\cdot t)\cdot e^{-t},\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Черный, шестиконечная звезда, пунктирная
3	$y_1(t)=\sqrt{t}\cdot\sin(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Красный, ромб, штриховая
4	$y_1(t)=\left(1-e^{-2t}\right)\cdot\sin(t),\quad t\in[0,2\pi],\quad \Delta t=0,2$	Черный, треугольник вершиной вверх, сплошная
5	$y_1(t)=t^2\cdot\sin(t)+\dfrac{\sin(6\cdot t)}{3},\ t\in[0,4\pi],\ \Delta t=0,08$	Красный, кружок, штриховая
6	$y_1(t)=\sin(t)-\dfrac{\sin(3\cdot t)}{3},\quad t\in[0,4\pi],\quad \Delta t=0,08$	Зелёный, точка, сплошная
7	$y_1(t)=\sqrt[3]{t^2},\quad t\in[0,10],\quad \Delta t=0,6$	Голубой, треугольник вершиной вверх, сплошная
8	$y_1(t)=t^{-2},\quad t\in[1,4],\quad \Delta t=0,06$	Красный, треугольник вершиной вправо, пунктирная
9	$y_1(t)=\arcsin(t),\quad t\in[0,1],\quad \Delta t=0,08$	Голубой, треугольник вершиной вправо, штриховая
10	$y_1(t)=\arccos(t),\quad t\in[0,1],\quad \Delta t=0,06$	Зеленый, треугольник вершиной влево, сплошная
11	$y_1(t)=\mathrm{arctg}(t),\quad t\in[0,5],\quad \Delta t=0,4$	Красный, ромб, пунктирная
12	$y_1(t)=\mathrm{arcctg}(t),\quad t\in[1,5],\quad \Delta t=0,4$	Красный, квадрат, штрих-пунктирная
13	$y_1(t)=\arcsin(\lvert t\rvert),\quad t\in[-1,1],\quad \Delta t=0,08$	Красный, пятиконечная звезда, штриховая

Окончание табл. 12

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
14	$y_1(t) = \arccos(\lvert t \rvert), \quad t \in [-1,1], \quad \Delta t = 0{,}08$	Синий, квадрат, штриховая
15	$y_1(t) = 1 - t^2, \quad t \in [0,5], \quad \Delta t = 0{,}35$	Красный, пятиконечная звезда, штрих-пунктирная

6. С помощью оператора `errorbar(t,y,E,'S')` построить график функции $y_1(t)$. При построении графиков вид функций, пределы, шаг изменения аргумента и параметр **S** выбрать из табл. 13.

Таблица 13

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 6

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
1	$y_1(t) = 10 \cdot e^{-t} \cdot (\cos(5 \cdot t) + \sin(2 \cdot t)),$ $t \in [0,5], \ \Delta t = 0{,}3$	Черный, треугольник вершиной вверх, сплошная
2	$y_1(t) = e^{-t} \cdot \cos(5 \cdot t), \quad t \in [0,5], \quad \Delta t = 0{,}1$	Черный, шестиконечная звезда, пунктирная
3	$y_1(t) = \sqrt{t} - \sin(2 \cdot t), \quad t \in [0,60], \quad \Delta t = 0{,}4$	Красный, ромб, штриховая
4	$y_1(t) = 1 - 10 \cdot e^{t}, \quad t \in [0,5], \quad \Delta t = 0{,}3$	Черный, треугольник вершиной вверх, сплошная
5	$y_1(t) = t^2 - \sin(t), \quad t \in [0,2\pi], \quad \Delta t = 0{,}3$	Красный, кружок, штриховая
6	$y_1(t) = 2 \cdot \sin(t), \quad t \in [0,2\pi], \quad \Delta t = 0{,}4$	Зеленый, точка, сплошная
7	$y_1(t) = \sqrt[3]{t^2}, \quad t \in [0,10], \quad \Delta t = 0{,}6$	Голубой, треугольник вершиной вверх, сплошная
8	$y_1(t) = t^{-2}, \quad t \in [1,3], \quad \Delta t = 0{,}06$	Красный, треугольник вершиной вправо, пунктирная
9	$y_1(t) = 3 \cdot \arcsin(t), \quad t \in [0,1], \quad \Delta t = 0{,}06$	Голубой, треугольник вершиной вправо, штриховая

Окончание табл. 13

Вариант	Функции	Параметры (цвет линии, тип маркера, тип линии)
10	$y_1(t) = 4 \cdot \arccos(t), \quad t \in [0,1], \quad \Delta t = 0,06$	Зеленый, треугольник вершиной влево, сплошная
11	$y_1(t) = 4 \cdot \mathrm{arctg}(t), \quad t \in [0,5], \quad \Delta t = 0,3$	Красный, ромб, пунктирная
12	$y_1(t) = 3 \cdot \mathrm{arctg}(t), \quad t \in [0,5], \quad \Delta t = 0,4$	Красный, квадрат, штрих-пунтктирная
13	$y_1(t) = 2 \cdot \arcsin(\lvert t \rvert), \quad t \in [-1,1], \quad \Delta t = 0,1$	Красный, пятиконечная звезда, штриховая
14	$y_1(t) = 3 \cdot \arccos(\lvert t \rvert), \quad t \in [-1,1], \quad \Delta t = 0,12$	Синий, квадрат, штриховая
15	$y_1(t) = 1 - t^2, \quad t \in [0,5], \quad \Delta t = 0,33$	Красный, пятиконечная звезда, штрих-пунктирная

7. С помощью операторов `loglog(…)`, `semilogx(…)`, `semilogy(…)` построить график функции $y(t)$. При построении графиков вид функций, пределы и шаг изменения аргумента выбрать из табл. 14.

