1. ТЕМА: НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

2.1 Основные формулы и указания к решению задачи

Напряженность электрического поля выражается формулой:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \tag{2.1}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точечный положительный заряд q, помещенный в данную точку поля.

Сила, действующая на точечный заряд q, помещенный в электрическое поле

$$\vec{F} = q\vec{E}. \tag{2.2}$$

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля:

а) через произвольную поверхность S, помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S E \cos\alpha dS \text{ или } \Phi_E = \int_S E_n dS, \tag{2.3}$$

где α – угол между вектором напряженности $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к элементу поверхности;

dS – площадь элемента поверхности;

E_n – проекция вектора напряженности на нормаль.

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное электрическое поле,

$$\Phi_E = ES\cos\alpha. \tag{2.4}$$

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS, \tag{2.5}$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

Теорема Остроградского – Гаусса. Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды q_1, q_2, …, q_n,

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} q_i, \tag{2.6}$$

где $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности;

n – число зарядов.

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}. \tag{2.7}$$

Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R, несущей заряд q, на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r < R$):

$$E = 0; \tag{2.8}$$

б) на поверхности сферы ($r = R$):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R^2}; \tag{2.9}$$

в) вне сферы ($r > R$):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}. \tag{2.10}$$

Принцип суперпозиции наложения электрических полей: напряженность $\vec{E}$ результирующего поля, созданного двумя (и более) точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n. \tag{2.11}$$

В случае двух электрических полей с напряженностями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ модуль вектора напряженности

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \tag{2.12}$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Напряженность поля, создаваемого бесконечно равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{\varepsilon r}, \tag{2.13}$$

где τ – линейная плотность заряда.

Линейная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по нити, к длине нити (цилиндра):

$$\tau = \frac{\Delta q}{\Delta l}. \qquad (2.14)$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью:

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \qquad (2.15)$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Поверхностная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по поверхности, к площади этой поверхности:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}. \qquad (2.16)$$

Напряженность поля, создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскостями с одинаковой по модулю поверхностной плотностью σ заряда (например, поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (2.17)$$

2.2 Пример решения задачи

Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 = 6 *см* и R_2 = 10 *см* несут соответственно заряды Q_1 = 1 *нКл* и Q_2 = –0,5 *нКл*. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра на расстояниях r_1 = 5 *см*, r_2 = 9 *см*, r_1 = 15 *см*. Построить график $E(r)$.

Решение. Заметим, что точки, в которых требуется найти напряженности электрического поля, лежат в трех областях (рис. 2.1): области I $(r_1 < R_1)$, области II $(R_1 < r_2 < R_2)$, области III $(r_3 > R_2)$.

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем гауссову поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса: $\oint_{S_1} E_n dS = 0$ (т.к. суммарный заряд, находящийся внутри гауссовой поверхности равен нулю). Из соображений симметрии $E_n = E_1 = const.$ Следовательно, $E_1 \oint_{S_1} dS = 0$ и E_1 (напряженность поля в области I) во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю, т.е. $E_1 = 0$.

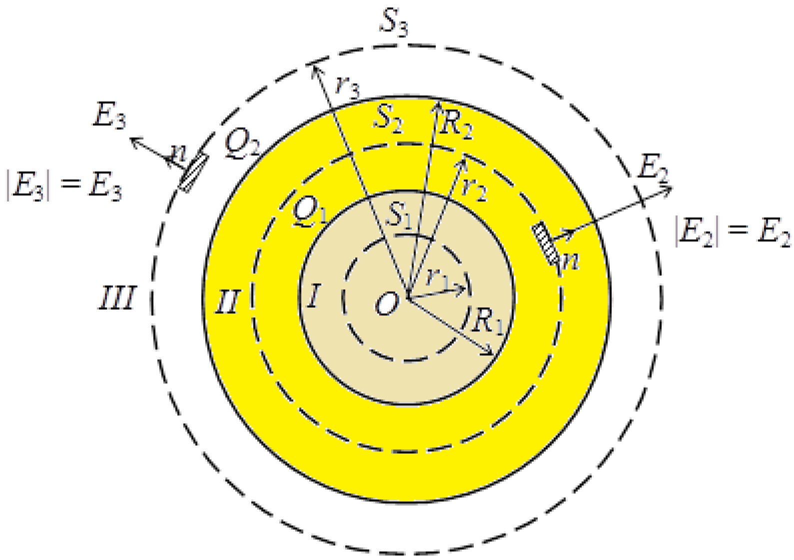


Рис. 2.1. *Построение гауссовых поверхностей для расчета напряженностей электрического поля.*

2. В области *II* гауссову поверхность проведем радиусом r_2. В этом случае (диэлектрическую проницаемость среды будем считать равной единице (вакуум)):

$$\oint_{S_2} E_n dS = Q_1 / \varepsilon_0, \tag{2.18}$$

(т.к. внутри гауссовой поверхности находится только заряд Q_1). Из соображения симметрии $E_n = E_2 = const$, то E можно вынести за знак интеграла:

$$E \oint_{S_2} dS = Q_1 / \varepsilon_0, \text{ или } ES_2 = Q_1/\varepsilon_0. \tag{2.19}$$

Обозначив напряженность E для области *II* через E_2, получим

$$E_2 = Q_1/(\varepsilon_0 S_2), \tag{2.20}$$

где $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площадь гауссовой поверхности. Тогда

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{2.21}$$

3. В области *III* гауссова поверхность проводится радиусом r_3. Обозначим напряженность E области *III* через E_3 и учтем, что в этом случае гауссова поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд будет равен $Q_1 + Q_2$. Тогда

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (2.22)$$

Заметив, что $Q_2 < 0,$ это выражение можно переписать в виде:

$$E_3 = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (2.23)$$

Убедимся в том, что правая часть равенств (2.21) и (2.23) дает единицу напряженности:

$$\frac{[Q]}{[\varepsilon_0]\cdot[r^2]} = \frac{1\,Кл}{1\,Ф/м \cdot 1\,м^2} = \frac{1\,Кл}{1\,Ф \cdot 1\,м} = \left[1\,Ф = 1\frac{Кл}{В}\right] = \frac{1\,Кл}{1\frac{Кл}{В}\cdot 1\,м} = 1\,В/м. \qquad (2.24)$$

Выразим все величины в единицах *СИ* ($Q_1 = 10^{-9}$ *Кл*, $Q_2 = –0{,}5\cdot10^{-9}$ *Кл*, $r_1 = 0{,}09$ *м*, $r_2 = 0{,}15$ *м*, $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot10^9$ *м/Ф*) и произведем вычисления:

$E_2 = 1{,}11$ *кВ/м*; $E_3 = 200$ *кВ/м*.

