

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Е. А. КОБЕЛЕВ, Н. А. МАСЛЕННИКОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Руководство по выполнению расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2018

УДК 624.04

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент С. А. Видюшенков (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I),

канд. техн. наук, доцент Н. В. Корихин (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого)

Кобелев, Е. А.

Строительная механика. Руководство по выполнению расчетно-графических работ: учебно-мет. Пособие; в 2-х ч. / Е. А. Кобелев, Н. А. Масленников; СПбГАСУ. – СПб., 2018. – Ч. 2. – 108 с.

ISBN

Приводятся краткие сведения теории расчета плоских стержневых систем по второй части строительной механики, контрольные вопросы, упражнения, схемы заданий к расчетно-графическим работам и методические рекомендации по их выполнению. Учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельной работы и составлено с учетом рабочей программы обучения студентов факультета безотрывных форм обучения направления 08.03.01 «Строительство», обучающихся по профилю – промышленное и гражданское строительство. В каждой главе пособия приведены необходимые теоретические материалы, контрольные вопросы, исходные данные, рекомендации с примерами выполнения расчетно-графических работ, а также требования к их оформлению.

Табл. 10. Ил. 51. Библиогр.: 10 назв.

Рекомендовано Учебно-методическим советом СПбГАСУ в качестве учебно-методического пособия.

ISBN

© Е. А. Кобелев, Н. А. Масленников 2018
© Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет, 2018

ВВЕДЕНИЕ

При изучении второй части курса строительной механики во втором семестре обучения по этой дисциплине студенты выполняют три расчетно-графических работы (РГР):

РГР № 4. Расчёт статически неопределимой рамы методом перемещений.

РГР № 5. Динамический расчёт плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки.

РГР № 6. Расчёт плоской рамы на устойчивость.

Порядок получения индивидуального задания

Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведённых в каждом задании таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачётной книжки или студенческого билета. Например, номер зачётной книжки 18549: первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9.

Работы, выполненные не по шифру, к проверке и защите не принимаются.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Расчётно-графическая работа выполняется на стандартных листах писчей бумаги (формат А-4). Заполняется только одна сторона листа, как показано в примере оформления расчетно-графической работы (приложение 6, стр. 85).

На титульном листе указываются номер и название работы, фамилия, имя и отчество студента, номера группы и специальности, индивидуальный номер шифра. Работа должна быть сброшюрована.

Расчётная схема изображается в масштабе длин. На ней указываются все необходимые данные в численном виде (размеры, нагрузки и др.), которые выписываются из таблиц. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями, всеми необхо-

димыми расчетами и четкими схемами с указанием в необходимых случаях масштабов длин и сил.

Небрежно выполненные работы, оформление которых не соответствует общим требованиям, к проверке и защите не принимаются.

Глава 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Метод перемещений является вторым основным классическим методом расчета статически неопределимых систем. Но, в отличие от метода сил, этот метод является формальным. Расчет по этому методу не зависит от степени статической неопределимости. Его можно применить к расчету статически определимых систем, что, впрочем, крайне нецелесообразно при решении задач прочности. Основными неизвестными в этом методе служат линейные смещения и углы поворота узлов (Z_i), что и дало название методу. При ручном счете преимущество отдавали тому методу, который приводит к меньшему числу основных неизвестных. При переходе к расчету на ЭВМ метод перемещений оказался непревзойденным. Объясняется это легкостью программирования.

Метод перемещений положен в основу ряда приближенных методов расчета рам, а также широко используется при решении задач устойчивости стержневых систем [3]. Идеи метода перемещений легли в основу метода конечных элементов, повсеместно распространенного при расчете не только стержневых систем, но и пластин и оболочек. Поэтому знание метода перемещений совершенно необходимо лицами, занимающимся расчетом строительных конструкций.

1.1. Допущения, вводимые при расчете рам методом перемещений

Рассмотрим деформированное состояние статически неопределимой плоской рамы при действии внешней нагрузки (рис. 1.1, *a*). С целью упрощения расчета на уровне выбора расчетной схемы введем ряд допущений:

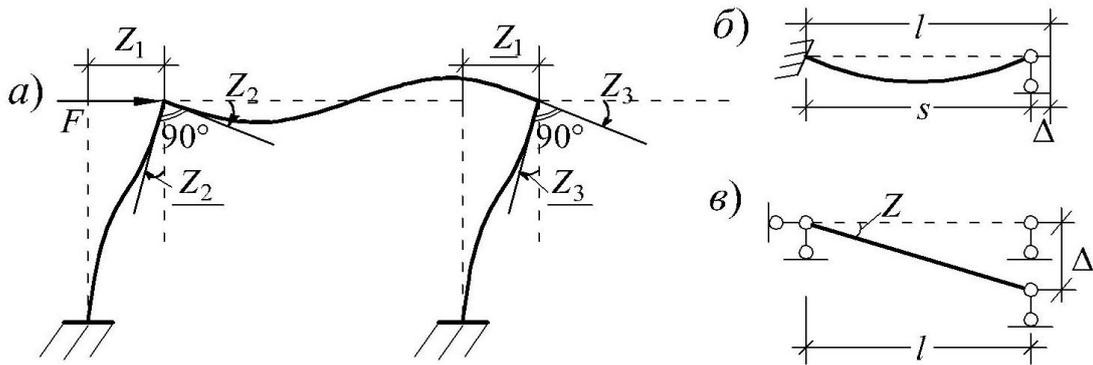


Рис. 1.1. Деформированное состояние рамы

1. Как и в методе сил, будем пренебрегать влиянием деформаций от поперечных и продольных сил на перемещения узлов. Однако, если в методе сил учет этих деформаций не ведет к увеличению числа основных неизвестных, то в методе перемещений учет продольных деформаций существенно увеличивает число основных неизвестных, т. е. увеличивает трудоемкость расчета. На основании принятого допущения $\underline{Z}_1 = Z_1$ (рис. 1.1, а).

2. Будем пренебрегать изменением проекции длины стержня за счет его искривления (рис. 1.1, б): $s = l - \Delta \approx l$. На этом основании $\underline{Z}_1 = Z_1$.

3. Допустим, что концы стержней, примыкающих к жесткому узлу, поворачиваются на один и тот же угол, т. е. $\underline{Z}_2 = Z_2$, $\underline{Z}_3 = Z_3$.

4. Углы поворота ввиду их малости заменим тангенсами, т. е. $Z = \Delta / l$ (рис. 5.1, в).

При расчете плоских и пространственных ферм приведенные допущения отсутствуют, так как перемещения в фермах возникают лишь вследствие деформаций от продольных сил.

1.2. Степень кинематической неопределимости.

Основная система

Метод перемещений по физическому смыслу является как бы обратным отображением метода сил, подтверждая наличие дуализма в природе, но по внешней форме он идентичен с ним. Расчет, как и по методу сил, начинается с определения числа основных неизвестных перемещений. По аналогии с методом сил системы, рассчитываемые методом перемещений будем называть кинематически неопределимыми, а число неизвестных степенью кинематической неопределимости. Далее выбирается основная система. Назна-

чение основной системы такое же, как в методе сил. Из условия эквивалентности основной системы с заданной системой находятся основные неизвестные, т. е. смещения и углы поворота узлов. И здесь уже начинается содержательное отличие. Вместо удаления лишних связей, наоборот, ставятся дополнительные связи по направлению искомым перемещений. (В отличие от основных связей дополнительные связи обозначим двойными линиями).

Для плоских ферм ставится одна линейная связь в подвижных опорах и по две взаимно перпендикулярные связи в свободных узлах. В фермах со значительным количеством свободных узлов получается большое число неизвестных, поэтому плоские фермы редко рассчитываются методом перемещений. Для пространственных ферм ставится по три взаимно перпендикулярных связи в свободных узлах. В узлах, где имеются одна или две связи их дополняют до трех (рис. 1.2). На рисунке n – степень кинематической неопределимости. Расчет пространственных ферм графическим способом оказывается весьма громоздким, поэтому их проще рассчитывать на компьютере с помощью готовых программ методом перемещений.

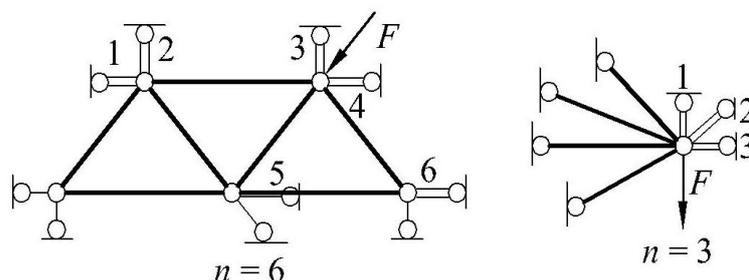


Рис. 1.2. Степень кинематической неопределимости ферм

При расчете плоских рамных систем, содержащих как жесткие, так и шарнирные узлы, для получения основной системы при принятых допущениях нужно:

- поставить угловые связи, препятствующие повороту во все узлы, где нет полных (сквозных) шарниров (ниже их будем обозначать квадратиками, хотя возможны и другие обозначения);
- поставить линейные связи, препятствующие линейным смещениям узлов рамы. Степень линейной подвижности узлов определяется по шарнирной схеме, получаемой из заданной путем введения полных шарниров во все узлы, включая опорные. Общее число неизвестных

$$n = n_{уг} + n_{л}. \quad (1.1)$$

Для определения числа линейных связей можно использовать условие геометрической неизменяемости плоских ферм:

$$n_{л} = 2У - С, \quad (1.2)$$

которое, за редким, исключением дает число недостающих связей, обеспечивающих неизменяемость системы.