Таблица 14

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 7

№	Функция	Оператор вывода
1	$y = 30 \cdot \mathrm{arctg}^3(t), \quad t \in [1,1000], \quad \Delta t = 1$	Loglog
2	$y = (1-t) \cdot \left\lvert \sin(0,05 \cdot t)^{\cos(0,01 \cdot t)} \right\rvert, \quad t \in [1,1000], \quad \Delta t = 1$	Semilogx
3	$y = \ln\left(t^2\right) - \mathrm{tg}^2(0,1 \cdot t), \quad t \in [1,1000], \quad \Delta t = 1$	Semilogy
4	$y = \sin^4\left(\sqrt{t}\right), \quad t \in [1,1000], \quad \Delta t = 1$	Loglog
5	$y = 0,01 \cdot \mathrm{arctg}^2(\cos(0,03 \cdot t)), \quad t \in [1,1000], \quad \Delta t = 1$	Semilogx
6	$y = \mathrm{tg}\left(0,05 \cdot \sin^2(0,1 \cdot t)\right), \quad t \in [1,300], \quad \Delta t = 1$	Semilogy
7	$y = \ln(t) - \cos^2\left(\sqrt{t}\right), \quad t \in [1,1000], \quad \Delta t = 1$	Loglog

№	Функция	Оператор вывода
8	$y = \left\|\arccos^3\left(0{,}01 \cdot t\right)\right\|, \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Semilogx
9	$y = \ln(t) - \sin^2\left(0{,}05 \cdot t\right), \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Semilogy
10	$y = \mathrm{tg}^2(t) \cdot \ln(t) - \sin^2\left(0{,}05 \cdot t\right), \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Loglog
11	$y = \left(1000 - t\right) \cdot \cos\left(\sin\left(0{,}05 \cdot t\right)\right) \cdot \sin^2\left(0{,}05 \cdot t\right),$ $t \in \left[1{,}1000\right], \ \Delta t = 1$	Semilogx
12	$y = \ln\left(\cos^2\left(15 \cdot t\right)\right) - \sqrt{t}, \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Semilogy
13	$y = \left(3 - 2 \cdot \sin\left(0{,}1 \cdot t\right)\right) \cdot \left\|\sin\left(0{,}05 \cdot t\right)\right\|, \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Loglog
14	$y = \ln(t) \cdot \left\|\sin\left(0{,}05 \cdot t\right)\right\|, \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Semilogx
15	$y = \left(1 - t\right) \cdot \sin\left(0{,}05 \cdot t\right)^{\sin\left(0{,}05 \cdot t\right)}, \quad t \in \left[1{,}1000\right], \quad \Delta t = 1$	Semilogy

8. Построить график параметрической функции $y(x)$ с применением оператора `plot(...)`. Данные выбрать из табл. 15.

Таблица 15

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 8

Вариант	Функция
1	$\begin{cases} x(t) = \sin(t), \\ y(t) = \cos^3(t), \end{cases} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]. \quad \Delta t = 0{,}1.$
2	$\begin{cases} x(t) = \sin(t), \\ y(t) = 10 \cdot \cos(t), \end{cases} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]. \quad \Delta t = 0{,}1.$
3	$\begin{cases} x(t) = \cos(10 \cdot t), \\ y(t) = e^{-t} \cdot \sin(10 \cdot t), \end{cases} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]. \quad \Delta t = 0{,}1.$
4	$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cdot \cos(10 \cdot t), \\ y(t) = e^{-t} \cdot \sin(10 \cdot t), \end{cases} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]. \quad \Delta t = 0{,}03.$
5	$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cdot \sin(10 \cdot t), \\ y(t) = e^{-t} \cdot \cos(10 \cdot t), \end{cases} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]. \quad \Delta t = 0{,}03.$

Окончание табл. 15

Вариант	Функция
6	$\begin{cases} x(t)=\sqrt{t}\cdot\cos^2(5\cdot t), \\ y(t)=(1-t)\cdot\sin(t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,03.$
7	$\begin{cases} x(t)=t\cdot\cos(t), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\sin(10\cdot t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,03.$
8	$\begin{cases} x(t)=\mathrm{arctg}(t)\cdot\cos(10\cdot t), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\sin(5\cdot t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,03.$
9	$\begin{cases} x(t)=\cos^2(t)\cdot\cos(10\cdot t), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\sin(5\cdot t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,03.$
10	$\begin{cases} x(t)=\cos^2(t)\cdot\cos(10\cdot t), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\sin(10\cdot t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,03.$
11	$\begin{cases} x(t)=\cos^2(t)\cdot\cos(\cos(10\cdot t)), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\sin(\sin(10\cdot t)), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,01.$
12	$\begin{cases} x(t)=\sin^2(t)\cdot\cos(\cos(10\cdot t)), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\sin(\sin(10\cdot t)), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,01.$
13	$\begin{cases} x(t)=t^2\cdot\cos(\cos(5\cdot t)), \\ y(t)=t^2\cdot\sin(\sin(5\cdot t)), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,01.$
14	$\begin{cases} x(t)=t^2\cdot\cos(\cos(5\cdot t)), \\ y(t)=t^2\cdot\cos(\sin(5\cdot t)), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,01.$
15	$\begin{cases} x(t)=t^2\cdot\cos(\cos(5\cdot t)), \\ y(t)=\sin^2(t)\cdot\cos(t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]. \quad \Delta t=0,01.$

9. С помощью операторов `mesh(...)` и `surfc(...)` построить каркасную поверхность, заданную функцией `z(x,y)`, и соответствующий этой поверхности контурный график. С помощью команды `colorbar` установить соответствие между цветом и значениями функции на каркасной поверхности. Программу вычисления значений функции `z` выбрать в соответствии со своим вариантом. При построении графика использовать координатную сетку. Данные выбрать из табл. 16.

Таблица 16

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 9

№		№	
1	u=[0:0.05:pi]'; v=[0:0.05:pi]; X=cos(u)*cos(v); Y=cos(u)*sin((v)); Z=sin(u)*ones(size(v));	9	u=[0:0.025*pi:2*pi]'; v=[0:0.025*pi:2*pi]; X=airy(u)*cos(v); Y=cos(u)*sin(v); Z=sin(u)*ones(size(v));

2	[x,y]=meshgrid(-5:0.2:5);
	a=20; b=20; c=1;
	A=a^2; B=b^2;
	z=c*sqrt((x.^2)/A+(y.^2)/B+1);
		10	u=[0:0.025*pi:2*pi]';
			v=[0:0.025*pi:2*pi];
			X=erf(u)*sin(v);
			Y=erf(u)*cos(v);
			Z=sin(u)*ones(size(v));

3	[x,y]=meshgrid(-2*pi:0.1*pi:2*pi);
	a=2; b=2; c=1;
	A=a^2; B=b^2;
	z=c*sqrt((x.^2)/A+(y.^2)/B);
		11	u=[-2*pi:0.025*pi:2*pi]';
			v=[-2*pi:0.025*pi:2*pi];
			X=0.3*u*cos(v);
			Y=0.3*u*sin(v);
			Z=0.6*u*ones(size(v));

4	[x,y]=meshgrid(-5:0.2:5); z=sqrt(100-x.^2-y.^2);	12	u=[0:0.025*pi:2*pi]'; v=[0:0.025*pi:2*pi]; X=cos(u)*cos(v); Y=sin(u)*cos(v); Z=u*ones(size(v));
5	u=[-pi:0.02*pi:pi]'; v=[-pi:0.02*pi:pi]; X=(sin(u).^2)*(sin(v.^2)); Y=0.9*(cos(u).^2)*(sin(v).^2); Z=0.8*sin(u)*ones(size(v));	13	u=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]; R=1; X=R*sin(u)*sin(v); Y=R*cos(u)*cos(v); Z=R*sin(u)*ones(size(v));

