Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Тема 4.3. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Санкт-Петербург
2006

Составители: В.В.Григорьев-Голубев, И.В.Евграфова. Высшая математика. Тема 4.3. Числовые и функциональные ряды. Рабочая тетрадь. *Редактор: В.Н.Сорокин*. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2006. с. 54, иллюстр.: 1

Задача 1.1

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^5+3n+\sqrt{n}}}.$$

Справочный материал

1-ый признак сравнения

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - два ряда с неотрицательными членами, причем члены первого, начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов второго: $0 \le u_n \le v_n$. Тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2-ой (предельный) признак сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если: 1) существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0 \quad (c \ne 0, c \ne \infty)$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно;

2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$;

3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

При использовании признаков сравнения в качестве эталонных рядов, с которыми проводится сравнение исследуемых, часто используют **геометрический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n \quad - \left[\begin{array}{l}\text{сходится при } 0<\text{q}<1\\ \text{расходится при } q\geq 1\end{array}\right.$$

и **обобщенный гармонический** ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad - \left[\begin{array}{l}\text{сходится при } p>1\\ \text{расходится при } p\leq 1\end{array}\right..$$

Можно использовать также любой ряд, сходимость или расходимость которого доказана.

Решение задачи 1.1

Обозначим $u_n = \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^5+3n+\sqrt{n}}}$ общий член исследуемого ряда. При $n \to \infty$ $u_n = \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^5+3n+\sqrt{n}}} = \dfrac{n\cdot\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{n^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^4}+\dfrac{1}{n^{4.5}}}} \to 0$, т.е. является бесконечно малой функцией. Выделим её главную часть (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ») $u_n = \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^5+3n+\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = v_n$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ расходится как обобщённый гармонический с показателем $p = \dfrac{2}{3} < 1$, то и исходный ряд тоже расходится по 2-ому признаку сравнения.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^5+3n+\sqrt{n}}}$ - расходится.

Задача 1.2

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^3}.$$

Решение задачи 1.2

Рассмотрим n-ый член исследуемого ряда: $u_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^3}$.

Так как $|\sin n| \le 1$, то $u_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^3} \le \dfrac{1}{n^3} = v_n$ при всех n, а обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится (порядок $p=3>1$), то ряд с меньшими членами ($u_n \le v_n$) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^3}$ является сходящимся по 1-ому признаку сравнения.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^3}$ - сходится.

Задача 2

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{(n+3)^n}.$$

Справочный материал

Признак Даламбера

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами $u_n>0$, существует предел отношения последующего члена ряда (u_{n+1}) к предыдущему (u_n): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то

1) при $l<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится (в частности $l=0$);
2) при $l>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится (в частности $l=\infty$);
3) при $l=1$ предельный признак Даламбера не даёт ответа на вопрос, сходится данный ряд или расходится.

Решение задачи 2

Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(n+3)^n}$ воспользуемся признаком Даламбера, который особенно удобен для рядов, члены которых содержат факториал.

$u_n = \frac{4^n n!}{(n+3)^n}$, $u_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+4)^{n+1}}$. Рассмотрим предел их отношения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+3)^n}{4^n n!(n+4)^{n+1}} = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)^n}{(n+4)^n (n+4)} =$$

$$= 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3+1-1}{n+4} \right)^n = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+4} \right)^n = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+4}\right)} =,$$

$$= 4 \cdot e^{\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n+4}\right)} = \frac{4}{e} \text{ так как}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+4} \right) \right) = \left| \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(n \left(-\frac{1}{n+4} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{-n} = -1$$

(см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ»).

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{e} > 1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(n+3)^n}$ - расходится.

Задача 3

Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Справочный материал

Интегральный признак Маклорена-Коши

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ члены которого положительны и не возрастают $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$. Пусть дана функция $f(x)$, которая определена, непрерывна, не возрастает на промежутке $x \in [1;+\infty)$ и

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n, \ldots.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)}$, где $\alpha > 1$, $p \in R$. Положим $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^p(\alpha x)}$ и рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^p(\alpha x)}$, где $a \geq \frac{e}{\alpha}$. Сделаем замену $\ln(\alpha x) = t$. Тогда $\frac{\cancel{\alpha}}{x\cancel{\alpha}}dx = dt$, то есть $dt = \frac{1}{x}dx$, а пределы интегрирования будут выглядеть следующим образом: $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = \ln(\alpha a) \\ x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \end{cases}$. Получим интеграл $\int\limits_{\ln(\alpha a)}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$ (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 7 «ИНТЕГРАЛЫ»).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)}$ можно использовать для сравнения с исследуемым рядом. При этом следует иметь в виду, что при $n \to \infty$: $\ln(\alpha n + c) \sim \ln(\alpha n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$. Это можно доказать используя, например, правило Лопиталя (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ»).