На рис. 1.3 приведен пример выбора основной системы, хотя при установке угловых связей выбора нет, и только несущественный выбор имеет место при установке линейных связей.

Первая схема рамы на рис. 1.3, *а* имеет два узла, где нет полных шарниров, что дает два неизвестных угла поворота – Z_1 и Z_2 .

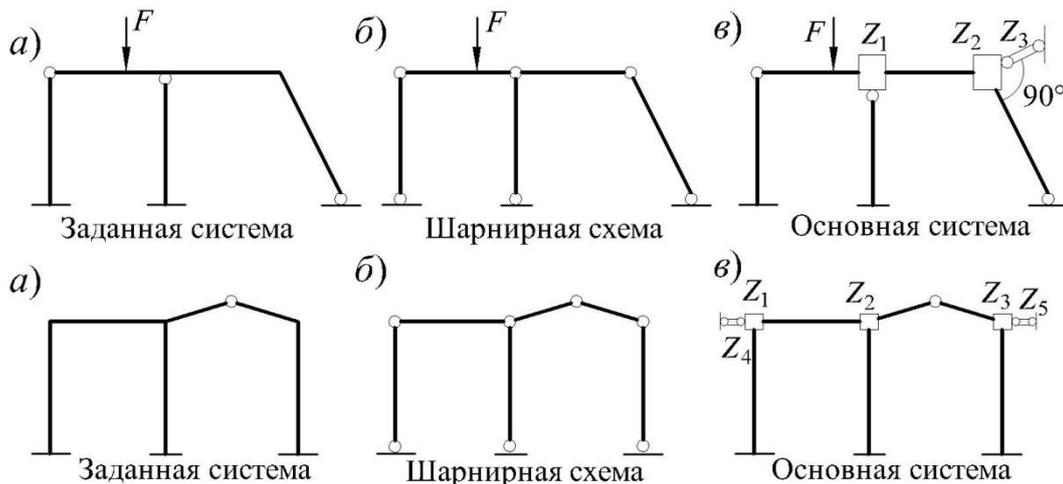


Рис. 1.3. Выбор основных систем метода перемещений

На рис. 1.3, *б* показана шарнирная схема. По формуле (1.2) $n_{л} = 2 \cdot 3 - 5 = 1$, т. е. необходима одна линейная связь. Поставить ее можно либо слева горизонтально, либо справа перпендикулярно наклонному стержню. Основная система изображена на рис. 1.3, *в*. Квадраты изображают связи, препятствующие повороту узлов. Во второй схеме (рис. 1.3, *а*) угловых связей три. Число линейных связей по формуле (1.1): $n_{л} = 2 \cdot 4 - 6 = 2$. Основная система показана на рис. 1.3, *в*.

Таким образом, по существу мы пришли к методу конечных элементов. В качестве конечных элементов выступают отдельные прямолинейные стержни постоянного сечения. В отличие от про-

граммных комплексов типа ЛИРА, SCAD и др. здесь не учтено влияние продольных деформаций (см. п. 1.1). Естественно, их можно учесть, поставив дополнительные линейные связи. Например, на рис. 1.4, б изображена обычная основная система, а на рис. 1.4, в – с учетом продольных деформаций.

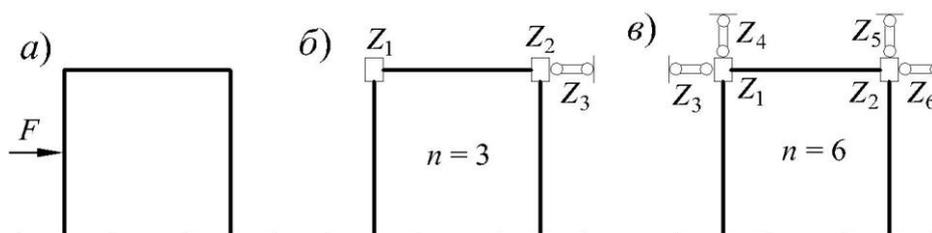


Рис. 1.4. Различные основные системы одной и той же рамы

При расчете пространственных рам введенные допущения остаются. Но изгиб будет уже в двух плоскостях и возникнет дополнительно кручение стержней, что также увеличивает число неизвестных метода. При выборе основной системы в каждый узел, где нет полных шарниров, для предотвращения поворота в трех взаимно перпендикулярных направлениях ставятся три связи. Число линейных связей определяется по шарнирной схеме. Здесь тоже можно использовать условие геометрической неизменяемости пространственных ферм $C = 3U$, откуда

$$n_{\text{л}} = 3U - C. \quad (1.3)$$

Очевидно, что в отличие от метода сил, где продольные деформации учитываются одним из членов формулы Мора, в методе перемещений их учет ведет к заметному увеличению числа основных неизвестных. Но в этом сказывается и преимущество метода конечных элементов – отпадает надобность в выборе основной системы, так как она единственная при принятых допущениях. Отсюда и удобство программирования.

1.3. Теорема о взаимности реакций

Обозначим реакции, возникающие в дополнительных связях, через r_{ik} . Назначение индексов такое же, как и у перемещений. Первый индекс показывает место возникновения реакции, а второй –

причину, от которой эта реакция возникает. Для доказательства теоремы о взаимности реакций рассмотрим два состояния i и k одной и той же статически неопределимой системы. В каждом из состояний зададим единичные перемещения по направлению указанных связей (рис. 1.5).

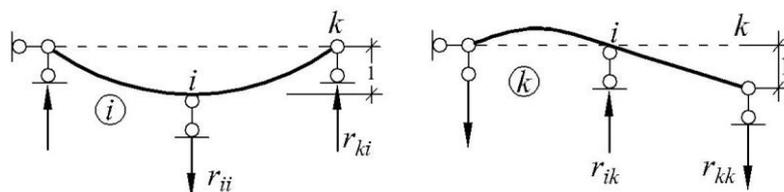


Рис. 1.5. К доказательству теоремы о взаимности реакций

Применим теорему о взаимности возможных работ к этим состояниям. Приравняем работу сил состояния i на перемещениях состояния k работе сил состояния k на перемещениях состояния i . (В левой опоре тоже имеют место реакции, но опора не смещается, поэтому эти реакции не входят в выражение работы).

$$r_{ii} \cdot 0 - r_{ki} \cdot 1 = -r_{ik} \cdot 1 + r_{kk} \cdot 0 \quad \text{или} \quad r_{ik} = r_{ki}.$$

Реакции равны по величине и совпадают по знакам. Полученный вывод можно сформулировать так: *реакция, возникающая в связи i от единичного перемещения по направлению связи k , равна реакции в связи k , возникающей от единичного перемещения по направлению связи i .*

Теорема доказана в 1873 году английским физиком лордом Д.У. Рэлеем (1842 – 1919).

1.4. Идея метода перемещений. Система канонических уравнений

Для реализации метода перемещений можно использовать последовательность расчета, аналогичную последовательности расчета статически неопределимых систем методом сил. После выбора основной системы метода перемещений строятся эпюры $M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$ от единичных перемещений по направлению добавленных связей и эпюра M_F^0 от внешней нагрузки. Эпюры строятся по табл. 1.1.

Таблица 1.1

Эпюры от единичных перемещений и внешней нагрузки

№ п/п	Схема воздействия	Эпюра моментов	Реакции в опорных связях
1			$M_i = \frac{3EI}{l} Z$ $R_i = -R_k = \frac{3EI}{l^2} Z$
2			$M_i = \frac{3EI}{l^2} Z$ $R_i = R_k = \frac{3EI}{l^3} Z$
3			$M_i = 0,5Flv(1 - v^2)$ $R_i = 0,5Fv(3 - v^3)$ $R_k = 0,5Fu^2(3 - u)$
4			$M_i = \frac{ql^2}{8}$ $R_i = \frac{5}{8}ql, R_k = \frac{3}{8}ql$
5			$M_i = \frac{4EI}{l} Z; M_k = \frac{2EI}{l} Z$ $R_i = -R_k = \frac{6EI}{l^2} Z$
6			$M_i = M_k = \frac{6EI}{l^2} Z$ $R_i = -R_k = \frac{12EI}{l^3} Z$
7			$M_i = uv^2Fl; M_k = u^2vFl$ $R_i = v^2(1+2u)F$ $R_k = u^2(1+2v)F$
8			$M_i = -M_k = \frac{ql^2}{12}$ $R_i = R_k = \frac{ql}{2}$

1.5. Последовательность расчета при действии внешней нагрузки

Решение системы уравнений дает перемещения, которые являются основными неизвестными метода. Через них определяются усилия. Первыми вычисляются изгибающие моменты. С этой целью ординаты эпюр от единичных значений перемещений умножаются на соответствующие найденные величины основных неизвестных и суммируются с ординатами эпюры от внешней нагрузки. В итоге

$$M_F = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_F^0.$$

Эпюра поперечных сил строится по эпюре моментов с использованием формулы:

$$Q_{ik} = Q_{ik}^0 - \frac{M_i + M_k}{l_{ik}}. \quad (1.5)$$

Здесь Q_{ik}^0 – поперечная сила у опоры i от поперечной нагрузки на стержне. При отсутствии нагрузки на стержне $Q_{ik}^0 = 0$. Моменты M_i и M_k подставляются в формулу (1.5) со знаком плюс, если они направлены по ходу часовой стрелки.