Построим график $E(r)$. В области I $(r_1 < R_1)$ $E = 0$. В области II $(R_1 < r_2 < R_2)$ $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$. В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_1^2 = 2{,}5$ *кВ/м*. В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_2^2 = 0{,}9$ *кВ/м*. В области III $(r > R_2)$ $E_3(r)$ изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа) $E_3(R_2) = Q_1 - |Q_2|/4\pi\varepsilon_0 R_2^2 = 0{,}45$ *кВ/м*. Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв.

График зависимости E(r) представлен на рис. 2.2.

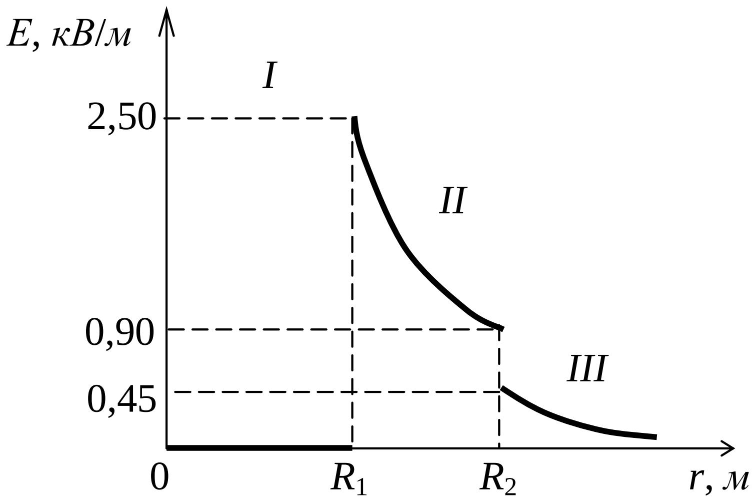


Рис. 2.2. *График зависимости E(r)*

2.3 Задание для самостоятельного выполнения по вариантам

Дано n проводящих фигур (сфер, цилиндров, плоскостей) или шар из изотропного диэлектрика. Каждая фигура несет заряд, характеризующийся объемной ρ_n, поверхностной σ_n или линейной τ_n плотностью заряда. Точки A, B, C находятся на расстояниях r_A, r_B, r_C от центра или оси симметрии фигуры. Взаимодействие осуществляется в вакууме. Данные для решения задач приведены в табл. 2.1 и на рис. 2.3.

Фигуре с номером 1 соответствуют размеры R_1 и величины σ_1, ρ_1, τ_1 и т.д. (рис. 2.3). Если в строке табл. 2.1 с номером вашего варианта какие-то клетки не заполнены, значит для решения вашей задачи эти данные не нужны.

1. Используя теорему Остроградского-Гаусса и принцип суперпозиции электростатических полей, найти зависимость напряженности электрического поля от расстояния $E(r)$ для всех областей (внутри фигуры, между фигурами и вне фигур).

2. Сделать схематический рисунок и показать направление вектора E в каждой области.

3. Вычислить напряженность E в точках A, B, C удаленных от центра симметрии фигур на расстояния r_i.

4. Построить график зависимости $E(r)$ для всех областей.

Данные для выполнения задания. Таблица 2.1

№ вари-анта	Число и форма фигур	Размеры фигур, *м*			Поверхностная плотность заряда, *нКл/м*^{2}			Линейная плотность заряда, *нКл/м*			Объемная плотность заряда, *нКл/м*^{3}	Точечный заряд, *нКл*	Расстояние от центра симметрии фигуры до точек, r_i *м*		
		R_1	R_2	R_3	σ_1	σ_2	σ_3	τ_1	τ_2	τ_3	ρ_1	q	r_1	r_2	r_3
1	Три концентрические сферы	0,1	0,2	0,3	10	-20	5								
2	Три концентрические сферы	0,1	0,2	0,3	-10	20	-10								
3	Два коаксиальных бесконечных цилиндра	0,1	0,2					10	-5						
4	Два коаксиальных бесконечных цилиндра	0,1	0,2		10	-8									
5	Три коаксиальных бесконечных цилиндра	0,1	0,2	0,3				5	-10	-20					
6	Три коаксиальных бесконечных	0,1	0,2	0,3	-10	20	20								

	цилиндра														
7	Две концентрические фигуры - шар окруженный сферой	0,1	0,4			20					100				

Окончание таблицы 2.1

8	Две концентрические фигуры - шар окруженный сферой	0,1	0,3			-30					-100		0,05	0,2	0,4
9	Точечный заряд в центре сферы		0,3			10						10	0,1	0,2	0,4
10	Точечный заряд в центре сферы		0,2			-10						-20	0,1	0,3	0,4
11	Точечный заряд в центре двух концентрических сфер		0,3	0,5		10	-30					-10	0,2	0,4	0,6
12	Точечный заряд в центре двух концентрических сфер		0,2	0,4		-20	10					30	0,1	0,3	0,5
13	Две бесконечные параллельные плоскости	Находятся на расст. 0,02 м друг от друга			20	-30							Слева от I пл.	Между пл.	Справа от II пл.
14	Две бесконечные параллельные плоскости	Находятся на расст. 0,01 м друг от друга			-10	-20							Слева от I пл.	Между пл.	Справа от II пл.
15	Три бесконечные параллельные плоскости	Находятся на расст. 0,02 м друг от друга			-10	20	30						Слева от I пл.	Между I и II пл	Справа от II пл.
16	Три бесконечные параллельные плоскости	Находятся на расст. 0,01 м друг от друга			5	-10	10						Слева от I пл.	Между II и III пл	Справа от III пл.