6	[x,y]=meshgrid(-5:0.2:5);
	a=20; b=20; c=1;
	A=a^2; B=b^2;
	z=0.5*((x.^2)/A-(y.^2)/B+1);
		14	u=[0:0.025*pi:2*pi]';
			v=[0:0.025*pi:2*pi];
			X=(u.^2)*sin(v);
			Y=gamma(u)*cos(v);
			Z=(u.^3)*ones(size(v));

7	u=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]; X=(u.^2)*cos(v); Y=u*sin(v); Z=u*ones(size(v));	15	u=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]; X=(u.^3)*cos(v); Y=u*sin(v); Z=(u.^2)*ones(size(v));
8	u=[-2*pi:0.1*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.2*pi:2*pi]; X=cos(u*v); Y=sin(u*v); Z=u*ones(size(v));		

10. С помощью оператора `surfl(...)` и команды `shading interp` построить плавно залитую цветом поверхность, заданную функцией $z(x, y)$. Цветовую палитру окраски поверхности выбрать с помощью

оператора colormap(…), добившись наиболее реалистичного вида поверхности. С применением команды colorbar установить соответствие между цветом и значениями функции на каркасной поверхности. Программу вычисления значений функции $z(x, y)$. выбрать в соответствии со своим вариантом. Данные выбрать из табл. 17.

Таблица 17

Варианты для лабораторной работы 5. Задание 10

№		№	
1	u=[0:0.05:pi]'; v=[0:0.05:pi]; X=cos(u)*cos(v); Y=cos(u)*sin((v)); Z=sin(u)*ones(size(v));	9	u=[0:0.025*pi:2*pi]'; v=[0:0.025*pi:2*pi]; X=airy(u)*cos(v); Y=cos(u)*sin(v); Z=sin(u)*ones(size(v));

2	[x,y]=meshgrid(-5:0.2:5);
	a=20; b=20; c=1;
	A=a^2; B=b^2;
	z=c*sqrt((x.^2)/A+(y.^2)/B+1);
		10	u=[0:0.025*pi:2*pi]';
			v=[0:0.025*pi:2*pi];
			X=erf(u)*sin(v); Y=erf(u)*cos(v);
			Z=sin(u)*ones(size(v));

3	[x,y]=meshgrid(-2*pi:0.1*pi:2*pi);
	a=2; b=2; c=1;
	A=a^2; B=b^2;
	z=c*sqrt((x.^2)/A+(y.^2)/B);
		11	u=[-2*pi:0.025*pi:2*pi]';
			v=[-2*pi:0.025*pi:2*pi];
			X=0.3*u*cos(v); Y=0.3*u*sin(v);
			Z=0.6*u*ones(size(v));

4	[x,y]=meshgrid(-5:0.2:5); z=sqrt(100-x.^2-y.^2);	12	u=[0:0.025*pi:2*pi]'; v=[0:0.025*pi:2*pi]; X=cos(u)*cos(v); Y=sin(u)*cos(v); Z=u*ones(size(v));
5	u=[-pi:0.02*pi:pi]'; v=[-pi:0.02*pi:pi]; X=(sin(u).^2)*(sin(v.^2)); Y=0.9*(cos(u).^2)*(sin(v).^2); Z=0.8*sin(u)*ones(size(v));	13	u=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]; R=1; X=R*sin(u)*sin(v); Y=R*cos(u)*cos(v); Z=R*sin(u)*ones(size(v));

6	[x,y]=meshgrid(-5:0.2:5);
	a=20; b=20; c=1;
	A=a^2; B=b^2;
	z=0.5*((x.^2)/A-(y.^2)/B+1);
		14	u=[0:0.025*pi:2*pi]';
			v=[0:0.025*pi:2*pi];
			X=(u.^2)*sin(v);
			Y=gamma(u)*cos(v);
			Z=(u.^3)*ones(size(v));

7	u=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]; X=(u.^2)*cos(v); Y=u*sin(v); Z=u*ones(size(v));	15	u=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.05*pi:2*pi]; X=(u.^3)*cos(v); Y=u*sin(v); Z=(u.^2)*ones(size(v)).
8	u=[-2*pi:0.1*pi:2*pi]'; v=[-2*pi:0.2*pi:2*pi]; X=cos(u*v); Y=sin(u*v); Z=u*ones(size(v));		

3.2. Лабораторная работа 6. Нахождение корня нелинейного уравнения, минимума функции одного аргумента и локального минимума функции двух переменных

Задача о минимизации функции является частным случаем задачи оптимизации в условиях отсутствия дополнительных ограничений. Задачу о максимизации функции легко решить, поменяв знак у исходной функции на «минус».

Вначале рассмотрим, как с помощью функций MATLAB можно отыскивать корни решения нелинейных уравнений при достаточно общих ограничениях. Затем найдем минимум функции одного переменного. Третий шаг – нахождение локального, в общем случае, минимума функции двух аргументов.

Задания.

1. Построить график и найти корень нелинейного уравнения. Проверить результат. Данные выбрать из табл. 18.

Таблица 18

2. Варианты для лабораторной работы 6. Задание 1

№ варианта	Уравнение $f(x) = 0$	Отрезок $[a,b]$
1	$x\,\mathrm{arctg}(x)-1=0$	$\left[1,\sqrt{3}\right]$
2	$\exp(x-2)-\ln(x+2)=0$	[2, 3]
3	$x^3-9x^2+5x-6=0$	[8, 9]
4	$\exp(x)-\dfrac{1}{x}-1=0$	[0.5, 1]
5	$\mathrm{arctg}(2x)-\dfrac{1}{1+x}=0$	[0, 1]
6	$\exp(x)-\ln(x)-20=0$	[3, 3.2]
7	$\sqrt{x}-\mathrm{tg}(x)\cdot(1-x)=0$	[0, 1]
8	$\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}=0$	[0, 0.2]
9	$x^4+2x^3-x-1=0$	[0.8, 1]
10	$x^3-\exp(4x)-5.5=0$	[2.6, 3]