Решение задачи 3

Поскольку n-ый член исследуемого ряда $u_n = \frac{1}{(n+1)\cdot \ln^2(n+1)}$, положим $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot \ln^2(x+1)}$ и рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot\ln^2(x+1)}dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)} = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^A \right) =$$

$$= -\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(1+A)} - \frac{1}{\ln 2} \right) = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$, следовательно,

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot\ln^2(x+1)}dx$ - сходится, а значит сходится и исследуемый ряд.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ - сходится.

Задача 4

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}}.$$

Справочный материал

Признак Лейбница

Если для членов знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot u_n$, где $u_n \geq 0$, выполнены два условия:

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,
- $u_{n+1} < u_n$ начиная с некоторого номера $n > N_0$,

то ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству $0 < S < u_1$.

Определение

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов. Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то исходный ряд называется *условно* (неабсолютно) *сходящимся*.

Теорема *(Связь абсолютной сходимости и сходимости)*

Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, если сходится ряд $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$, составленный из модулей его членов, т.е. из абсолютной сходимости вытекает сходимость исходного ряда.

Решение задачи 4

Так как из абсолютной сходимости вытекает сходимость знакочередующегося ряда, то исследуем вначале ряд, составленный из модулей членов заданного ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Так как n-ый член ряда

$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln^{\frac{1}{3}} n} = v_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^{\frac{1}{3}} n}$ расходится

(см. справочный материал к задаче 3), следовательно, ряд из модулей членов исходного ряда расходится по 2-ому (предельному) признаку сравнения и абсолютной сходимости нет.

Исходный ряд знакочередующийся, поэтому используем признак Лейбница:

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}} = 0$ (выполнено),
- $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+3)}}$, значит $u_{n+1} < u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Таким образом, исследуемый ряд сходится по признаку Лейбница и сходимость условная.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$ - сходится условно.

Задача 5

Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n}, \ \varepsilon = 10^{-3}.$$

Справочный материал

У сходящегося знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n = S$ модуль остатка ряда после n-ого члена $|r_n| = |u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots|$ не превосходит модуля первого отброшенного члена $|r_n| \le u_{n+1}$.

Отсюда погрешность от замены суммы ряда S его n-ой частичной суммой S_n: $|S - S_n| = |r_n| \le u_{n+1}$.

Решение задачи 5

Исследуемый ряд является знакочередующимся. Модуль общего члена $u_n = \dfrac{1}{3^n \cdot n}$. Очевидно, что с ростом n:

1) модули членов ряда убывают: $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{3^2 \cdot 2} > \dfrac{1}{3^3 \cdot 3} > \ldots$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n \cdot n} = 0$.

Таким образом, исследуемый ряд сходится по признаку Лейбница и к его остатку после n-ого члена

$$r_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)} - \frac{1}{3^{n+2}\cdot(n+2)} + \frac{1}{3^{n+3}\cdot(n+3)} - \ldots \right)$$

применима оценка: $|r_n| \le \dfrac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)} = u_{n+1}$, т.е. для вычисления суммы нашего ряда с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$ достаточно выполнения неравенства:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)} \le 0.001 .$$

Отсюда подбором легко получить, что $n \geq 4$. Действительно, $u_4 = \frac{1}{3^5 \cdot 5} = \frac{1}{1215}$. Таким образом, для вычисления суммы исходного ряда с заданной точностью достаточно взять четвёртую частичную сумму:

$$S \approx S_4 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} = -\frac{31}{108}.$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n} \approx -\frac{31}{108}$, $n = 4$.