Эпюра продольных сил строится по эпюре поперечных сил с помощью уравнений равновесия. Если требуется определить перемещения иные, чем Z_i , то для этих целей, как и при расчете методом сил, используется формула Мора. Причем эпюра от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения, может быть построена в любой статически определимой системе, полученной из заданной.

1.6. Контрольные вопросы

1. Кинематическая неопределимость расчетной схемы.
2. Степень кинематической неопределимости. Получение кинематически определимой основной системы.
3. Идея метода перемещений.

4. Система канонических уравнений, её физический смысл и особенности, размерности коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

5. Особенности стержней основной системы метода перемещений и способы определения усилий в этих стержнях.

6. Сформулируйте общие принципы определения реакций в дополнительных связях основной системы метода перемещений от различных воздействий.

7. Общий ход расчета методом перемещений при действии внешней нагрузки.

8. Построение эпюр поперечных и продольных сил при расчете балок и рам методом перемещений.

9. Проверки расчета методом перемещений.

1.7. РГР № 4. Расчёт статически неопределимой рамы методом перемещений

Задание: Рассчитать статически неопределимую раму методом перемещений. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Определить опорные реакции. Исходные данные к задаче определить по табл. 1.2 и схемам, представленным на рис. 1.6.

Таблица 1.2

Исходные данные к задачам РГР № 4

Первая цифра шифра	q_2 , кН/м	q_1 , кН/м	$\frac{I_2}{I_1}$	Вторая цифра шифра	F_1 , кН	F_2 , кН	Третья цифра шифра № схемы	h , м	l_1 , м	l_2 , м
0	0	3	2	0	5	0	0	3	2	4
1	5	0	3	1	0	5	1	4	3	2
2	0	2	4	2	4	0	2	5	4	6
3	4	0	2	3	0	4	3	4	5	2
4	0	4	3	4	3	0	4	3	6	4
5	2	0	4	5	0	3	5	4	3	6
6	0	5	2	6	5	0	6	3	4	6
7	3	0	3	7	0	5	7	4	5	4
8	0	2	4	8	2	0	8	5	6	4
9	2	0	2	9	0	2	9	3	4	6

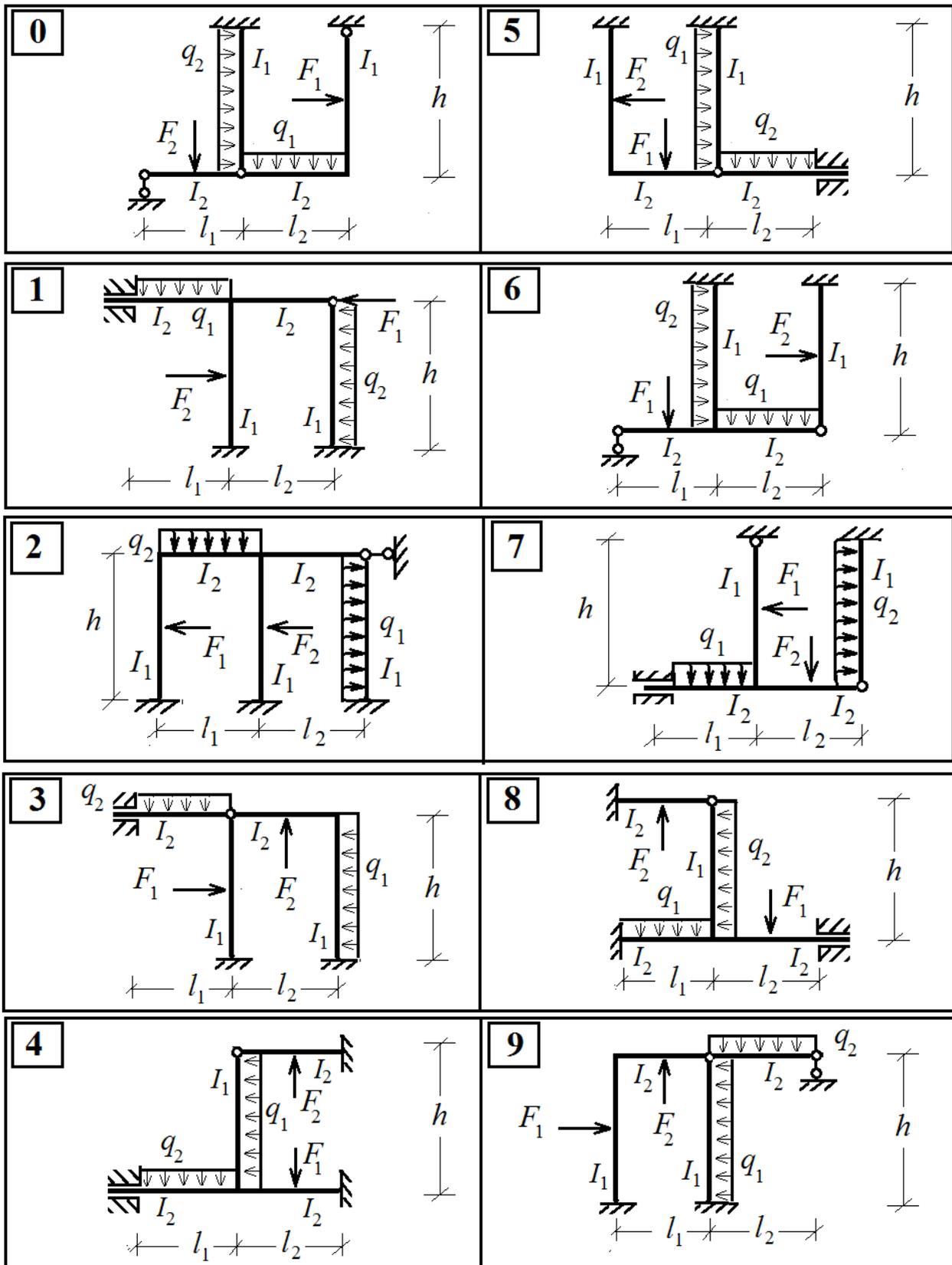


Рис. 1.6. Схемы заданий к задачам РГР № 4

Примечание: Сосредоточенная сила приложена в середине участка.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить степень кинематической неопределимости:
 $n_k = n_y + n_{\text{л}}$.

3. Составить систему канонических уравнений метода перемещений:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{1F} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{2F} = 0.$$

4. Выбрать основную систему метода перемещений, введя дополнительные связи, препятствующие смещению узлов системы.

5. Построить схемы деформации системы от единичных смещений.

6. Построить эпюры моментов M_1^o и M_2^o в основной системе от единичных перемещений в направлении дополнительных связей с помощью таблицы Приложения 1.

7. Построить эпюру моментов M_F^o в основной системе от заданной нагрузки с помощью таблицы приложения 1.

8. Определить свободные члены и коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях, которые представляют собой реакции в дополнительных связях (см. приложение). Величины этих реакций определяются по эпюрам M_1^o , M_2^o и M_F^o . Для этого необходимо вырезать узлы (при угловом перемещении) или часть системы (при линейном перемещении) и рассматривать равновесие вырезанной части. Реакция в связи считается положительной, если её направление совпадает с направлением задаваемого единичного перемещения.

9. Решить систему канонических уравнений, определив неизвестные Z_1 и Z_2 .

10. Построить эпюру $M_1^o \cdot Z_1$ и $M_2^o \cdot Z_2$, для чего необходимо все ординаты эпюры M_1^o и M_2^o умножить на величину Z_1 и Z_2 , соответственно, с учётом знаков Z_1 и Z_2 .

11. Построить окончательную эпюру моментов

$$M = M_1^o \cdot Z_1 + M_2^o \cdot Z_2 + M_F^o.$$

12. Произвести проверку равновесия узлов эпюры M .

13. Произвести деформационную проверку правильности построения эпюры M . Для этого: определить степень статической неопределимости заданной системы по формуле: $n_{ст} = 3K - Ш$, выбрать основную систему метода сил, построить любую единичную эпюру изгибающих моментов. При правильно выполненном расчёте должно быть выполнено условие, смысл которого заключается в том, что перемещение по направлению удалённой связи должны быть равно нулю:

$$\sum_1^m \int_0^l \frac{\bar{M}_1^o M_F}{EI} dx = 0.$$

14. Построить эпюру поперечных сил с помощью дифференциальной зависимости $Q = dM/dx = \operatorname{tg}\alpha$;

15. Построить эпюру продольных сил, рассматривая равновесие узлов.

16. Определить опорные реакции.

17. Выполнить статическую проверку расчёта: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M = 0$.

Пример решения задачи. Рассчитать статически неопределимую раму методом перемещений.

• Определяем степень кинематической неопределимости:

$$n_k = n_y + n_{л} = 1 + 1 = 2.$$

• Составляем систему канонических уравнений метода перемещений:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{1F} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{2F} = 0.$$

• Выбираем основную систему метода перемещений (ОСМП).

• Строим деформационные схемы основной системы.