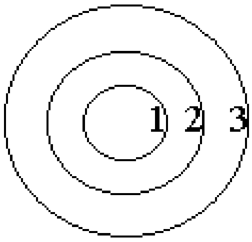


Схема к вариантам 1, 2

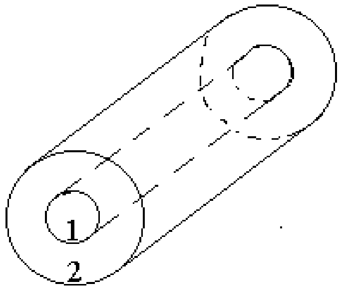


Схема к вариантам 3, 4

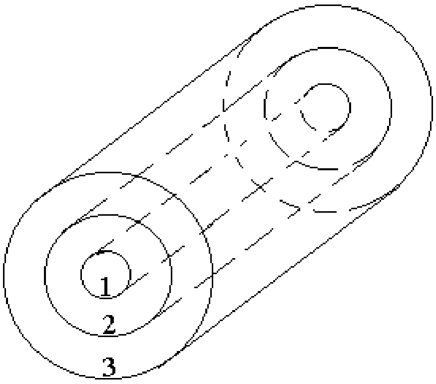


Схема к вариантам 5, 6

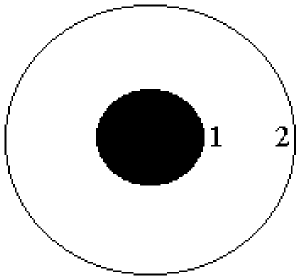


Схема к вариантам 7, 8

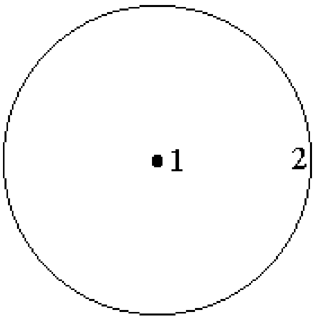


Схема к вариантам 9, 10

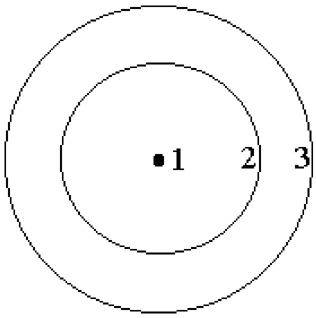


Схема к вариантам 11, 12

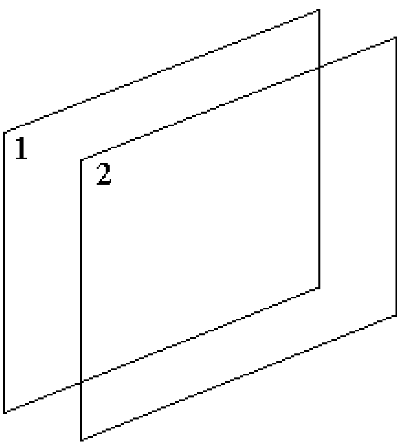


Схема к вариантам 13, 14

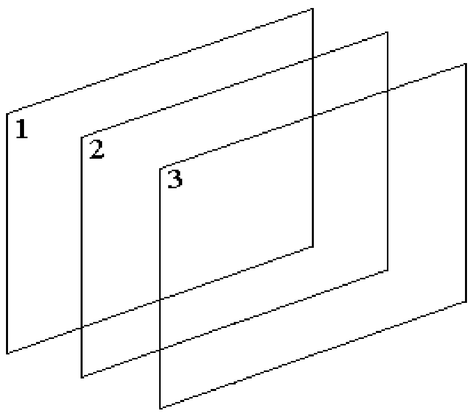


Схема к вариантам 15, 16

Рис. 2.3. *Схемы расположения фигур*

2. ТЕМА: ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3.1 Основные формулы и указания к решению задачи

Расчет разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров (контуры могут иметь общие участки, каждый из контуров может иметь несколько источников тока и т.д.) производится с помощью двух правил Кирхгофа.

Любая точка разветвленной цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током, называется узлом. При этом ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, – отрицательным.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0. \qquad (3.1)$$

Например, для узла показанного на рис. 3.1 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0. \qquad (3.2)$$

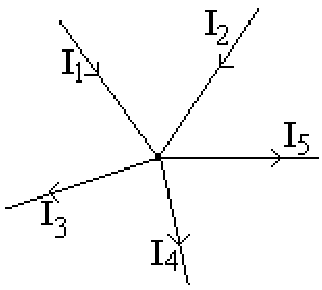


Рис. 3.1. *Схема узла.*

Первое правило вытекает из закона сохранения электрического заряда. В случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае токи не могли бы оставаться постоянными.

Применяя второе правило Кирхгофа необходимо придерживаться следующих принципов. Направление обхода по часовой стрелке примем за положительное, отметив, что выбор этого направления совершенно произволен. Все токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными, не совпадающие с направлением обхода – отрицательными. Источники тока считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э.д.с. E_k, встречающихся в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} E_i. \quad (3.3)$$

При расчете сложных цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток положителен, то его направление было выбрано правильно, если отрицателен – его направление противоположно выбранному.

2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение IR положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и, наоборот, э.д.с., действующие по выбранному направление обхода, считаются положительными, против – отрицательными.

3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и э.д.с. рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, иначе получатся уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

3.2 Пример решения задачи

Источники тока с электродвижущими силами E_1 и E_2 включены в цепь, как показано на рис. 3.2. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_1, R_2 и R_3, если $E_1 = 2{,}1$ *В*; $E_2 = 1{,}9$ *В*; $R_1 = 45$ *Ом*; $R_2 = 10$ *Ом*; $R_3 = 10$ *Ом*. Сопротивлениями источников пренебречь.