Задача 6

Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{3^n}.$$

Справочный материал

Теорема Абеля

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ существует такое неотрицательное число $r \geq 0$, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ сходится, и притом абсолютно, при $|x-a| < r \Leftrightarrow x \in (a-r; a+r)$ и расходится при $|x-a| > r \Leftrightarrow x \in (-\infty; a-r) \cup (a+r; +\infty)$. Число r называется радиусом сходимости, а открытый промежуток $(a-r; a+r)$ интервалом сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ

Относительно поведения степенного ряда на границах промежутка сходимости, т.е. при $x = a + r$ и $x = a - r$ общих утверждений высказать нельзя. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-r\right)^n$ могут сходиться или расходиться в зависимости от их конкретного вида.

Поэтому, принят следующий порядок отыскания области сходимости степенного ряда:

1) При помощи признака Даламбера или радикального признака Коши (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ») отыскивают интервал сходимости степенного ряда, решая относительно x неравенства: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}\left(x\right)}{u_n\left(x\right)}\right| < 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n\left(x\right)} < 1$.
2) Исследуют сходимость ряда на концах промежутка сходимости, т.е. при $x = a + r$ и $x = a - r$.

Решение задачи 6

Найдем интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\left(x+1\right)^n}{3^n}$, используя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\left(n+1\right)!\left(x+1\right)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{n!\left(x+1\right)^n}{3^n}}\right| = \frac{\left|x+1\right|}{3}\lim_{n\to\infty}\left(n+1\right) = \left[\begin{array}{l}\infty,\ x\neq -1\\ 0,\ x=-1\end{array}\right. .$$

Так как по признаку Даламбера ряд сходится при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$ (в частности $l = 0$), значит, исходный ряд сходится абсолютно только в точке $x = -1$.

Ответ: $\left\{-1\right\}$.

Задача 7

Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}.$$

Решение задачи 7

Найдем интервал сходимости заданного степенного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-2)^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{2n+3}}}{\dfrac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}5^n\sqrt{2n+1}}{(x-2)^n 5^{n+1}\sqrt{2n+3}}\right|=\frac{|x-2|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}=\frac{|x-2|}{5}$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}\right|$ сходится, если $\frac{|x-2|}{5}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-2|<5 \quad\Leftrightarrow\quad -5<x-2<5 \quad\Leftrightarrow\quad -3<x<7$. Значит, заданный ряд в интервале $-3<x<7$ сходится абсолютно.

При $x=7$ исходный ряд превратится в ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n\sqrt{2n+1}}$, который после упрощений можно записать в виде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (1)$.

Поскольку $u_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}}}=v_n$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}v_n \qquad (2)$$

расходится как обобщённый гармонический с порядком $p=\frac{1}{2}<1$, то по 2-ому признаку сравнения исследуемый ряд расходится при $x=7$.

При $x=-3$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}$. После упрощений его можно записать в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ (3). Ряд из модулей членов ряда (3) это ряд (1), а потому он расходится. Сам же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ знакочередующийся, поэтому можно использовать признак Лейбница.

По признаку Лейбница, так как

1) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,

2) $u_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ $\Rightarrow$ $u_n<u_{n+1}$, $n=1,2,3,\ldots$,

то ряд (3) сходится.

Следовательно, промежуток сходимости степенного ряда $[-3;7)$, причём при $x\in(-3;7)$ - ряд сходится абсолютно, а при $x=-3$ - условно.

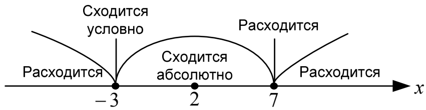

Рис.1

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{5^n\sqrt{2n+1}}$ сходится при $x\in[-3;\,7)$.

Задача 8

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении:

$f(x)=e^{2x}$,

$x_0=0$, $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $n=5$.

Справочный материал

(для примеров 8-11)

Разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена

- $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$. Интервал сходимости $(-\infty;+\infty)$.

- $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$.

  Интервал сходимости $(-\infty;+\infty)$.

- $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$.

  Интервал сходимости $(-\infty;+\infty)$.

- $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+....$

  Промежуток сходимости $(-1;1]$.

- $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-....$ Промежуток сходимости $[-1;1)$.

- $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$

  Промежуток сходимости $[-1;1]$.

- $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n=$

  $=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...$

  (биномиальный ряд). Интервал сходимости $(-1;1)$, $\alpha\in R$, $\alpha\notin N$.