• Строим в основной системе эпюры моментов M_1^o и M_2^o от единичных смещений и эпюру моментов M_F^o от заданной нагрузки, используя таблицы приложения 1.

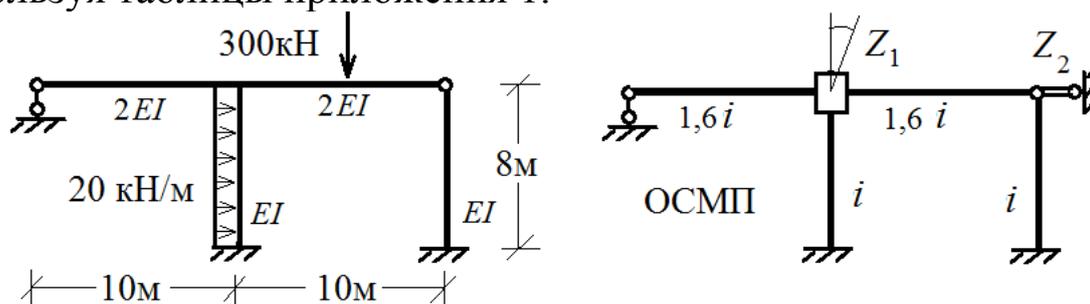


Рис. 1.7. Заданная расчетная схема и основная система метода перемещений

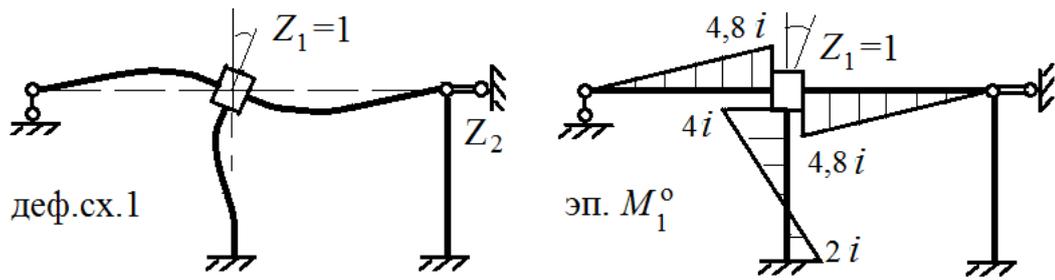


Рис. 1.8. Эпюры моментов от единичного угла поворота

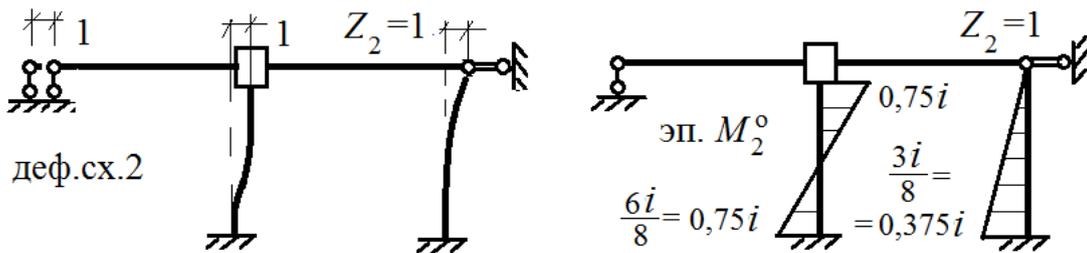


Рис. 1.9. Эпюры моментов от единичного линейного смещения

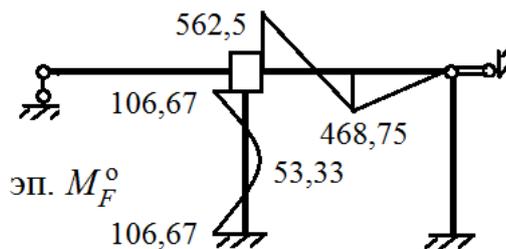


Рис. 1.10. Эпюры моментов в основной системе от внешней нагрузки

- Определяем свободные члены и коэффициенты при неизвестных канонических уравнений, рассматривая равновесие отсеченных частей основной системы.

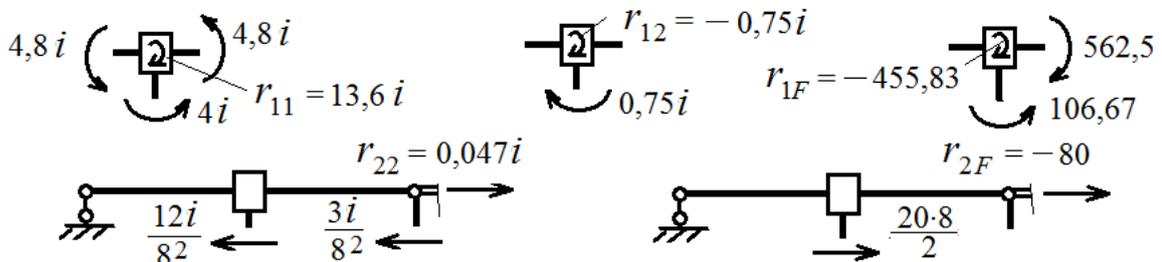


Рис. 1.11. Равновесие отсеченных частей основной системы

- Решаем систему канонических уравнений и определяем Z_1 и Z_2 :

$$13,6i \cdot Z_1 - 0,75i \cdot Z_2 - 455,833 = 0; \quad Z_1 = 63,556/i;$$

$$-0,75i \cdot Z_1 + 0,2345i \cdot Z_2 - 80 = 0; Z_2 = 544,714/i;$$

• Строим эюры $M_1^o \cdot Z_1$ и $M_2^o \cdot Z_2$ (все ординаты эюр M_1^o и M_2^o умножаем на величину Z_1 и Z_2 , соответственно).

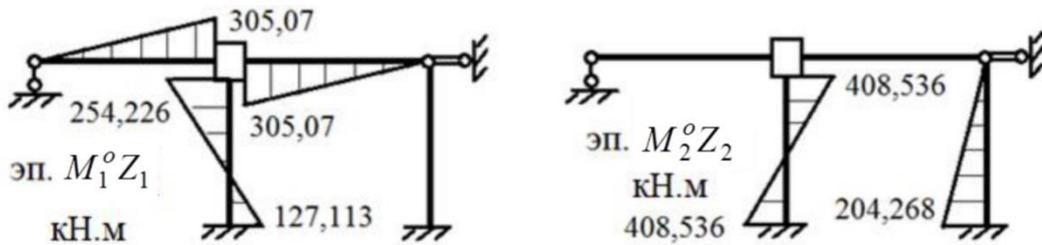


Рис. 1.12. Эюры моментов от неизвестных метода перемещений

• Строим окончательную эюру моментов, складывая соответствующие ординаты эюр: $M = M_1^o \cdot Z_1 + M_2^o Z_2 + M_F^o$.

Производим проверку равновесия узлов эюры M .

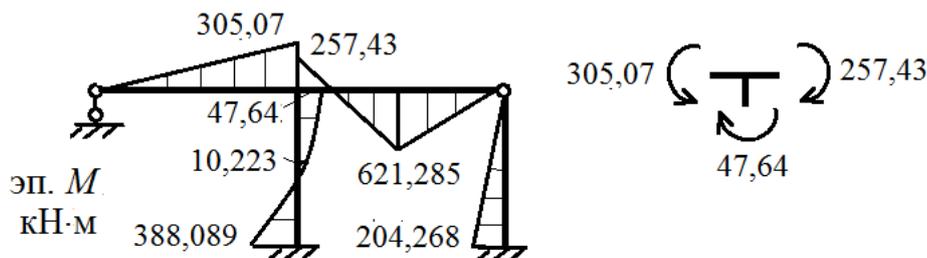


Рис. 1.13. Эюра моментов в заданной системе от внешней нагрузки

• Производим деформационную проверку правильности построения эюры M . Для этого определяем степень статической неопределимости заданной системы: $n_{ст} = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 3 = 3$, выбираем основную систему метода сил (ОСМС), строим единичную эюру моментов \bar{M}_1^o , определяем перемещение по направлению удаленной связи. Оно должно отсутствовать, быть равным нулю.

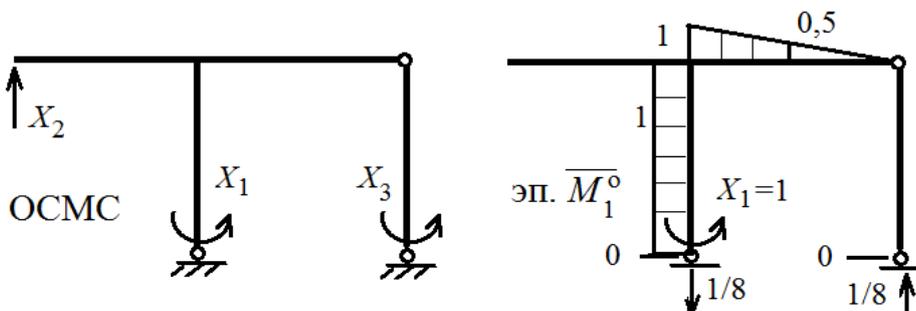


Рис. 1.14. Основная система метода сил и единичная эюра моментов

$$\sum \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 621,285 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{5}{6} (2 \cdot 1 \cdot 257,43 - 2 \cdot 0,5 \cdot 621,285 + 257,43 \cdot 0,5 - 621,285 \cdot 1) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{8}{6} (47,643 \cdot 1 - 388,089 \cdot 1 - 4 \cdot 10,223 \cdot 1) = 0.$$

- Строим эпюру поперечных сил Q с помощью дифференциальной зависимости $Q = dM/dx = \text{tg}\alpha$.