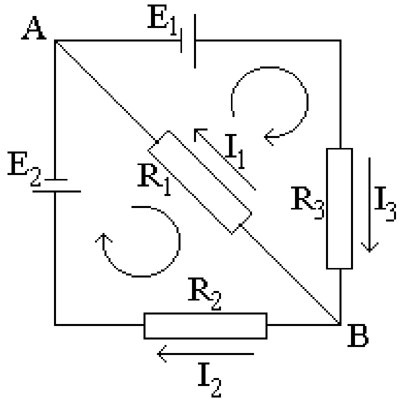


Рис. 3.2. *Схема электрической цепи*

Решение. Силы токов в разветвленной цепи определяются с помощью законов Кирхгофа. Чтобы найти три значения силы токов, следует составить три уравнения. Выберем направления токов, как они показаны на рис. 3.2 и условимся обходить контуры по часовой стрелке. Рассматриваемая задача имеет два узла A и B. Но составлять уравнение по первому закону Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс, ток, отходящий от узла, – со знаком минус.

По первому закону Кирхгофа для узла B имеем:

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0. \tag{3.4}$$

Недостающие два уравнения получим по второму закону Кирхгофа. Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, также меньше числа контуров. Чтобы найти необходимое число независимых уравнений, следует придерживаться правила: выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующее правило знаков:

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае произведение IR входит в уравнение со знаком минус;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

По второму правилу Кирхгофа имеет соответственно для контуров AR_1BR_2A и AR_3BR_1A:

$$I_2R_2 - I_1R_1 = -E_2, \tag{3.5}$$

$$I_3R_3 + I_1R_1 = E_1. \tag{3.6}$$

Подставив в уравнения значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0 \\ 10I_2 - 45I_1 = -1{,}9\,. \\ 10I_3 + 45I_1 = 2{,}1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Для решения системы удобно воспользоваться методом определителей (детерминантов). С этой целью перепишем уравнения еще раз в следующем виде:

$$\begin{array}{ccccccc} -I_1 & - & I_2 & + & I_3 & = & 0 \\ -45I_1 & + & 10I_2 & + & 0 & = & -1{,}9. \\ 45I_1 & + & 0 & + & 10I_3 & = & 2{,}1 \end{array} \tag{3.8}$$

Искомые значения токов найдем из выражений

$$I_1 = \Delta_1/\Delta;\ \ I_2 = \Delta_2/\Delta;\ \ I_3 = \Delta_3/\Delta, \tag{3.9}$$

где Δ – определитель системы уравнений, Δ_1, Δ_2, Δ_3 – определители, полученные заменой соответствующих столбцов определителя Δ столбцами, составленными из свободных членов трех вышеприведенных уравнений.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -45 & 10 & 0 \\ 45 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -1000; \tag{3.10}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1{,}9 & 10 & 0 \\ 2{,}1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -40; \tag{3.11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -45 & -1{,}9 & 0 \\ 45 & 2{,}1 & 10 \end{vmatrix} = 10; \tag{3.12}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -45 & 10 & -1{,}9 \\ 45 & 0 & 2{,}1 \end{vmatrix} = -30. \tag{3.13}$$

Отсюда получаем: $I_1 = 0{,}04\ A$, $I_2 = -0{,}01\ A$, $I_3 = 0{,}03\ A$.

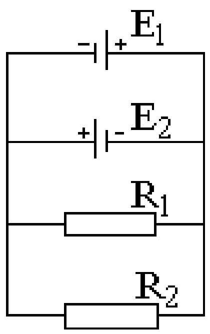
Знак минус у значения силы тока I_2 свидетельствует о том, что при произвольном выборе направлений токов, указанных на рисунке, направление тока I_2 было указано противоположно истинному. На самом деле ток I_2 течет от узла *A* к узлу *B*.

3.3 Задание для самостоятельного выполнения по вариантам

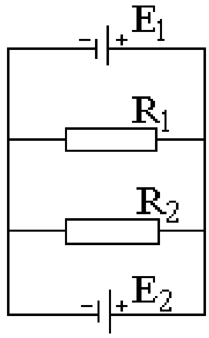
N источников токов с э.д.с. E_n, имеющие внутренние сопротивления r_n и реостаты R_k соединены как показано на рис. 3.3 (см. свой вариант). Вычислить силы токов I_k, текущих через реостаты. Данные приведены в табл. 3.1.

Значения величин. Таблица 3.1

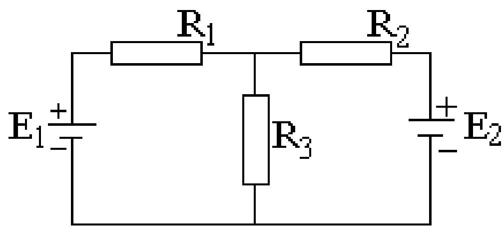
№ варианта	E_1, *В*	E_2, *В*	E_3, *В*	r_1, *Ом*	r_2, *Ом*	r_3, *Ом*	R_1, *Ом*	R_2, *Ом*	R_3, *Ом*
1	1	2		2	2		10	20	
2	2	3		1	1		10	10	
3	1	1		1	1		5	5	10
4	2	2		2	1		20	20	
5	3	3	2	1	1	1	20	30	10
6	2	2	1	2	1	2	20	20	
7	3	2		1	2		10	15	20
8	2	3		1	1		20	30	20
9	2	2		1	1		20	10	10
10	3	1		2	1		20	20	20
11	1	2		1	2		20	30	30
12	2	2	1	1	1	1	50	40	40
13	3	3		2	1		10	10	30
14	2	1	1	1	2	1	20	20	20
15	2	2		1	2		40	20	20
16	2	3		1	1		20	30	20