При $\alpha=n\in N$ функция $f(x)=(1+x)^n$ раскладывается по биному Ньютона в многочлен и разложение является верным на всей числовой оси.

- При $\alpha=-1$ – частный случай биномиального ряда – геометрический ряд $(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

Решение задачи 8

Так как $f(x)=e^{2x}$, то воспользуемся разложением

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,\ (-\infty<x<+\infty).$$

В этом разложении заменим x на $2x$, получим

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n!} + \ldots,$$

$$(-\infty < 2x < +\infty) \Rightarrow (-\infty < x < +\infty).$$

$$f(2x_1) = f\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f(-1) = 1 + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \ldots = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \ldots \approx,$$

а так как $n = 5$, то приближённое значение функции необходимо вычислить, взяв первые пять членов разложения

$$\approx 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \approx 0.37.$$

Так как было взято пять слагаемых, то допускаемая при этом вычислении погрешность по абсолютной величине должна быть меньше первого из отброшенных членов ряда. Первый из отброшенных членов по модулю равен $\frac{1}{120}$. Нетрудно видеть, что $\frac{1}{120} \approx 0.0083 < 0.01$. Итак, в результате получаем

$$f\left(x_1 = -\frac{1}{2}\right) \approx 0.37 \pm 0.01,$$

действительно, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{e} \approx 0.368$.

Задача 9.1

Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[4]{e}$, $\varepsilon = 0,001$.

Решение задачи 9.1

Требуется вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции $f(x) = e^x$ в точке $x = \frac{1}{4}$. Представим функцию e^x рядом Маклорена $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ и положим $x = \frac{1}{4}$. Получим

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 1!} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \frac{1}{4^5 \cdot 5!} + \frac{1}{4^6 \cdot 6!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384} + \ldots + \frac{1}{4^n \cdot n!} + r_n ,$$

где r_n - остаток ряда после n-ого члена, оценим его:

$$r_n = \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!} + \frac{1}{4^{n+2}(n+2)!} + \frac{1}{4^{n+3}(n+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{4 \cdot (n+2)} + \frac{1}{4^2 \cdot (n+2) \cdot (n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{4 \cdot (n+2)} + \frac{1}{4^2 \cdot (n+2)^2} + \ldots\right) =$$

Выражение в скобках представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, где первый член $b_1 = 1$, а знаменатель геометрической прогрессии $q = \frac{1}{4 \cdot (n+2)}$, тогда сумма прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4 \cdot (n+2)}} = \frac{4n+8}{4n+7}$.

Итак, $= \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{4n+8}{4n+7}$.

Теперь, методом подбора, найдём значение N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность $\varepsilon = 0,001$:

$$n = 2: \quad \frac{1}{4^3 \cdot 3!} \cdot \frac{8+8}{8+7} = \frac{16}{64 \cdot 6 \cdot 15} = \frac{1}{360} \approx 0.0028 > 0.001;$$

$$n = 3: \quad \frac{1}{4^4 \cdot 4!} \cdot \frac{12+8}{12+7} = \frac{20}{256 \cdot 24 \cdot 19} = \frac{5}{29184} \approx 0.00017 < 0.001.$$

Тогда с точностью ε: $\sqrt[4]{e} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384} \approx 1,284$.

Наименьшее число членов ряда, начиная с $n = 0$, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда, $N = 4$.

Задача 9.2

Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность:

$$\sqrt[3]{130}, \ \varepsilon = 10^{-3}.$$

Решение задачи 9.2

Так как 5^3 является ближайшим к числу 130 кубом целого числа, то целесообразно число 130 представить в виде суммы двух слагаемых $130 = 5^3 + 5$. Тогда

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3 + 5} = 5\sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} = 5(1 + 0.04)^{1/3}.$$

Теперь воспользуемся разложением функции $\left(1+x\right)^{\alpha}$ в ряд Маклорена:

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\ldots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^{n}+\ldots,$$

тогда

$$5\left(1+0.04\right)^{1/3}=$$

$$=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot 0.04+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot 0.04^{2}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\cdot 0.04^{3}+\ldots\right]=$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot 0.2-\frac{1}{9}\cdot 0.008+\frac{5}{81}\cdot 0.00032-\ldots.$$

Начиная со 2–го члена этот ряд является знакочередующимся, поэтому модуль его остатка не превосходит первого отброшенного члена. Вычислим модули членов ряда:

$\left|u_{1}\right|=5>0.001$;

$\left|u_{2}\right|=\frac{1}{3}\cdot 0.2=\frac{1}{15}\approx 0.067>0.001$;

$\left|u_{3}\right|=\frac{1}{9}\cdot 0.008=\frac{1}{1125}\approx 0.00088<0.001$.