№ варианта	Уравнение $f(x) = 0$	Отрезок $[a,b]$
11	$x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$	[1, 1.5]
12	$\sqrt[3]{5 - x} - x = 0$	[1, 2]
13		[0, 1]
14	$x^2 - \cos(x) = 0$	[0, 1]
15	$\ln(x) - \mathrm{arctg}(x) = 0$	[3, 4]
16	$x^2 arctg(x) - 1 = 0$	[1, 1.2]
17	$x^2 + \ln(x) - 4 = 0$	[1, 2]
18	$x - \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x} = 0$	[0, 1]
19	$x^2 - \exp(x) - 2 = 0$	[–0.2, –0.1]
20	$x^2 - \ln(x + 1) = 0$	[0.1, 0.9]
21	$x^5 - x - 2 = 0$	[1, 1.4]
22	$x - 2 - \sqrt[4]{x} = 0$	[3, 4]
23	$x - \mathrm{tg}(x) = 0$	[0, 1.5]
24	$x + \ln(x) - 0.5 = 0$	[0.1, 1]
25	$\ln(x) + \sqrt{x} = 0$	[0.1, 1]
26	$\sqrt{x} - \cos\sqrt{x} = 0$	[0.4, 0.6]
27	$x^2 - \ln(1 + x^2) - 9.75 = 0$	[3, 4]
28	$x + \sqrt[3]{x} - 6.09 = 0$	[4, 5]
29	$x^3 - \sqrt{x} - 9.5 = 0$	[2, 3]
30	$\arccos(2x) - x^2 - 0.35 = 0$	[0, 0.48]

1. Найти и вывести на печать координату и минимальное значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Данные выбрать из табл. 19.

Таблица 19

Варианты для лабораторной работы 6. Задание 2

№ варианта	Функция $f(x)$	Отрезок $[a,b]$
1	$\dfrac{x}{\ln x}$	[1.2, 4]
2	$x-2\sin(x)$	[0, π/2]
3	$\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	[–2, 2]
4	$3x^4-4x^3+12x^2+1$	[–2, 2]
5	$x-2\ln(x)$	[1, 3]
6	$\exp(x)\cdot\cos(x)$	[π, 3·π/2]
7	$\dfrac{1-x+x^3}{1+x-x^2}$	[0, 1]
8	$-\sqrt{2x-x^2}$	[0, 2]
9	$(x-2)^5(2x+1)^4$	[–0.5, 1.5]
10	x^x	[0.1, 1]
11	$\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$	[–0.5, 0.5]
12	$x\sqrt{1-x^2}$	[–1, 0]
13	$\left(\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^3+1$	[–0.5, 0.5]
14	$-\dfrac{x}{x^3+2}$	[0.5, 1.5]
15	$\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$	[1.6, 2.2]
16	$\dfrac{\sqrt{\lvert x^2-3\rvert}}{x}$	[1, 2]

Окончание табл. 19

№ варианта	Функция $f(x)$	Отрезок $[a,b]$
17	$x^2\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$	[1.1, 1.6]
18	$\dfrac{1}{\sin(x)+\cos(x)}$	[0, π/3]
19	$\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg}(x)$	[0.5, 1.2]
20	$x\cdot\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	[–1.5, –0.5]
21	$\dfrac{\exp\left(-x^2\right)}{x}$	[–2, –1]
22	$-\lvert x\rvert^3\cdot\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	[–2, –1]
23	$x^2\ln(x)$	[0.1, 1]
24	$x\ln^2\lvert x\rvert$	[–0.05, 0.2]
25	$x\operatorname{arctg}(x)$	[–0.5, 0.5]
26	$\sin(x)+\cos(x)$	[π, 3·π/2]
27	$-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$	[1, 2]
28	$x^2\ln^2 x$	[0.1, 0.5]
29	$\dfrac{\sin(x)}{x}$	[π, 2·π]
30	$-x^{\frac{1}{x}}$	[2, 3]

1. Найти и вывести на печать координаты и минимальное значение функции двух переменных. Поиск начать с точки $M_0(x_0,y_0)$. Данные выбрать из табл. 20.

Таблица 20

Варианты для лабораторной работы 6. Задание 3

№ варианта	Функция $f(x,y)$	Начальная точка $M_0(x_0,y_0)$
1	$\left(2x^2-y-3\right)^2+x^2+2x+2$	(1, 1)
2	$\left(xy+2\right)^2+y^2+2y+4$	(2, 2)
3	$\left(x^2y^2-y+2\right)^2+x^2+1$	(2, 2)
4	$\left(3x^2+2y^2-1\right)^2+\left(xy-3\right)^2$	(2, 2)
5	$\left(2x^2-7y^2-2\right)^2+\left(x^2+y^2-20\right)^2+3$	(2, 2)
6	$\left(x^2+y^2-2x-3\right)^2+\left(x^2+y^2-2y-3\right)^2$	(2, 2)
7	$\left(x^2-6x+y^2+8\right)^2+x^2y^2+1$	(2, 2)
8	$\left(x^2-y-2\right)^2+\left(x-y+3\right)^2$	(2, 2)
9	$\ln\left(1+x^2+y^2\right)^2+\left(x-y-1\right)^2$	(2, 2)
10	$\left(x^2+y^2-1\right)^2+\left(x^2-6x+y^2+8\right)^2$	(2, 2)
11	x^3+y^3-3xy	(0.5, 0.5)
12	$x^2+xy+y^2-3x-6y$	(0.5, 3.5)
13	$-xy^2\left(1-x-y\right)$	(0, 0)
14	$3x^2-x^3+3y^2+4y$	(0.1, –1.0)
15	$xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$	(4, 1)

Окончание табл. 20

№ варианта	Функция $f(x,y)$	Начальная точка $M_0(x_0,y_0)$
16	$x^2+y^2-2\ln(x)-18\ln(y)$	(0.5, 2.5)
17	$x^3+3xy^2-15x-12y$	(1.5, 0.5)
18	$2x^3-xy^2+5x^2+y^2$	(0.5, 0.5)
19	$\left(2x^2+y^2\right)\cdot\exp\left(-x^2-y^2\right)$	(0.3, 0.3)
20	$-2+\sqrt[3]{x^2+y^2}$	(0.25, 0.25)
21	$(x-1)^2+(y-2)^2-1$	(0.5, 1.5)
22	$\sin\left(x^2+y^2-0.5\right)$	(0.5, 0.5)
23	$x^2-xy+y^2-2x-2y+1$	(–1.5, 0.5)
24	$xy(x+y-4)$	(1, 1)
25	$x^3y^2(x+y-5)$	(2.0, 1.5)
26	$x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$	(0.2, 0.3)
27	$-\left(\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)\right)$	(π/4, π/4)
28	$-\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$	(π/4, π/4)
29	$x^3y^3-9xy+1$	(2.5, 2.5)
30	$x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2+1$	(1, –1)

2. Для численного решения поставленных выше задач можно использовать пользовательскую функцию `GOLDS (eps,a,b,n)`, описанную в примере 3 и функцию `QNMCIM` из примера 4, а также 4 встроенные функции MATLAB: `fzero`, `fsolve`, `fminbnd`, `fminsearch`.