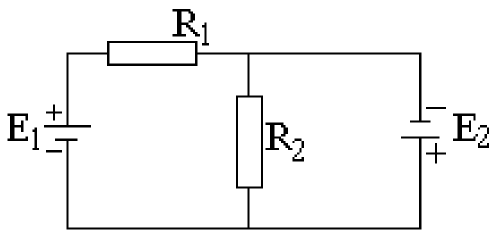
вариант 1



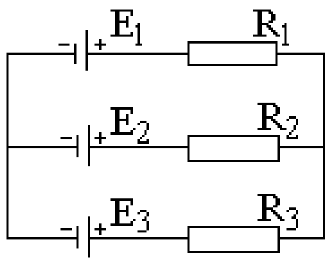
вариант 2



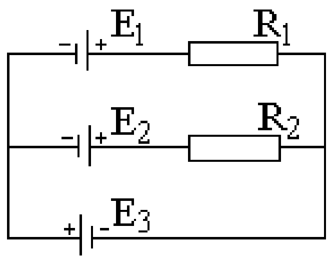
вариант 3



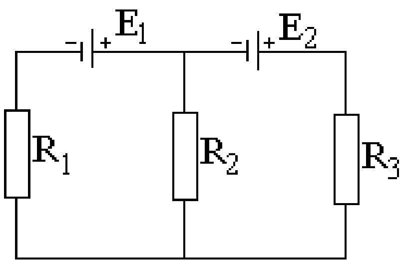
вариант 4



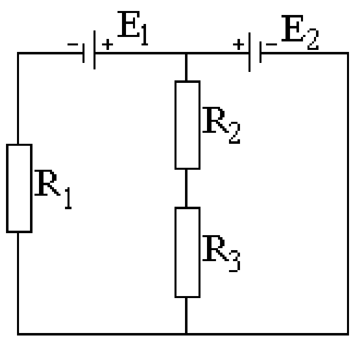
вариант 5



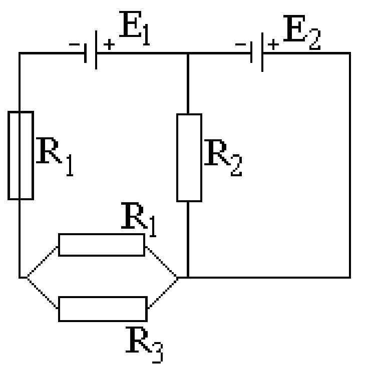
вариант 6



вариант 7

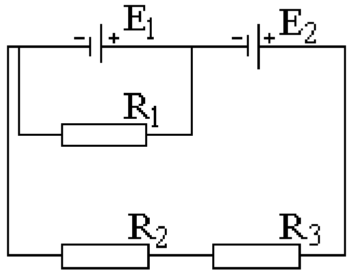


вариант 8

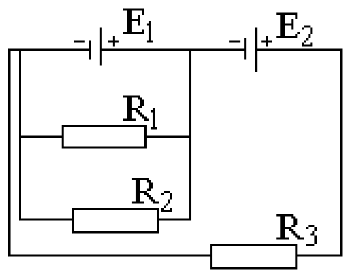


вариант 9

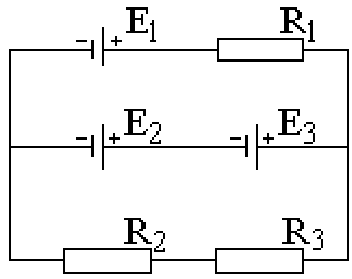
Рис. 3.3. *Схемы электрических цепей*



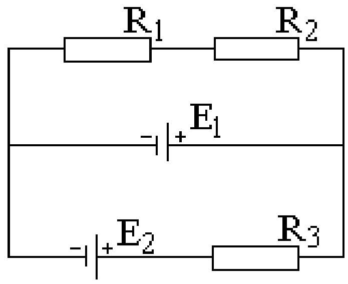
вариант 10



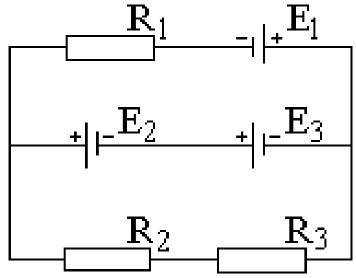
вариант 11



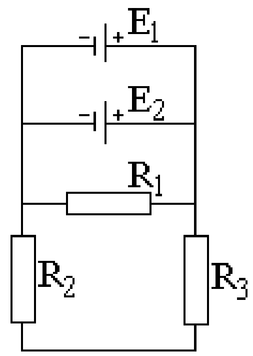
вариант 12



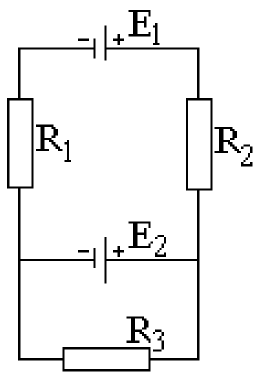
вариант 13



вариант 14



вариант 15



вариант 16

Продолжение рис. 3.3. *Схемы электрических цепей*

4. ТЕМА: МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

4.1 Основные формулы и указания к решению задачи

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля определяется следующим выражением:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \tag{4.1}$$

где μ – магнитная проницаемость изотропной среды;

μ_0 – магнитная постоянная.

В вакууме μ = 1, и тогда выражение (4.1) примет вид:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{4.2}$$

Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right]\frac{I}{r^3} \text{ или } d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha}{r^2}dl, \tag{4.3}$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом провода длиной dl с током I;

$\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция;

α – угол между радиусом-вектором и направлением тока в элементе провода.

Магнитная индукция в центре кругового тока определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}, \tag{4.4}$$

где R – радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}, \tag{4.5}$$

где h – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля прямого тока определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}, \tag{4.6}$$

где r_0 – расстояние от оси провода до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током (рис. 4.1) определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \tag{4.7}$$

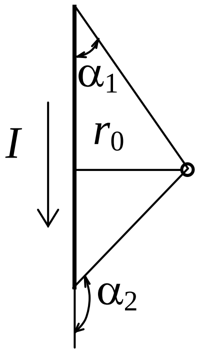


Рис. 4.1. *Отрезок провода с током*

Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ обозначено точкой – это значит, что $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция – $\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 = \cos\alpha$, тогда

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\alpha. \tag{4.8}$$

Магнитная индукция поля соленоида определяется по формуле:

$$B = \mu\mu_0 n I, \tag{4.9}$$

где n – отношение числа витков соленоида к его длине.

4.2 Пример решения задачи

Бесконечно длинный провод изогнут так, как это изображено на рис. 4.2а. Радиус R дуги окружности равен 10 *см*. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого в точке O током $I = 80$ *А*, текущим по этому проводу.