Как видим, уже модуль третьего члена меньше 0.001, поэтому его и следующие за ним члены можно отбросить. Итак, $\sqrt[3]{130}\approx 5+0.0667\approx 5.066$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. $N=2$.

Задача 10

Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$\int_{0}^{0,8}\frac{\sin x}{x}dx,\ \varepsilon=0,0001.$$

Решение задачи 10

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд Маклорена. Для этого воспользуемся разложением синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \text{ тогда } \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots .$$

Подставим полученное разложение:

$$\int_0^{0,8} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0,8} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots\right)\Bigg|_8^{0,8} =$$

$$= 0,8 - \frac{0,8^3}{3 \cdot 3!} + \frac{0,8^5}{5 \cdot 5!} - \ldots = 0,8 - \frac{0,512}{18} + \frac{0,32768}{600} - \ldots + R_n ,$$

Ряд знакочередующийся, члены его по абсолютной величине убывают, общий член стремится к нулю, т.е. ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница. Поэтому должно выполняться условие

$$|R_n| < |u_{n+1}| = \frac{0.8^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} < 0.0001 = \varepsilon .$$

Рассмотрим абсолютные величины членов ряда:

$$|u_1| = 0.8 > \varepsilon , \; |u_2| = \frac{0,8^3}{3 \cdot 3!} = \frac{0.512}{18} \approx 0.028 > \varepsilon ,$$

$$|u_3| = \frac{0,8^5}{5 \cdot 5!} = \frac{0.32768}{600} \approx 0.0005 > \varepsilon ,$$

$$|R_3| < |u_4| = \frac{0.8^7}{7 \cdot 7!} = \frac{0.2097152}{35280} \approx 0.0000059 < \varepsilon .$$

Теперь вычислим приближенно сумму ряда, взяв три первых члена, которые обеспечивают заданную точность $\varepsilon = 0.0001$:

$$\int_0^{0,8} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,8 - 0,0287 + 0,00055 \approx 0,7718 .$$

Задача 11

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}.$$

Решение задачи 11

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} = -\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{3!}-\frac{x^6}{5!}+\ldots = -x\cdot\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)$$

Сравним этот ряд с разложениями основных элементарных функций в ряд Маклорена. Ряд записанный в скобках не что иное, как ряд

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

с интервалом сходимости $(-\infty; +\infty)$.

Таким образом, сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} = -x\cdot\sin x$.

Вариант 1

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n\cdot arctg\left(1/n\right)}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot\left(n^2+1\right)}{\left(n+1\right)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{\left(n^3+4\right)\cdot\ln\left(n-1\right)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n n^2}{n^4-n^2+1}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n!\left(2n+1\right)}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{3^n\left(n+1\right)^{3/2}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x+1\right)^n}{\left(n+1\right)\cdot\ln^2\left(n+1\right)}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f\left(x\right)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $x_1=1,2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0.2}\dfrac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!}$.

Вариант 2

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{n^5 + \sqrt{n+1}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера имость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot 2^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\cdot \ln^2(n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε . Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n \cdot n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1 , оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}3$, $n = 5$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\cos 1^\circ$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

Вариант 3

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,n}{\sqrt{n^3+n\cdot\sqrt{n+1}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{(2n)!\cdot\sqrt{n}}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\left(n^2+2\right)\cdot\ln^2\left(3n+1\right)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin{\pi/\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n\cdot 2n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=1/\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $n=3$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sin 10^{\circ}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0.1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$.