- Строим эпюру продольных сил N , рассматривая равновесие узлов.

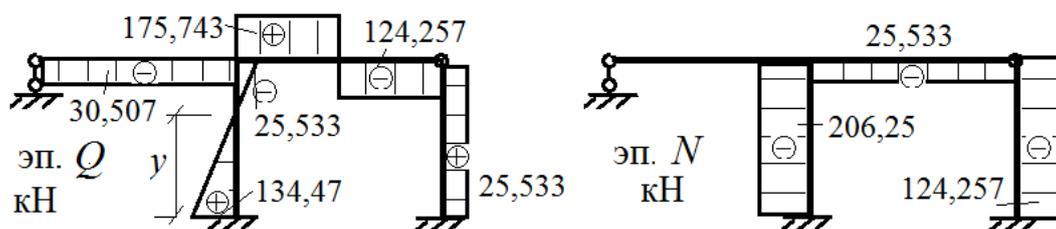


Рис. 1.15. Эпюры поперечных и продольных усилий

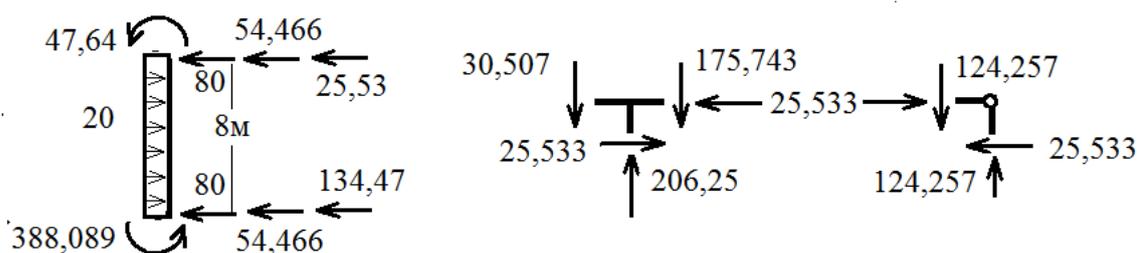


Рис. 1.16. Равновесие отсеченных частей заданной системы

- Определяем опорные реакции по эпюрам M , Q и N .

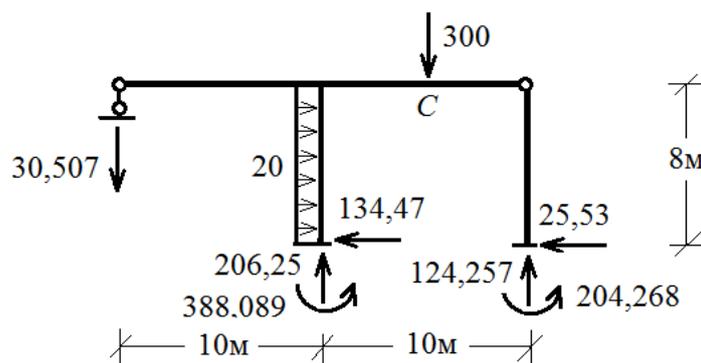


Рис. 1.17. Определение опорных реакций в заданной системе

- Выполняем статическую проверку расчёта:

$$\sum X = 25,53 + 134,47 - 20 \cdot 8 = 0;$$

$$\sum Y = 206,25 + 124,257 - 30,507 - 300 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_C &= (25,53 + 134,47) \cdot 8 - 20 \cdot 8 \cdot 4 - 30,507 \cdot 15 + 206,25 \cdot 5 - \\ &124,257 \cdot 5 - 204,268 - 388,089 = 0,003 \approx 0; \end{aligned}$$

Глава 2. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

2.1. Предмет и задачи динамики сооружений

Воздействия на строительные конструкции зданий и сооружений могут быть как силовыми, так и кинематическими, то есть вызванными движением основания. И те и другие могут создаваться как силами природы, так и в результате деятельности человека. Силовым фактором в природе, в первую очередь, является давление ветра, особенно опасное для высотных зданий и «гибких» большепролетных сооружений. Другим бедствием для человечества до сих пор являются землетрясения, ежегодно уносящие сотни, а порой и тысячи жизней.

Колебания, создаваемые вследствие деятельности человека, весьма разнообразны. Основную часть из них создают неуравновешенные вращающиеся части машин, станков и других механизмов. Большая роль принадлежит транспорту: трамваям, автомашинам, поездам метро и железной дороги, проходящим по территории населенных пунктов. Заметные колебания возникают при забивке свай вдоль набережных и при строительстве новых зданий.

От указанных воздействий в конструкциях возникают перемещения переменного знака, что, в свою очередь, ведёт к переменному напряженному состоянию. Ниже рассматриваются, в основном, только линейные задачи, то есть рассчитываемые конструкции принимаются идеально упругими и линейно деформируемыми системами, а материал конструкций следует закону Гука. К линейно деформируемым конструкциям применим принцип независимости действия сил. Вследствие этого, расчёт ведётся отдельно от статических и от динамических воздействий, а затем переменное напряженное состояние, вызываемое колебаниями, суммируется с напряженным состоянием от статических нагрузок, которые присутствуют всегда, например, от собственного веса конструкции.

Задача динамики сооружений, как и при статическом расчёте, состоит в определении напряженного и деформированного состояния конструкции и в оценке её надёжности от совместного действия как статических, так и динамических воздействий. При этом следует помнить об особенностях динамического напряженного со-

стояния, то есть о его переменности. В случае металлических конструкций, материал которых работает одинаково при растяжении и сжатии, нужно следить лишь за тем, чтобы суммарные напряжения не превышали расчётных. В конструкциях из железобетона, в изгибаемых элементах которых арматура расположена несимметрично относительно нейтральной оси сечения, при колебании растяжение попадает в зону сжатия, а прочность бетона, как известно, в этих случаях значительно меньше. Поэтому, если конструкция проектируется под динамическую нагрузку, необходимо этот факт предусмотреть путём постановки соответствующей рабочей арматуры в сжатой зоне.

В целом же, задачи динамики являются более сложными, требующими от инженера-строителя больших знаний в области проектирования и расчёта конструкций, чем при расчёте на статическую нагрузку.

2.2. Виды динамических нагрузок

Любая нагрузка, меняющая во времени свою величину, направление или положение, называется динамической. Динамической будет даже постоянная нагрузка, приложенная к конструкции внезапно сразу полной величиной (рис. 2.1, а). Динамические нагрузки по своей природе весьма разнообразны. При расчёте сооружений целесообразно разделить их на отдельные виды.

Периодические неподвижные нагрузки характеризуются тем, что закон изменения их действия и величины во времени является периодическим, то есть они многократно повторяются через определённые промежутки времени – периоды. Периодические колебания являются идеализацией колебательных процессов, которые протекают в природе и технике. Достаточно внести малые флуктуации частоты, фазы или амплитуды, чтобы нарушить строгую периодичность процесса [8]. Тем не менее, эта идеализация позволяет получать достоверные результаты. К периодическим воздействиям относится вибрационная нагрузка, возникающая при работе машин и механизмов вследствие неуравновешенности их отдельных частей. Вибрационная нагрузка изменяется во времени по гармоническому закону (закону синуса или косинуса), например (рис. 2.1, б)

$$F(t) = F \sin \theta t, \quad (2.1)$$

где F – амплитудное значение возмущающей силы; θ – угловая частота изменения возмущающей силы.

К вертикальной составляющей вида (2.1) сводится действие установленного на сооружении двигателя из-за неуравновешенности ротора, масса которого имеет относительно оси вращения эксцентриситет e . Во время вращения ротора будет возникать центробежная сила инерции [3]:

$$J = m e p^2. \quad (2.2)$$

Здесь m – масса ротора; p – угловая скорость.
Масса тела определяется по формуле:

$$m = \frac{Q}{g}, \quad (2.3)$$

где Q – вес тела; $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ускорение свободного падения.

Вертикальная составляющая центробежной силы представляется выражением (2.1) $F(t) = J \sin t$.

Вибрационная нагрузка является наиболее опасной для строительных конструкций ввиду следующих особенностей:

а) эффект действия вибрационной нагрузки зависит не только от её величины (амплитудного значения), но и от её периода. Малая нагрузка с одним периодом может привести к разрушению конструкции, тогда как эффект от другой нагрузки с большей амплитудной величиной может оказаться близким к статическому воздействию;

б) вторая особенность заключается в отсутствии локализации воздействия. Наибольший эффект может проявиться не там, где его естественно ожидать, в непосредственной близости от места приложения нагрузки, а в удалённых местах, и даже в другом сооружении, к которому нагрузка не приложена. Причина такого своеобразного явления объясняется свойством всякого реального тела, включая и грунт, совершать упругие колебания;

в) третья особенность состоит в том, что при определённых периодах и амплитудах воздействия вибрационная нагрузка оказывает вредное влияние на здоровье человека и на безупречную работу точных приборов и механизмов.