Решение. Магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей: $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$. В нашем случае провод можно разбить на три части (рис. 4.2б): два прямолинейных провода (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиуса R. Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3, \tag{4.10}$$

где $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ – магнитные индукции в точке O, создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

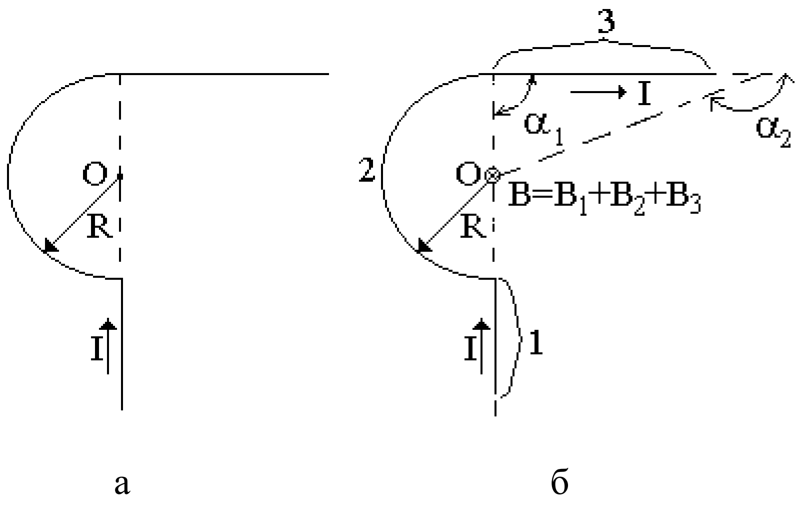


Рис. 4.2. *Проводник с током*

Так как точка O лежит на оси провода 1, то $B_1 = 0$ и тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3. \tag{4.11}$$

Учитывая, что векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости чертежа от нас, то геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим:

$$B = B_2 + B_3. \tag{4.12}$$

Магнитную индукцию B_2 найдем, воспользовавшись выражением для магнитной индукции в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \tag{4.13}$$

В нашем случае магнитное поле в точке O создается лишь половиной такого кругового тока, поэтому

$$B_2 = \frac{1}{2} B = \frac{\mu_0 I}{4R}. \tag{4.14}$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, воспользовавшись соотношением:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \tag{4.15}$$

В нашем случае $r_0 = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ ($\cos\alpha_1 = 0$), $\alpha_2 \to \pi$ ($\cos\alpha_2 = -1$). Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \tag{4.16}$$

Используя найденные выражения для B_2 и B_3, получим

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{ или } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 1). \qquad (4.17)$$

Выполним проверку единиц измерения величин.

$$\frac{[\mu_0][I]}{[R]} = \frac{1\frac{Гн}{м}\cdot 1А}{1м} = \frac{1Гн\cdot 1А}{1м^2} = \left[1Гн = 1\frac{кг\cdot м^2}{А^2\cdot с^2}\right] = \frac{1\frac{кг\cdot м^2}{А^2\cdot с^2}\cdot 1А}{1м^2} = \frac{1кг}{1А\cdot 1с^2} = 1Тл. \qquad (4.18)$$

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 80}{4\pi\cdot 0{,}1}(\pi + 1) = 3{,}31\cdot 10^{-4}\ Тл.$$

4.3 Задание для самостоятельного выполнения по вариантам

Бесконечно длинный тонкий проводник с током I = 100 *А* изогнут так, как показано на рис. 4.3. Радиус изгиба R = 10 *см*. Определить в точке O магнитную индукцию поля B, создаваемого этим током. Направление тока показано на рисунке стрелкой.