Вариант 4

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n \cdot n!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot \ln^2(2n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{(n+1)} \cdot x^n$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{3^n \cdot n \cdot \ln n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $n = 4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\cos 10^{\circ}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$, $\varepsilon = 0.001$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

Вариант 5.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot arctg\,\frac{1}{n^3}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+5)\cdot 3^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(2n^2+3)\cdot \ln^2(2n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot \ln(n+1)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\cdot \ln(n+1)}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = -1$, $x_1 = -1{,}5$, $n = 3$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[3]{e}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$.

Вариант 6.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\left(e^{1/\sqrt{n+1}}-1\right)$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)!}\sin\frac{1}{2^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{9n^3+4}\cdot\ln^2(5n+2)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_1=-\frac{\pi}{4}$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln(1,003)$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$.

Вариант 7.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+3}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{2}{n}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n^2+5)\cdot\ln^2(n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,tg\,\frac{1}{n}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(2n-1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\cdot\sqrt{n^2+4}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=e^{-4x}$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[4]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^1\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Вариант 8.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}} tg \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!\sqrt{n}}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n^3+2)\ln(3n-1)}}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(-2/3\right)^n$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ctg\ 1/\sqrt{n}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{\sqrt{n^3+n+1}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = \sqrt[3]{27-x^3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $n = 1$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $1/\sqrt{e}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$.

Вариант 9.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+\sqrt{n^3+1}} \cdot \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{(n^2-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(n+1) \cdot 3^{2n}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(5^n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{(n+1)^2 2^n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $n = 4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$.

Вариант 10.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+2}}}\sin\frac{1}{n+3}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{arctg\frac{1}{n}}{\sqrt{\ln(n-2)}}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!\cdot n!}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(3^n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3}\cdot(x+2)^n$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $n=3$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $1/\sqrt[4]{e}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0.25}\sqrt{1+x^3}\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n}$.

Вариант 11.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+3\right)^2\sin^2\left(3n\right)}{n^6+1}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{n+1}}{\left(2n\right)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\ln^2\left(n+1\right)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}}tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{3^n n!}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n+1\right)}{n+1}\cdot\left(x+1\right)^n$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f\left(x\right)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sin^2 x$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[4]{17}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0.5}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n-1}}{n}$.

Вариант 12.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\cos^2 n}{n^3+\sqrt{n+2}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 6^n}{n!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\ln^2(n+7)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n(n+1)}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n\cdot\sqrt{n+1}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[4]{15}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n}$.

Вариант 13.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n^4+n^3+1}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{n^2}}}{\ln^2 n}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{\sqrt{n^4+1}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n\cdot\ln n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln 5$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0.1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{n}$.

Вариант 14.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\,arctg\,\frac{n}{n^2+1}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln n}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n\sqrt{n+4}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=e^{-x^2}$, $x_0=0$, $x_1=2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[4]{28}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n}$.

Вариант 15.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n-1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n} \cdot 5^n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $n = 4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[4]{19}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

Вариант 16.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+\ln^2 n}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n+1}{n^2+1}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)^2}{\ln^2(3n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n\ln^2 n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(x+2)^n$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt[3]{125+x}$, $x_0=0$, $x_1=-2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln 6$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0,2}e^{-3x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)!}$.

Вариант 17.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[4]{n^4+n^3+2}}\sin\frac{n+1}{n\sqrt[4]{n+5}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot arctgn^2}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\ln^2(n+2)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\frac{1}{n^2}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n n!}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{1}{n^2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{\sqrt{n^4+1}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sin 36^\circ$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0,2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

Вариант 18.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)tg\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(n^3+1\right)}{n!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\sqrt{\ln(n+2)}}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n)!}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg^2\frac{1}{n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(x-3)^n}{n^2 2^{n+1}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt{16+x^2}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln(1,002)$, $\varepsilon=10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^1 x^2e^{-2x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n}$.

Вариант 19.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+n^2}\sin\frac{n+2}{n^3+1}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{\sqrt{2^n+5}}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{\ln(n-1)}}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{1}{n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n n\ln n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$, $x_0=0$, $x_1=1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[3]{25}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0.2}\frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$.

Вариант 20.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos {}^{1}\!/_{n^2}\right)n^2}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n\,(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\ {}^{1}\!/_{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+2}\,\ln(n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n+1}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\,(n+1)\ln^2(n+1)}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$, $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[5]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^1\sin\frac{x^2}{4}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!}$.