3. Описать, какие методы используются для работы этих функций, какие бывают к ним обращения. Информацию о них можно найти и перевести из справки Помощи, имеющейся в MATLAB.

Примерное решение одного из вариантов лабораторной работы, оформленное в виде скрипта MATLAB:

```
subplot(1,3,1)
%
% Пример решения варианта:
%
% Задание  1. Найти корень нелинейного уравнения 10^x-2*x-10=0 на ин-
тервале [1.0:2.0]
x=1:0.001:2;
y= 10.^x+2*x-100;
plot(x,y)
grid on
title('Корень нелинейного уравнения')
X1 = fzero ( ' (10.^x + 2*x - 100) ', [1 2])
X2 = fsolve ( ' (10.^x + 2*x - 100) ', 1 : 2)
10^X1+2*X1-100
% Задание 2. Найти и вывести на печать минимальное значение функции
одного
%            переменного
% f(x) = 24 - 2x /3 + x^2/ 30 на отрезке [5; 20].
x = 5.0 : 0.001 : 20.0 ;
y = 24 - 2* x/3 + x.^2/30 ;
subplot(1,3,2)
plot(x, y) ;
grid on
title('Минимум функции 1-го аргумента')
[x, y] = fminbnd ( ' (24.0 - 2* x/3 + x.^2/30) ', 5.0, 20.0)
% Задание 3. Найти и вывести на печать координаты и значение миниму-
ма функции
%            2-х переменных
%            f(x,y)=(x^2+y^2-3)^2+(x^2+y^2-2x-3)^2+1.
%            если начальная точка поиска имеет координаты M0(1;1);
[X,Y] = meshgrid( [-1:0.1 : 1, 1 :0.1: 3] ) ;
Z = (X.^2 + Y.^2 - 3).^2 + (X.^2 + Y.^2 - 2*X - 3).^2 + 1 ;
subplot(1,3,3)
surf(X,Y,Z)
title('Минимум функции 2-х аргументов')
[xmin, minf] = fminsearch ( @Fxy, [1; 1] )
%
function f = Fxy(x)
f = (x(1)^2+ x(2)^2-3)^2 + (x(1)^2+x(2)^2-2*x(1)-3)^2 + 1;
end
```

```
В результате работы данного скрипта в командном окне появляется следующее
X1 =
    1.9824
Equation solved.
fsolve completed because the vector of function values is near zero
as measured by the default value of the function tolerance, and
```

```
the problem appears regular as measured by the gradient.
<stopping criteria details>
X2 =
    1.9824    1.9824
ans =
   2.8422e-14
x =
   10.0000
y =
   20.6667
xmin =
   -0.0000
    1.7320
minf =
    1.0000
```

В окне Figure находятся графики всех трех функций (рис. 8).

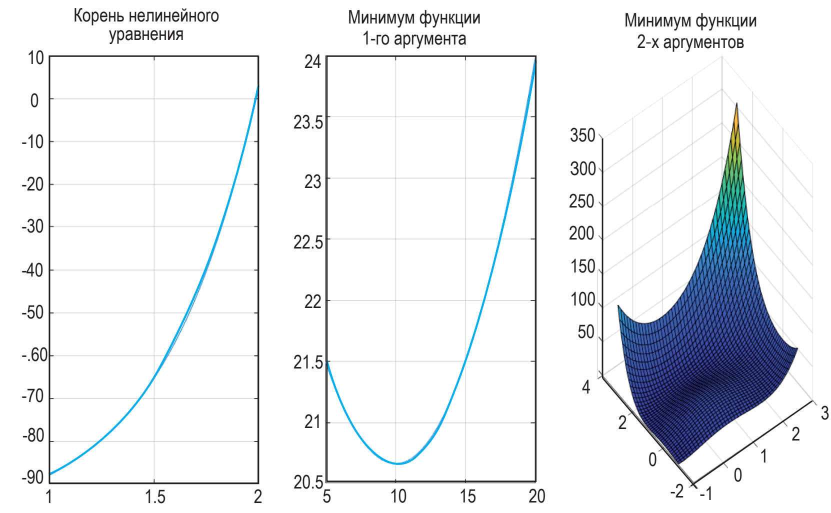


Рис. 8. Вывод графики в результате работы скрипта MATLAB

3.3. Лабораторная работа 7. Аппроксимация результатов измерения методом наименьших квадратов

Задание

1. По измеренным данным (табл. 21) построить их аппроксимацию полиномами 1-й, 2-й и 3-й степени, используя функции `polyfit()` и `polyval()` MATLAB.

2. Построить на одном графике исходные данные и графики аппроксимирующих полиномов.

3. Вывести на печать коэффициенты аппроксимирующих полиномов.

4. Изучить и кратко описать метод наименьших квадратов на примере полинома 1-й степени.

5. Изучить и описать, что представляют собой функции `polyfit()` и `polyval()` MATLAB и способы обращения к ним.

6. Сделать выводы о пригодности метода наименьших квадратов и о выборе степени аппроксимирующего полинома.

Значения $x_i = i \cdot 0{,}1,\ i = 1, 2, \ldots, 20$ одинаковы для всех вариантов.

Таблица 21

Варианты для лабораторной работы по аппроксимации

Варианты				
1	2	3	4	5
Значения $y_i = y(x_i)$				
2,05	2,09	2,02	1,99	2,23
1,94	2,05	1,98	2,03	2,29
1,92	2,19	1,67	2,20	2,27
1,87	2,18	1,65	2,39	2,62
1,77	2,17	1,57	2,19	2,72
1,88	2,27	1,42	2,61	2,82
1,71	2,58	1,37	2,35	3,13
1,60	2,73	1,07	2,60	3,49
1,56	2,82	0,85	2,55	3,82
1,40	3,04	0,48	2,49	3,95
1,50	3,03	0,35	2,50	4,22
1,26	3,45	–0,30	2,52	4,48
0,99	3,62	–0,61	2,44	5,06
0,97	3,85	–1,20	2,35	5,50
0,91	4,19	–1,39	2,26	5,68
0,71	4,45	–1,76	2,19	6,19
0,43	4,89	–2,28	2,24	6,42
0,54	5,06	–2,81	2,34	7,04
0,19	5,63	–3,57	1,96	7,57
0,01	5,91	–4,06	2,19	8,10