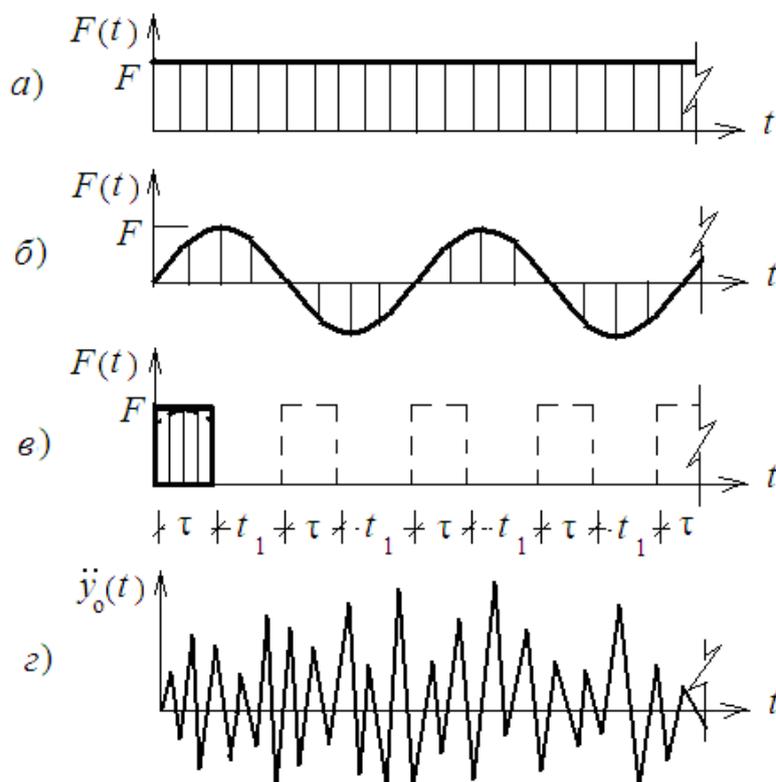


Рис. 2.1. Виды динамического воздействия

Кратковременные нагрузки, как правило, оцениваются импульсами, то есть произведением силы на время её действия $J = F\tau$ (рис. 2.1, в). Обычно такие нагрузки создаются различными взрывами, когда нагрузка мгновенно возрастает и также быстро исчезает.

Ударная нагрузка может быть достаточно разнообразной. Так при падении какого-либо тела на конструкцию её можно описать диаграммой на рис. 2.1, а с дополнением начальной скорости колебаний. При работе всевозможных копров, прессов, кузнечных молотов и других ударных механизмов её можно представить импульсами. Если череда ударов совершается с определённым периодом, как это показано на рис. 2.1, в штриховыми линиями, то ударную нагрузку можно считать периодической нагрузкой со всеми вытекающими отсюда последствиями. К ударным нагрузкам можно отнести и пульсацию ветра.

Подвижная нагрузка может быть как периодической, так и постоянной. Её характерная особенность заключается в изменении места её приложения во времени. Если этот процесс происходит медленно, без возбуждения сил инерции, то такие нагрузки можно считать статическими и их эффект определять с помощью линий влияния, построение которых изучается в курсах строительной механики. При больших скоростях нагрузка считается динамической. Расчёт на такую нагрузку тоже может сводиться к построению линий влияния, но уже динамических.

Сейсмическое воздействие создаётся при землетрясении, которое вызывает хаотичные колебания зданий через основание. Расчёт ответственных сооружений на сейсмическое воздействие выполняется по акселерограммам. Фрагмент акселерограммы изображён на рис. 2.1, г.

Все виды динамических нагрузок можно условно разделить на массовые и безмассовые. К безмассовым нагрузкам относятся давление ветра, взрывных волн и др. Часть массовых нагрузок можно приближённо считать безмассовыми, если их масса существенно меньше массы, на которую они воздействуют.

2.3. Степени свободы системы

При решении задач о колебании конструкций, кроме исходных данных, необходимых для расчёта на статическую нагрузку, требуются сведения о массе конструкции. Вызвано это тем, что при колебаниях появляются так называемые даламберовы силы инерции (по имени французского механика Ж.Л. Даламбера), которые не являются физическими силами [9] и определяются как произведение массы на вектор абсолютного ускорения с обратным знаком:

$$J = -m\ddot{y}(t), \quad (2.4)$$

куда, соответственно, входит масса конструкции m .

Трудоёмкость решения задач динамики зависит от числа степеней свободы. *Числом степеней свободы называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение массы системы в любой момент времени.* Масса вычисляется через вес конструкции по формуле (2.3). Естественно, что вес кон-

струкции, а равно и масса, непрерывно распределены по всей системе, то есть в реальных системах масса является распределённой. Следовательно, для определения её положения при колебаниях необходимо бесконечное число независимых геометрических параметров или, в таких случаях говорят, что система имеет бесконечное число степеней свободы. Расчёт подобных систем относительно сложный. Для практических целей часто достаточно учесть только несколько степеней свободы или даже одну. С этой целью распределённая масса заменяется сосредоточенными массами по правилу рычага или с помощью иного приёма. Например, на рис. 2.2, а показана консольная балка с равномерно распределённой массой. Массу можно полностью поместить на конце балки (рис. 2.2, б) или, разделив балку на две равные части, приложить сосредоточенные массы в узлах (рис. 2.2, в). Разумеется, возможны и другие варианты.

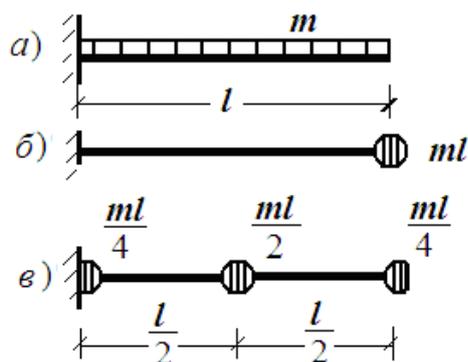


Рис. 2.2. Замена распределенной массы сосредоточенными массами

Положение одной массы в плоскости определяется тремя независимыми параметрами x , y , φ (рис. 2.3, а). Если пренебречь вращением массы, то останутся два параметра x и y , которые определяют положение массы вследствие продольных и изгибных деформаций стержней. Если пренебречь ещё и продольными перемещениями, которые, как известно, значительно меньше перемещений за счёт изгиба стержня, то останется один параметр y . Такая система будет иметь одну степень свободы (рис. 2.3, в).

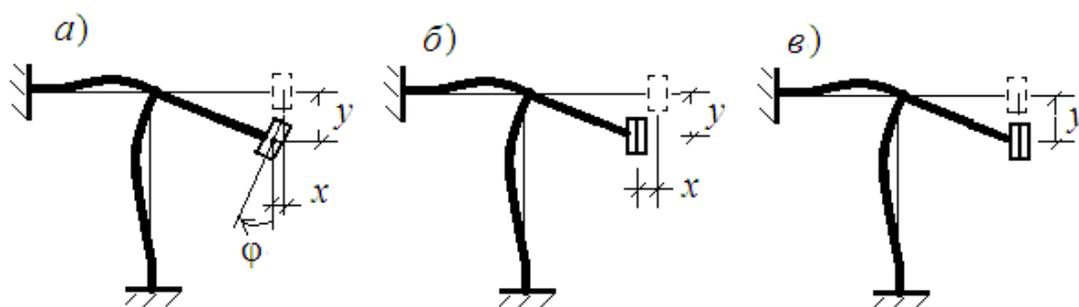


Рис. 2.3. Пренебрежение поворотом и продольными перемещениями массы

Таким образом, число степеней свободы не является неизбежной характеристикой, как степень статической неопределимости, а зависит от желаемой точности выполняемого расчёта. В дальнейшем в расчётах пренебрегают поворотом массы и её перемещением вследствие малости продольных деформаций по сравнению с перемещениями от изгиба. При этом, как и в методе перемещений, не учитывается сближение концов стержня при его изгибе, а дуга траектории движения массы из-за малости перемещений, как обычно, заменяется касательной к ней. Указанные допущения распространяются при рассмотрении колебаний масс в пространстве. При определении числа степеней свободы не следует руководствоваться только количеством сосредоточенных масс. Часто число степеней свободы и количество масс не совпадают.

2.4. Колебания упругих систем с одной степенью свободы

Изучение основ расчёта строительных конструкций при динамическом воздействии целесообразно начать с простейшей системы, каковой является система с одной степенью свободы. Такой подход облегчает усвоение физического смысла рассматриваемого явления. Примером системы с одной степенью свободы может служить консольная балка (см. рис. 2.2, б) или рама (см. рис. 2.3, в).

2.4.1. Свободные колебания без учёта причин, вызывающих рассеяние энергии

Если любую систему из названных выше упругих систем вывести из состояния равновесия (например, ударить по ней, или от-

тянуть массу и внезапно отпустить), она будет совершать так называемые свободные колебания около положения статического равновесия за счёт своих упругих свойств. *Свободными называются колебания, совершаемые без поступления энергии извне, то есть при отсутствии внешнего воздействия.*

Рассмотрим невесомую балку, масса которой сосредоточена в её середине и по её концам (рис. 2.4, а). Крайние массы при поперечных колебаниях не будут смещаться, поэтому достаточно только одной связи, чтобы закрепить среднюю массу. Следовательно, рассматриваемая система имеет только одну степень свободы. Её расчётная схема приведена на рис. 2.5, б. Построим математическую модель свободных колебаний этой системы.