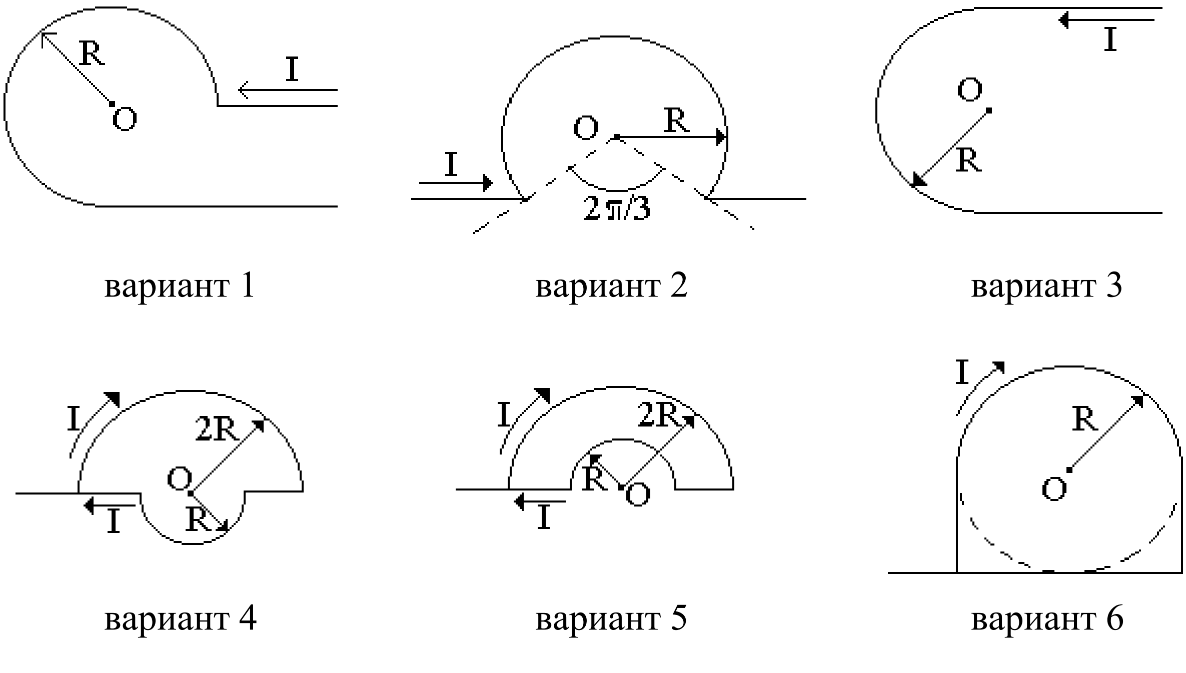
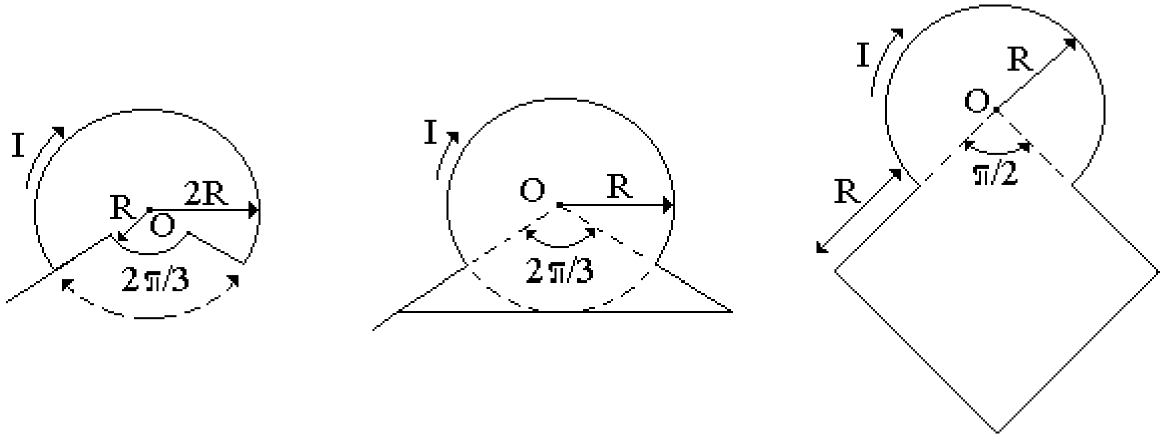
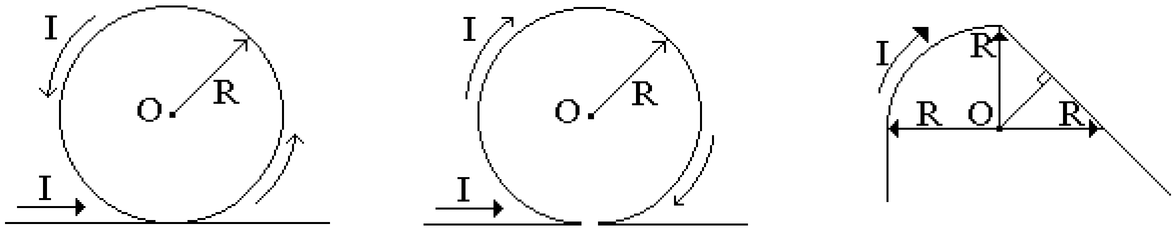


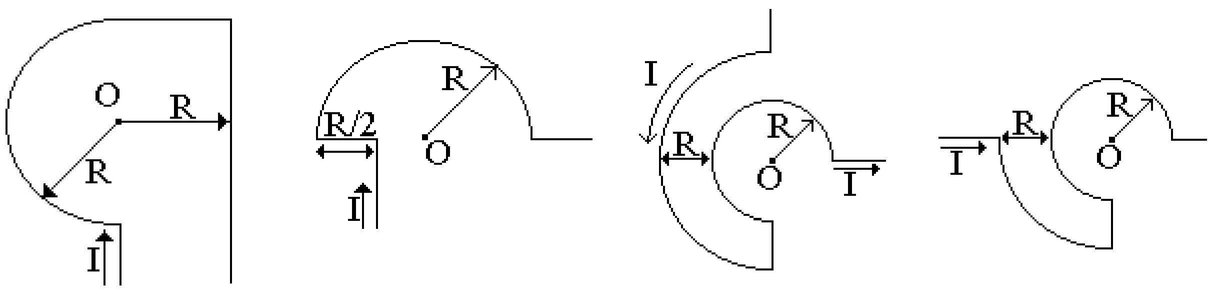
Рис. 4.3. *Формы проводников с током*



вариант 7 вариант 8 вариант 9



вариант 10 вариант 11 вариант 12



вариант 13 вариант 14 вариант 15 вариант 16

Продолжение рис. 4.3. *Формы проводников с током*

6. ТЕМА: ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

6.1 Основные формулы и указания к решению задачи

Основной закон электромагнитной индукции (**закон Фарадея – Максвелла**):

$$E_i = -N\frac{d\Phi}{\mathrm{dt}} = -\frac{d\psi}{dt}, \qquad (6.1)$$

где E_i – электродвижущая сила индукции;

N – число витков контура;

ψ – потокосцепление.

Количество электричества q, протекающего в контуре, определяется по формуле:

$$q = \frac{\Delta\psi}{R}, \qquad (6.2)$$

где R – сопротивление контура;

$\Delta\psi$ – изменение потокосцепления.

Электродвижущая сила самоиндукции E_i, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем, определяется по формуле:

$$E_i = -L\frac{dI}{dt} \quad \text{или} \ \langle E_i \rangle = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \qquad (6.3)$$

где L – индуктивность контура.

Потокосцепление контура определяется по формуле:

$$\psi = LI, \qquad (6.4)$$

где L – индуктивность контура.

Индуктивность соленоида (тороида) определяется по формуле:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \qquad (6.5)$$

Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L:

а) после замыкания цепи

$$I = I_0\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \ \text{или} \ I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right), \qquad (6.6)$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$;

t – время, прошедшее после замыкания цепи;

E – ЭДС источника тока;

б) после размыкания цепи

$$I = I_0 e^{-(R/L)t}, \ \text{или} \ I = \frac{E}{R}e^{-(R/L)t}, \qquad (6.7)$$

где t – время, прошедшее с момента размыкания цепи.