Варианты				
6	7	8	9	10
Значения $y_i = y(x_i)$				
2,07	2,18	–0,10	–0,16	2,09
2,17	2,43	–0,21	0,01	2,31
2,21	2,40	0,01	0,10	2,72
2,31	2,43	0,05	0,16	2,77
2,10	2,65	–0,13	0,05	2,78
2,09	2,75	–0,23	0,35	2,97
2,12	2,67	–0,21	0,19	3,00
1,63	2,66	–0,43	0,50	3,51
1,78	2,63	–0,57	0,74	3,43
1,52	2,75	–0,44	1,03	3,58
1,16	2,41	–0,44	1,06	3,58
1,07	2,24	–0,83	1,49	3,54
0,85	2,12	–0,78	1,79	3,82
0,56	1,74	–0,81	2,03	3,90
0,10	1,57	–1,06	2,22	3,77
–0,25	1,17	–1,41	2,50	3,81
–0,65	0,96	–1,40	2,88	4,00
–1,06	0,63	–1,70	3,21	3,97
–1,66	0,25	–1,96	3,63	4,08
–2,01	–0,01	–1,91	3,90	4,08

Варианты				
11	12	13	14	15
Значения $y_i = y(x_i)$				
2,15	0,10	0,17	0,80	0,04
2,41	–0,01	0,07	0,29	0,47
2.59	–0,19	0,17	0,52	0,78
2,84	–0,11	0,05	0,77	1,01
3,28	–0,31	0,12	0,93	1,19
3,46	–0,78	0,00	1,20	1,60
4,02	–0,64	0,01	1,20	1,93
4,11	–0,85	–0,05	1,35	2,22
4,61	–1,18	–0,21	1,39	2,50
5,03	–1,39	–0,50	1,48	3,01
5,34	–1,79	–0,50	1,52	3,22
5,86	–2,02	–0,86	1,71	3,71
6,33	–2,48	–1,24	1,72	4,23
6,81	–2,93	–1,47	1,87	4,78
7,21	–3,26	–1,79	1,86	5,27
7,67	–3,91	–2,25	1,89	5,75
8,23	–4,41	–2,55	2,04	6,16
8,68	–4,91	–3,18	1,73	6,76
9,35	–5,30	–3,60	2,04	7,30
9,93	–6,00	–3,93	2,03	8,00

В качестве примера рассмотрим следующие данные:

$x_i = i \cdot 0{,}1,\ i = 1{,}2{,}\ldots{,}20$ – массив из 20 равномерно распределенных чисел от 0,1 до 2,0.

$$y_i = -1{,}92;\ -1{,}60;\ -1{,}57;\ -1{,}41;\ -1{,}36;\ -0{,}97;\ -0{,}59;\ -0{,}71;\ -0{,}15;\ 0{,}01;$$

$$0{,}22;\ 0{,}63;\ 1{,}07;\ 1{,}42;\ 1{,}68;\ 2{,}49;\ 2{,}57;\ 3{,}09;\ 3{,}40;\ 4{,}00.$$

Будем аппроксимировать эти измеренные данные метом наименьших квадратов полиномами 1-й, 2-й и 3-й степени, т. е. линейной, квадратичной и кубической функциями.

Для этого будем использовать функции `polyfit()` и `polyval()` MATLAB.

Приведем текст скрипта-реализации с внутренними комментариями:

```
% Предварительная очистка окон и рабочего пространства
clc, clear, clf
% ввод исходных данных
x =0.1:0.1:2;
y = [-1.92,-1.60,-1.57,-1.41,-1.36,-0.97,-0.59,-0.71,-0.15,0.01,...
   0.22,0.63,1.07,1.42,1.68,2.49,2.57,3.09,3.40,4.00];
% Строим график экспериментальных данных
plot(x, y,'rs','LineWidth',2)
% Закрепляем сетку
grid on
% Удерживаем следующие графики в том же рисунке
hold on
% Находим коэффициенты полинома 1-й степени (линейной функции)
q1 = polyfit(x, y, 1)
% Строим график этого полинома синим цветом, толщиной 2
plot(x, polyval(q1,x),'b-','LineWidth',2)
% Находим коэффициенты полинома 2-й степени (квадратичной функции)
q2 = polyfit(x,y,2)
% Строим график этого полинома зеленым цветом, толщиной 2
plot(x,polyval(q2,x),'g-','LineWidth',2)
% Находим коэффициенты полинома 3-й степени (кубической параболы)
q3 = polyfit(x,y,3)
% Строим график этого полинома желтым цветом, толщиной 2
plot(x,polyval(q3,x),'y-','LineWidth',2)
% Строим обозначения указанных графиков, расположенных
% вне графиков функции в направлении СВ
legend('Измерения>,'полином 1-й степени>,>полином 2-й степени',...
   'полином 3-й степени','Location','NorthEastOutside')
```

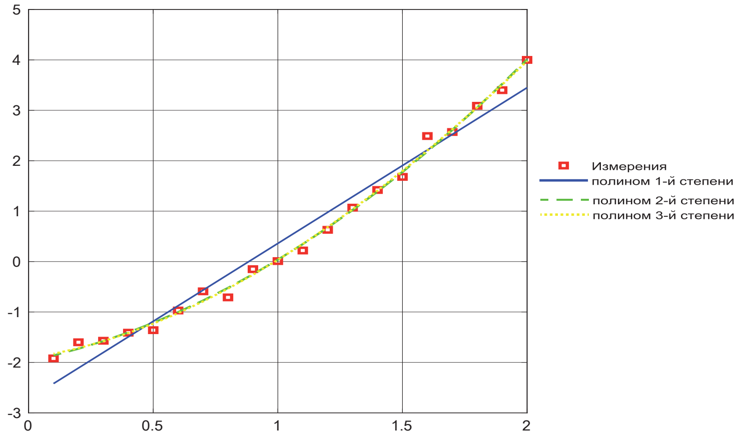


Рис. 9. Аппроксимация измеренных данных методом наименьших квадратов

В командном окне имеем следующие результаты:

```
q1 =
    3.0890   -2.7285
q2 =
    0.9793    1.0326   -1.9744
q3 =
   -0.1119    1.3319    0.7291   -1.9150
```

На печать выводятся коэффициенты полиномов по степеням 1, 2 и 3 соответственно, аппроксимирующих данные измерений.

Получаем график, на котором расположены исходные данные и графики аппроксимирующих полиномов (рис. 9).

Видно, что полином 2-й степени (квадратичная функция) хорошо аппроксимирует исходные данные. Впрочем, и линейная функция удовлетворительно аппроксимирует данные.

При тарировке волномеров, например, в большинстве случаев, для дальнейших измерений пользуются полученной линейной функцией.