Эту задачу можно решить с помощью дифференциального уравнения второго рода Ж.Л. Лагранжа. Здесь же получим уравнение движения массы, исходя из физического смысла задачи, на основании принципа Даламбера. В соответствии с этим принципом, *если в любой момент времени к физическим силам, действующим на рассматриваемую конструкцию, приложить все относящиеся к ней силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно применить все уравнения статики.* Это так называемый метод кинестатики.

При свободных колебаниях на массу, отклонившуюся от положения равновесия на величину $y(t)$, в любой момент времени будут действовать восстанавливающая сила S , сила неупругого сопротивления R и даламберова сила инерции J (рис. 2.4, в, г), приложенная к балке. Но поскольку масса балки сведена в середину пролёта, то условно можно считать, что сила инерции тоже приложена к массе.

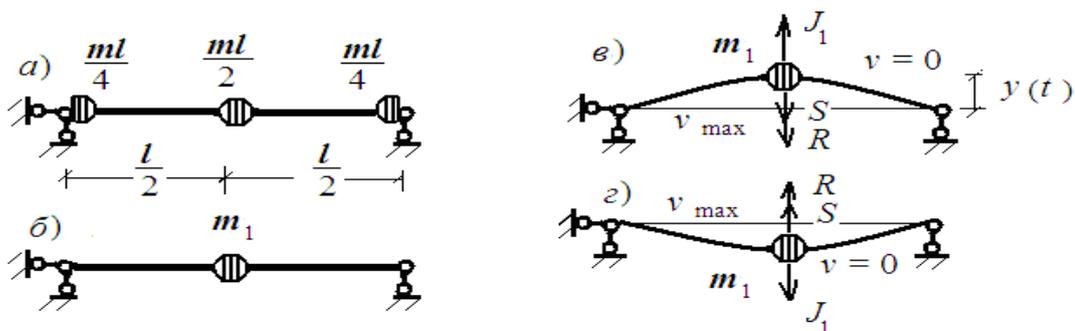


Рис. 2.4. Балка как система с одной степенью свободы

Восстанавливающая сила S – это сила упругого сопротивления, с которой балка действует на массу, стремясь вернуть её в первоначальное положение статического равновесия (рис. 2.4, в, г). В линейно деформируемой системе восстанавливающая сила прямо пропорциональна отклонению массы от положения равновесия $y(t)$ и определяется выражением

$$S = r_{11}y_1(t),$$

где r_{11} – коэффициент пропорциональности, или коэффициент жёсткости конструкции, определяемый её упругими свойствами.

Коэффициент жёсткости – это сила, которая, будучи приложена к конструкции по направлению колебания массы, вызывает перемещение, равное единице.

Назначение индексов такое же, как и в методе перемещений. Жёсткость, как известно, является обратной величиной по отношению к податливости, то есть

$$r_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (2.5)$$

где δ_{11} – коэффициент податливости, или, что тоже самое, перемещение от единичной силы.

В первом приближении решим задачу без учёта сил неупругого сопротивления R . В результате, на массу при колебаниях будут действовать только две силы S и J . Скорость колебаний массы будет максимальной при прохождении её через положение равновесия и равной нулю – в крайних положениях (рис. 2.4, в, г). При переходе массы из положения равновесия в крайнее положение происходит замедление движения, то есть ускорение будет направлено всегда, как и восстанавливающая сила, к положению недеформированного состояния. Даламберова же сила инерции, как следует из её определения (2.4), всегда будет направлена в сторону, противоположную ускорению, то есть от положения равновесия.

Если теперь выделить часть стержня с массой и составить уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на ось, параллельную линии движения массы), то получим $S - J = 0$.

Подставим в это равенство значения сил

$$r_{11}y_1(t) + m_1\ddot{y}_1(t) = 0. \quad (2.6)$$

Чтобы найти выражение для прогиба, перенесём второй член вправо, разделим всё на жёсткость r_{11} и, учитывая (2.5), получим

$$y_1(t) = -\delta_{11}m_1\ddot{y}_1(t) = \delta_{11}J_1(t). \quad (2.7)$$

Разделим уравнение (2.6) на m_1 и введём обозначение

$$\omega_1^2 = \frac{r_{11}}{m_1} = \frac{1}{\delta_{11}m_1}. \quad (2.8)$$

В результате получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = 0. \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$y_1(t) = e^{kt}. \quad (2.10)$$

Подстановка (2.10) в (2.9) и сокращение величины e^{kt} приводит к характеристическому уравнению $k^2 + \omega_1^2 = 0$.

Корни этого уравнения: $k_1 = \omega_1\sqrt{-1} = i\omega_1$ и $k_2 = -\omega_1\sqrt{-1} = -i\omega_1$.

Таким образом, решение уравнения (2.9) будет состоять из двух членов с двумя произвольными постоянными D_1 и D_2 :

$$y_1(t) = D_1e^{i\omega_1 t} + D_2e^{-i\omega_1 t}.$$

С помощью формулы Эйлера

$$e^{\pm ia} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha. \quad (2.11)$$

преобразуем решение к следующему виду:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= D_1(\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + D_2(\cos \omega_1 t - i \sin \omega_1 t) = \\ &= (D_1 + D_2)\cos \omega_1 t + (D_1 - D_2)i \sin \omega_1 t. \end{aligned}$$

Введём новые обозначения для произвольных постоянных:
 $D_1 + D_2 = A$ и $(D_1 - D_2)i = B$.
 В итоге будем иметь

$$y_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t. \quad (2.12)$$

Скорость колебаний массы m_1 определяется первой производной по времени от этого выражения:

$$v_1(t) = \dot{y}_1(t) = -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_1 B \cos \omega_1 t. \quad (2.13)$$

Произвольные постоянные определим из начальных условий.
 Пусть при $t = 0$, $y_1(t) = y_{10}$ и $v_1(t) = v_{10}$.

Подставим эти значения в выражения перемещения и скорости: $y_{10} = A$; $v_{10} = \omega_1 B$, откуда $B = \frac{v_{10}}{\omega_1}$.

С этими значениями постоянных окончательное выражение для перемещения примет вид:

$$y_1(t) = y_{10} \cos \omega_1 t + \frac{v_{10}}{\omega_1} \sin \omega_1 t. \quad (2.14)$$

Если принять, что в начальный момент времени при $t = 0$; $y_{10} = 0$, то выражение (2.14) будет короче:

$$y_1(t) = \frac{v_{10}}{\omega_1} \sin \omega_1 t. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что выведенная из состояния покоя масса будет совершать простые гармонические колебания относительно положения равновесия. График этой функции приведен на рис. 2.5. Из графика видно, что наибольшее отклонение массы от положения равновесия равно постоянной величине $\frac{v_{10}}{\omega_1}$, которая называется *амплитудой*. *Удвоенная амплитуда называется размахом колебаний*.

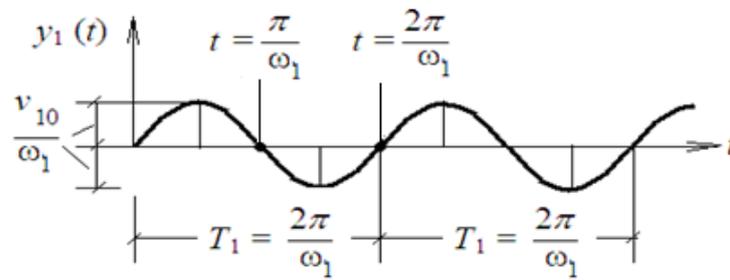


Рис. 2.5. График перемещений массы во времени при свободных колебаниях

Время T_1 , за которое масса совершает полный цикл колебаний, называется периодом колебаний. Из графика видно, что

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (2.16)$$

Число полных циклов колебаний в единицу времени называется частотой колебаний.

Из (2.16) $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – число колебаний за время 2π секунд.

Эта частота называется *угловой*. В системе с одной степенью свободы она определяется по формуле (2.8)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}. \quad (2.17)$$

Число колебаний в одну секунду измеряется в Гц (Герцах). Через угловую частоту частота в Гц выражается следующим образом:

$$\nu = \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{1}{\text{с}}.$$

Во всех уравнениях движения масс присутствует угловая частота. Частота в Герцах часто приводится в справочниках, поэтому при использовании последних следует быть внимательным.

В инженерной практике нередко используется так называемая техническая частота – число оборотов или циклов колебаний в минуту. Её можно выразить через угловую частоту:

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega_1. \quad (2.18)$$

Частота или период колебаний являются основными характеристиками при расчёте конструкций на динамические воздействия.

Решение (2.12) можно представить в ином виде через начальную фазу колебаний, если ввести новые произвольные постоянные

$$A = A_1 \sin \nu_1; \quad B = A_1 \cos \nu_1.$$

В результате

$$y_1(t) = -A_1 (\sin \nu_1 \cos \omega_1 t + \cos \nu_1 \sin \omega_1 t).$$

Это выражение представляет собой синус суммы двух углов

$$y_1(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t + \nu_1). \quad (2.19)$$

Здесь A_1 – амплитуда колебаний; ν_1 – начальная фаза колебаний.