6.2 Пример решения задачи

Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром $d = 0{,}2$ *мм*. Диаметр D соленоида равен 5 *см*. По соленоиду течет ток $I = 1$ *А*. Определить количество электричества Q, протекающее через обмотку, если концы ее замкнуты накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Решение. Количество электричества dQ, которое протекает по проводнику за время dt при силе тока I, определяется равенством:

$$dQ = I\,dt. \tag{6.8}$$

Полное количество электричества, протекающее через проводник за время t, будет $Q = \int\limits_0^t I dt.$ Сила тока в данном случае убывает экспоненциально со временем и выражается формулой:

$$I = I_0 e^{-(R/L)t}. \tag{6.9}$$

Внося выражение силы тока I под знак интеграла и интегрируя от 0 до ∞ (при $t \to \infty$ $I \to 0$), получим

$$Q = \int\limits_0^\infty I_0 e^{-(R/L)t} dt = I_0 \int\limits_0^\infty e^{-(R/L)t} dt = I_0 \left(-\frac{L}{R}\right) e^{-(R/L)t} \Bigg|_0^\infty . \tag{6.10}$$

Подставим пределы интегрирования и определим количество электричества, протекающее через обмотку:

$$Q = I_0 \left(-L/R\right)\left(0 - 1\right) = I_0 L/R. \tag{6.11}$$

Для определения заряда, протекающего через обмотку соленоида, следует найти индуктивность L соленоида и сопротивление R обмотки соленоида, которые выражаются формулами:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l_1} S_1 = \frac{\mu_0 \pi d_1^2 N^2}{4 l_1}; \qquad R = \rho \frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2}, \tag{6.12}$$

где μ_0 – магнитная постоянная;

N – число витков;

l_1 – длина соленоида;

S_1 – площадь сечения соленоида;

ρ – удельное сопротивление провода;

l – длина провода;

S – площадь сечения провода;

d – диаметр провода;

d_1 – диаметр соленоида.

Подставим найденные выражения в формулу, получим:

$$Q = I_0 \frac{L}{R} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d_1^2}{4l_1 4\rho l} \pi d^2 I_0. \tag{6.13}$$

Заметим, что длина провода l может быть выражена через диаметр d_1 соленоида соотношением $l = \pi d_1 N$, где N – число витков, тогда формуле можно придать вид

$$Q = \frac{\mu_0 N^2 \pi d_1^2 \pi d^2}{16 l_1 \rho \pi d_1 N} I_0 = \frac{\pi \mu_0 N d_1 d^2}{16 \rho l_1} I_0. \tag{6.14}$$

Но $\frac{l_1}{N}$ есть диаметр провода, так как витки плотно прилегают друг к другу.

Следовательно,

$$Q = \frac{\pi \mu_0 d_1 d^2}{16 \rho d} I_0 = \frac{\pi \mu_0}{16 \rho} d d_1 \mu_0. \tag{6.15}$$

Выполним проверку единиц измерения величин.

$$\frac{[I_0]\cdot[L]}{[R]} = \frac{1A \cdot 1Гн}{1Ом} = \begin{bmatrix} 1\,Гн = 1\dfrac{В \cdot с}{А} \\ 1\,Ом = 1\dfrac{В}{А} \end{bmatrix} = \frac{1\,А \cdot 1\dfrac{В \cdot с}{А}}{1\dfrac{В}{А}} = 1\,А \cdot с = 1\,Кл. \tag{6.16}$$

Произведя вычисления по формуле (6.15) получим q = 363 *мкКл*.

6.3 Задание для самостоятельного выполнения по вариантам

Имеется катушка диаметром d и длиной l, имеющая однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков металлического провода, радиус которого r. Индуктивность катушки L. Сопротивление катушки R. Катушку можно отключить от источника тока с э.д.с. E и замкнуть накоротко или подключить к источнику. При этом через промежуток времени t после включения (выключения) источника тока сила тока в цепи достигнет значения I, что составляет X% от предельного значения силы тока I_0, по катушке пройдет заряд Q, и напряжение на зажимах катушки U примет определенное значение. Предельное значение силы тока в катушке I_0. Определите величину, обозначенную в строке для вашего варианта вопросительным знаком (табл. 6.1). Если какие-либо клетки таблицы напротив вашего варианта не заполнены, значит для решения задачи эти данные не нужны.

Например, задача варианта № 5 читается так: Катушка диаметром 0,05 *м*, длиной 0,5 *м*, индуктивностью 1 *Гн*, имеющая обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков медного провода, радиус которого $2\cdot10^{-4}$ *м*, подключается к источнику тока. Какой ток через катушку будет предельным, если через 10^{-4} *с* после включения источника через катушку пройдет заряд $4\cdot10^{-6}$ *Кл*?

Значения величин. Таблица 6.1

№ варианта	Вкл/выкл	E, $В$	l, $м$	d, $м$	r, $м$	Материал проводов катушки	L, $Гн$	I_0, $А$	$t \cdot 10^{-4}$, $с$	X, %	Q, $Кл$	U, $В$	R, $Ом$
1	Включение		0,4	0,02	$1 \cdot 10^{-4}$				3	70			?
2			0,3	0,03	$1 \cdot 10^{-4}$	Железо	?		2	60			
3			0,5	0,02	$2 \cdot 10^{-4}$	Алюминий	0,6		?	80			
4			0,3	0,04	$3 \cdot 10^{-4}$			0,5	1		?		10
5			0,5	0,05	$2 \cdot 10^{-4}$	Медь	1	?	1		$4 \cdot 10^{-6}$		
6			0,4	0,02	$3 \cdot 10^{-4}$				?	95			12
7		50	0,3	0,04	$3 \cdot 10^{-4}$				0,5			?	20
8		60					?		1			2	10
9	Выключение		0,3	0,03	$1 \cdot 10^{-4}$				2	60			?
10			0,2	0,02	$1 \cdot 10^{-4}$	Железо	?		1	70			
11			0,6	0,03	$2 \cdot 10^{-4}$	Алюминий	0,7		?	80			
12			0,4	0,02	$3 \cdot 10^{-4}$			1	0,5		?		20
13							0,6	1	?		$4 \cdot 10^{-6}$		30
14			0,4	0,02	$3 \cdot 10^{-4}$				?	95			12
15		70	0,3	0,04	$3 \cdot 10^{-4}$				0,5			?	20
16		50					?		1			2	10