3.4. Лабораторная работа 8. Построение уравнения линейной регрессии по результатам измерений

Пусть требуется исследовать зависимость $y=y(x)$ причем величины y и x измеряются в одних и тех же экспериментах. Без ограничения общности можно считать, что величина x измеряется точно, в то время как измерение величины y содержит случайные погрешности. Это означает, что погрешность измерения величины x пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью измерения величины y.

Таким образом, результаты эксперимента можно рассматривать как выборочные значения случайной величины $\eta(x)$, зависящей от x как от параметра. Регрессией называют зависимость условного математического ожидания этой величины от x т. е. $y(x) \equiv \mathbf{M}(\eta \mid x)$. Задача регрессионного анализа состоит в восстановлении функциональной зависимости $y(x)$ по результатам измерений

$$(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Аппроксимируем искомую зависимость $y(x)$ функцией $\mathbf{f}(\mathbf{x}, a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Это означает, что результаты измерений можно представить в виде

$$y_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_1, a_2, \ldots, a_k) + \xi_i,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$. – неизвестные параметры регрессии; ξ_i – случайные величины, характеризующие погрешности эксперимента.

Обычно предполагается, что ξ_i – это независимые нормально распределенные случайные величины с $\mathbf{M}(\xi_i) = 0$ и одинаковыми дисперсиями $\mathbf{M}\left(\xi_i^2\right) = \sigma^2$.

Параметры $a_1, a_2, \ldots, a_k$ следует выбрать такими, чтобы отклонение предложенной функциональной зависимости от результатов эксперимента было минимальным.

Часто в качестве меры отклонения принимают величину

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x, a_1, a_2, \ldots, a_k) - y_i \right)^2$$

и, следовательно, параметры $a_1, a_2, \ldots, a_k$. определяются методом наименьших квадратов.

На практике регрессионный анализ состоит из трёх этапов. На первом этапе выдвигают гипотезу о виде функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, на втором – по имеющимся данным находят оценки неизвестных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$. На третьем этапе проверяют согласие выдвинутой гипотезы с результатами измерений.

Рассмотрим простейший случай, а именно линейную регрессию. Пусть выдвинута гипотеза о том, что функция f имеет вид

$$f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 \cdot x.$$

Найдём оценки параметров a_0 и a_1 методом наименьших квадратов. Для этого минимизируем функцию

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} \left((a_0 + a_1 \cdot x) - y_i \right)^2 .$$

Приравнивая нулю производные $\frac{\partial \Phi}{\partial a_0}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$, получаем

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \quad a_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}.$$

Проверяя согласие построенной линии регрессии с результатами эксперимента, можно руководствоваться следующими соображениями. Идея любой регрессии состоит в том, чтобы часть изменений измеряемой величины связать с изменением внешних переменных (в рассматриваемом случае только одна внешняя переменная x). Не предполагая, что y зависит от x, можно было бы за меру разброса результатов эксперимента принять величину

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2 , \text{ где } \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Если прямая регрессии построена, то за меру разброса естественно принять сумму квадратов отклонений от линии регрессии, т. е. величину

$$\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 \cdot x_1 \right)^2 .$$

Если $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$, то это значит, что аппроксимирующая функция выбрана неудачно, т. е. подходящую функцию регрессии следует искать не среди прямых, а, например, среди парабол или кривых другого вида.

Задание.

1. Составить m-функцию, содержащую:

1.1. Ввод из файла (текстовый файл с именем `data.txt`) и печать числового массива, содержащего n измеренных значений (табл. 22)

$$(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

1.2. Вычисление коэффициентов линейной регрессии a_0 и a_1;

1.3. Вычисление и печать меры разброса ε_1 и меры отклонения от регрессии ε_2.

2. Построить график, содержащий исходные экспериментальные данные и кривую линейной регрессии.

3. Сравнить величины ε_1 и ε_2 и сделать выводы о пригодности или непригодности линейной регрессии в качестве аппроксимирующей функции.

Значения $x_i = i \cdot 0{,}1,\ i = 1, 2, \ldots, 20$ одинаковы для всех вариантов

Таблица 22

Варианты для лабораторной работы по аппроксимации

Варианты				
1	2	3	4	5
Значения $y_i = y(x_i)$				
4,993	6,030	5,850	6,310	5,650
4,820	6,072	5,619	6,308	5,431
4,754	6,297	5,569	6,546	5,250
4,829	6,428	5,426	6,855	5,000
4,617	6,425	5,237	7,073	4,790
4,596	6,473	5,025	7,770	4,569
4,683	6,592	4,988	7,225	4,296
4,463	6,815	5,037	7,739	4,065
4,413	6,786	4,586	7,995	3,837
4,522	6,925	4,575	8,963	3,519
4,346	7,116	4,445	8,247	3,281
4,314	7,053	4,353	8,472	2,926
4,357	7,224	3,933	8,627	2,801
4,321	7,439	3,899	8,936	2,546
4,414	7,302	3,793	9,082	2,232
3,986	7,426	3,473	9,976	2,016
4,084	7,797	3,551	9,363	1,794
4,236	7,871	3,171	9,679	1,663
4,090	7,929	3,330	9,846	1,375
4,057	8,060	3,044	10,013	1,217

Окончание табл. 22

Варианты				
6	7	8	9	10
Значения $y_i = y(x_i)$				
6,323	3,8812	4,0823	3,9023	4,0302
6,523	3,8604	4,1842	3,8310	4,2339
6,646	3,8401	4,3803	3,6028	4,4903
7,256	3,9123	4,4614	3,4733	4,7195
7,487	3,7139	4,4420	3,3103	5,0010
7,827	3,4930	4,5522	3,0502	5,2605
8,133	3,5108	4,6612	3,1415	5,3633
8,402	3,6833	4,8901	2,8318	5,8711
8,581	3,7408	4,8632	2,6611	5,6703
9,014	3,4712	5,0410	2,5302	5,8911
9,049	3,6032	5,2214	2,3503	6,1601
9,571	3,5122	4,9010	2,4910	6,6505
9,891	3,4810	5,3907	2,1901	6,3902
10,073	3,3043	5,5633	1,8232	6,8104
10,406	3,2342	5,4214	1,6973	7,0810
10,821	3,2600	5,8521	1,5403	7,2410
11,151	3,1411	5,9903	1,2223	7,6133
11,232	3,1717	5,8541	1,1793	7,6436
11,655	2,9603	6,0113	1,0433	8,0393
11,952	2,8193	5,9739	1,1203	7,9243