Вариант 21.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2}}arctg\,\frac{n+1}{n^2+2}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n\left(n+1\right)!}{\left(2n\right)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n+2}}}{\ln^2\left(n+2\right)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{n}{7^n}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{\left(n+1\right)^2 2^n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(x+2\right)^n}{2^n\left(n+1\right)\ln n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f\left(x\right)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, $x_1=1/2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $1/\sqrt[8]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{\left(2n\right)!}$.

Вариант 22.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^4+n\sqrt{n+1}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+3}\ln^2(n+3)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε . Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^n}{n^2 2^{n+1}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1 , оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$, $x_0=0$, $x_1=1/2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[6]{e}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0.5}\sin\left(x^2\right)dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n)!}$.

Вариант 23.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{n^2+\ln n}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{n+2}\,\ln^2(n+2)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n tg\frac{1}{n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n\ln^2 n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $n = 4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\cos 18^\circ$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n)!}$.

Вариант 24.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n+\ln n}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n)!}tg\dfrac{1}{3^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n^2+1}\ln^2(n+4)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{6n}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\ln(n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt[3]{27+x^2}$, $x_0=0$, $x_1=2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sin 18^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$.

Вариант 25.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n^5-n+1}}\cos^2 n$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n^2+1}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^2(2n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε . Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{(n+1)^3}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1 , оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=e^{-x^3}$, $x_0=0$, $x_1=2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\sqrt[3]{29}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0,2}\frac{1-\cos x}{2x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^{n+2}$.

Вариант 26.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^5+3}}\sin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{(n+2)\ln^2(n+3)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}x^n$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n2^n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt{16+x^2}$, $x_0=0$, $x_1=-1$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln 7$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{n}$.

Вариант 27.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-2}}\ln\frac{n+4}{n+3}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{tg\left(\frac{4}{n^2}\right)}}{\ln n}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 3^n}{3^n}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\sqrt{n^2+n+2}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt{25+x}$, $x_0=0$, $x_1=-2$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln 3$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$.

Вариант 28.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+\ln n}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n+1}{n^2+1}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)^2}{\ln^2(3n+1)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n\ln^2 n}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{\sqrt{n^4+1}}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\sqrt[3]{125+x}$, $x_0=0$, $x_1=5$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\ln 6$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0,2}e^{-3x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-1)!}$.

Вариант 29.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{tg\,{}^{1}\!/_{n}}}{\sqrt{n^2+arctgn}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(n^3+1\right)}{n!}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{\left(n^4+1\right)\ln\left(n+2\right)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n+2\right)}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n\left(n+2\right)^{3/2}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+2\right)^n}{\left(n+3\right)\ln\left(n+3\right)}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f\left(x\right)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\ln\left(x+2\right)$, $x_0=-1$, $x_1=-1,5$, $n=4$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\cos 20^\circ$, $\varepsilon=10^{-3}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int_0^{0,1}\frac{e^{x^2}-1}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{n!}$.

Вариант 30.

1. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{arctg^2 n}{\sqrt[4]{n^5+\sqrt{n+1}}}$.

2. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n4^n}$.

3. Исследовать сходимость ряда, используя интегральный признак Маклорена-Коши: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+4)\ln^2(n+2)}$.

4. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$.

5. Вычислить приближенно сумму ряда с заданной точностью ε. Указать N - наименьшее число членов ряда, которое обеспечивает заданную точность суммы ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3(n+3)}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)3^{n-1}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)(x+3)^n}{(n-2)^2\cdot 3^n}$.

8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Найти интервал сходимости разложения. С помощью полученного разложения вычислить приближенно значение функции $f(x)$ в точке x_1, оставляя в разложении только n членов. Оценить погрешность, допускаемую при этом вычислении: $f(x)=\ln(x-1)$, $x_0=2$, $x_1=2,5$, $n=5$.

9. Вычислить приближенно с заданной точностью ε значение функции, используя соответствующее разложение этой функции в степенной ряд. Указать N - наименьшее число членов ряда, обеспечивающее заданную точность: $\cos 19^\circ$, $\varepsilon=10^{-4}$.

10. Вычислить приближенно с точностью ε значение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд: $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{e^{4x^3}-1}{x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

11. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-3}}{(n+1)!}$.