Варианты				
11	12	13	14	15
Значения $y_i = y(x_i)$				
3,8220	4,2710	1,9210	2,1401	1,5636
3,4432	4,4523	1,9123	2,1923	1,8440
3,1692	4,8416	2,0932	2,3203	1,5110
2,9581	5,1413	1,7317	2,5932	1,5233
2,7335	5,5503	1,8803	2,5603	1,0903
2,4010	5,8500	1,8113	2,6401	1,0411
2,2732	6,1893	1,7173	2,6633	1,0561
1,8536	6,3820	1,6603	2,8405	0,9122
1,8830	6,7210	1,4738	3,0403	0,6950
1,3230	7,0402	1,4434	2,9405	0,5111
1,1824	7,2632	1,2322	3,2303	0,4643
1,1508	7,7023	1,3732	3,2773	0,1422
0,8554	7,7803	1,3020	3,3125	-0,0610
0,4833	8,3312	1,2231	3,1300	-02929
0,1821	8,6203	1,3816	3,4926	-0,2831
-0,0113	8,7825	1,3523	3,5603	-0,2524
-0,1214	9,0602	1,1401	3,6604	-0,5732
-0,6030	9,5642	1,0024	3,7904	-0,5763
-0,6836	9,7108	0,9693	3,9636	-1,0603
0,5436	10,1403	0,9329	4,0810	-1,0122

Пример решения варианта

Составим m-функцию, реализующую задание:

```
function [eps1,eps2,a0,a1] = rlin1
% Функция rlin1 загружает измеренные данные из текстового файла,
% вычисляет линейную регрессию и строит
% график с исходными данными и линией регрессии
% Выводятся меры разброса eps1 и eps2, на основании
% которых делается вывод о пригодности линейной регрессии
% © Максимов В.В. (2022)
load dat_xy.txt
% Можно записать иначе: dat_xy=dlmread('dat_xy.txt')
x = dat_xy(:,1)
y = dat_xy(:,2)
k = size(x);
k(2)=[]
s1 = sum(x.*y);
s2 = sum(x);
s3 = sum(y);
s4 = sum(x.^2);
a0 = (s3*s4-s2*s1)/(k*s4-s2^2)
a1 = (k*s1-s2*s3)/(k*s4-s2^2)
ys = s3/k;
eps1 = sqrt(sum((y-ys).^2))
eps2 = sqrt(sum((y-a0-a1*x).^2))
plot(x,y,'s',x,a0+a1*x);
grid on
xlabel('x'), ylabel('y')
title('Линейная регрессия')
legend('Данные измерений›,'Линия регрессии›)
text(min(x),min(y), ['\epsilon_1 =' num2str(eps1) ])
text(mean(x),mean(y), ['\epsilon_2 =' num2str(eps2) ])
end
```

Данные тестового варианта (x_i, y_i) приведены в таблице.

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
5,998	5,820	5,754	5,828	5,627	5,597	5,693	5,469	5,413	5,526
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
5,344	5,304	5,352	5,301	5,424	4,996	5,080	5,256	5,090	5,053

Подготавливаем в текстовом редакторе файл данных, состоящий из двух столбцов. Размещаем его в той же директории, в которой находится m-функция. Вызываем эту функцию.

Получаем коэффициенты a_0 и a_1 линейной регрессии, которые, в данном случае, оказались равными: a_0 = 5,9191, a_1= –0,4503, меры разброса ε_1 = 1,2348 и ε_2 = 0,4195. Функция строит также график, на котором указаны измеренные данные и линии регрессии.

В тестовом варианте получился следующий график:

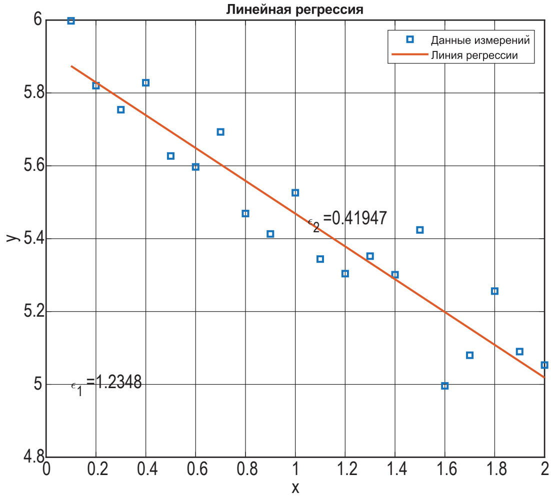


Рис. 10. Соответствие линии регрессии измеренным данным

Сопоставление коэффициентов разброса ε_1 и ε_2 свидетельствует об удовлетворительном соответствии линии регрессии с полученными данными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии мы рассмотрели основы применения системы компьютерной математики MATLAB, созданной Кливом Моулером и Джеком Литтлом, которая, стараниями тысяч разработчиков из многих стран, регулярно пополняется современным инструментарием и всё более эффективно используется для решения множества научно-технических, финансовых и естественно-научных проблем.

В 2014 г. авторами этого научно-технического продукта предложена и активно продвигается новая парадигма моделирования на MATLAB, включающая в себя проектирование на основе моделей (Model-Based Design), влияющая на инженерию управления и ее связи с технологическими тенденциями, которая, в недалёком будущем, кардинально изменит подход к системе образования и характер научных исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Cleve Moler. A Brief History of MATLAB URL:https://www.mathworks.com/company/newsletters/articles/a-brief-history-of-matlab.html?s_tid=srchtitle_history_1 (дата обращения: 30.10.2022).

2. Cleve Moler. Numerical Computing with MATLAB. SIAM, 2004. XI+136 p.

3. *Дьяконов В. П.* Справочник по применению системы PC MatLab. М.: Физматлит, 1993. 112 с.

4. *Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н.* Matlab 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2010, 1104 с.

5. *Дьяконов В. П.* MATLAB 7. Самоучитель. М.: ДМК-Пресс, 2010. 768 с.

6. *Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М.* MATLAB 7: программирование, численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 752 с.

7. *Курбатова Е. А.* Matlab 7. Самоучитель. К.: Диалектика, 2005. 256 с.

8. *Половко А. М., Бутусов П. Н.* MATLAB для студента. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 320 с.

9. *Иглин С. П.* Математические расчеты на базе MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 640 с.

10. *Васильев А. Н.* MATLAB. Самоучитель. Практический подход. СПб.: Наука и Техника, 2015. 448 с.

11. *Плохотников К. Э.* Методы разработки математических моделей и вычислительный эксперимент на базе пакет MATLAB. М.: СОЛОН-Пресс, 2018. 628 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Максимов Василий Васильевич,
Копыльцов Юрий Александрович

ОСНОВЫ MATLAB И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ МЕТРОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка *А. Н. Колешко*

Подписано к печати 28.12.2022. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 4,6. Уч.-изд. л. 4,8.
Тираж 50 экз. Заказ № 670.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А