Для наглядности гармонических колебаний можно использовать круговую диаграмму (рис. 2.6) [8]. С этой целью на плоскости вводится вектор длиной A_1 , который вращается с постоянной угловой скоростью, равной ω_1 (отсюда происходит термин угловая частота). Начальное положение вектора задаётся углом ν_1 . Проектируя вектор на вертикальную ось, получим закон движения в форме (2.19). Значения A_1 и ν_1 можно выразить через A и B :

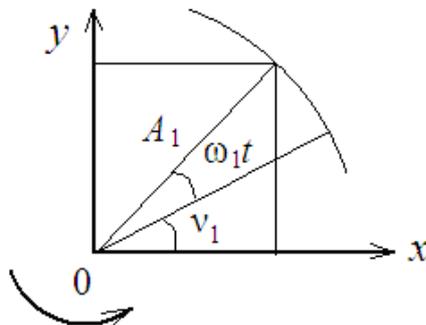


Рис. 2.6. Круговая диаграмма простых гармонических колебаний

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1 \sin \nu_1}{A_1 \cos \nu_1} = \operatorname{tg} \nu_1, \text{ откуда } \nu_1 = \operatorname{arctg} \frac{A}{B}.$$

$$A^2 + B^2 = A_1^2 \sin^2 \nu_1 + A_1^2 \cos^2 \nu_1 = A_1^2 (\sin^2 \nu_1 + \cos^2 \nu_1) = A_1^2;$$

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}. \text{ При } A = y_{10} = 0 \text{ по-прежнему } A_1 = \frac{v_{10}}{\omega_1}.$$

2.4.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки

Вынужденными называются колебания, которые вызываются переменными внешними воздействиями.

Наиболее часто в инженерной практике приходится иметь дело с гармоническим воздействием (2.1), (рис. 2.1, б). В выражении (2.1) представлена обобщённая сила, вместо которой может быть и вибрационный момент, или распределённая нагрузка, или их комбинации. При действии нескольких сил в одном решении, с целью упрощения задачи, предполагается, что все они имеют один закон изменения во времени (начинают действовать в одно и то же время и с одной и той же частотой θ) и отличаются лишь амплитудами. Если на практике это условие не удовлетворяется, то для каждого воздействия выполняют свой расчёт, а затем, на основании принципа независимости действия сил, результаты суммируют для определённых моментов времени.

Для решения поставленной задачи опять выделим часть стержня с массой m , на основании принципа Даламбера, составим уравнение суммы проекций всех сил на направление перемещения массы

$$\sum Y = S + R - J = 0. \quad (2.20)$$

К части стержня с массой (рис. 2.1, в, г) приложим дополнительно возмущающую силу, направленную в сторону от положения равновесия. В итоге в уравнении (2.20) появится дополнительный член

$$S + R - J - F \sin \theta t = 0.$$

Подставим сюда значения сил и перенесём член, представляющий нагрузку, вправо, как известную величину:

$$m_1 y_1(t) + \beta Y_1(t) + r_{11} y_1(t) = F \sin \theta t. \quad (2.21)$$

Разделим все члены на m_1 и введём принятые ранее обозначения:

$$y_1(t) + 2\alpha_1 y_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = \frac{F}{m_1} \sin \theta t. \quad (2.22)$$

В итоге получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. При решении уравнения (2.22) ограничимся рассмотрением случая малых сопротивлений, когда $\alpha_1 < \omega_1$.

Полное решение уравнения (2.22) состоит из решения однородного уравнения и частного решения, учитывающего вид нагрузки. Решение однородного уравнения дано выражением

$$y_1(t) = e^{-\alpha_1 t} (A \cos \omega_\alpha t + B \sin \omega_\alpha t), \quad (2.23)$$

где ω_α заменим на ω_1 .

Частное решение будем искать в виде

$$y_F(t) = C \cos \theta t + D \sin \theta t. \quad (2.24)$$

$$y_F(t) = \theta(-C \sin \theta t + D \cos \theta t); \quad y_F = -\theta^2(C \cos \theta t + D \sin \theta t).$$

Подставим эти значения в уравнение (2.22) и сгруппируем его члены при $\sin \theta t$ и $\cos \theta t$:

$$\begin{aligned} & \cos \theta t (-\theta^2 C + 2\alpha_1 \theta D + \omega_1^2 C) + \\ & \sin \theta t (-\theta^2 D - 2\alpha_1 \theta C + \omega_1^2 D - \frac{F}{m_1}) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось при любых значениях t , необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю коэффициенты при $\cos \theta t$ и $\sin \theta t$. В результате получаем два уравнения с двумя неизвестными C и D .

$$(\omega_1^2 - \theta^2)C + 2\alpha_1 \theta D = 0, \quad -2\alpha_1 \theta C + (\omega_1^2 - \theta^2)D = \frac{F}{m_1}.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$C = -\frac{2\alpha_1 \theta F}{m_1 \gamma^2}; \quad D = \frac{F(\omega_1^2 - \theta^2)}{m_1 \gamma^2},$$

где

$$\gamma^2 = (\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha_1^2\theta^2. \quad (2.25)$$

Итак, полное решение уравнения (2.22) примет вид

$$y_1(t) = e^{-\alpha_1 t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \frac{F}{m_1 \gamma^2} [-2\alpha_1 \theta \cos \theta t + (\omega_1^2 - \theta^2) \sin \theta t], \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) показывает, что движение массы в рассматриваемом случае состоит из свободных затухающих колебаний с частотой ω_1 , зависящих от начальных условий, и вынужденных колебаний, совершаемых с частотой возмущающей силы θ . Свободные колебания относительно быстро затухают.

Период времени, в течение которого совместно существуют вынужденные и затухающие колебания, называется переходным.

Далее будут иметь место установившиеся вынужденные колебания, когда масса колеблется с частотой возмущающей силы.

Рассмотрим вначале ради простоты изложения установившиеся колебания без учёта диссипативных сил, то есть возьмём решение (2.26) при $A = B = \alpha_1 = 0$.

$$y_1(t) = \frac{F \sin \theta t}{m_1 (\omega_1^2 - \theta^2)} = \frac{F \sin \theta t}{m_1 \omega_1^2 (1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2})}. \quad (2.27)$$

Учитывая (2.2), заменим ω_1^2 и введём обозначение $y_{ст} = F\delta_{11}$ – статическое перемещение массы от амплитудного значения возмущающей силы. В результате получим

$$y_1(t) = y_{ст} \frac{\sin \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}.$$

Отношение какой-либо величины, в частности перемещения, полученной при динамическом расчёте, к её значению, полученному при статическом расчёте, называется динамическим коэффициентом, то есть,

$$\mu(t) = \frac{y_1(t)}{y_{\text{ст}}} = \frac{\sin \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}.$$

Максимальное значение динамического коэффициента будет иметь место при $\sin \theta t = 1$

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}. \quad (2.28)$$

Динамический коэффициент играет важную роль при расчёте систем с одной степенью свободы, когда возмущающая вибрационная сила приложена по направлению перемещения массы. Тогда максимальные перемещения и усилия определяются выражениями:

$$y_{\text{max}} = \mu y_{\text{ст}}; M_{\text{max}} = \mu M_{\text{ст}}. \quad (2.29)$$

Как видно из выражения (2.28), динамический коэффициент зависит от соотношения частот вынужденных и собственных колебаний. На рис. 2.7 изображен график этой зависимости.

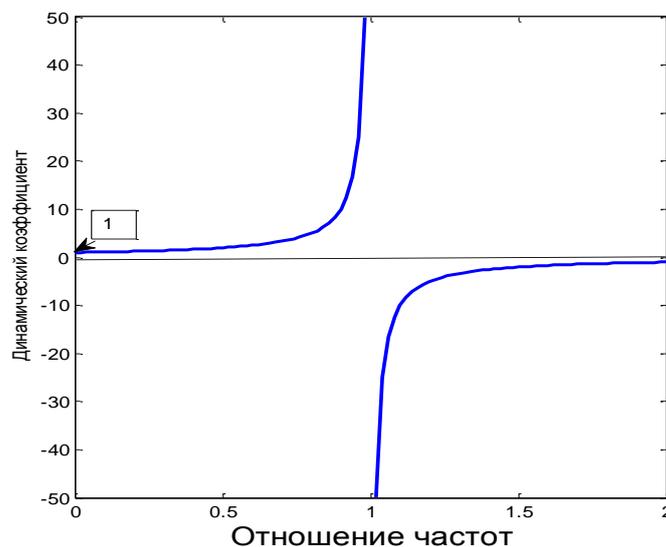


Рис. 2.7. График изменения динамического коэффициента

График показывает, что при $\theta < \omega_1$ минимальное значение $\mu = 1$. При возрастании θ коэффициент μ тоже увеличивается, но колебания происходят в той же фазе (направления силы и перемещений

совпадают). Однако, когда величина частоты вынужденных колебаний приближается к значению частоты свободных колебаний, динамический коэффициент резко возрастает и при $\theta = \omega_1$, $\mu \rightarrow \infty$. Это явление, когда совпадают частоты вынужденных и собственных колебаний, называется резонансом.

Резонанс исключительно опасен для строительных конструкций, так как при нём резко увеличиваются перемещения и усилия. В этой связи, при практических расчетах, из-за неточности вычислений частот вводится не просто резонансная частота $\theta = \omega_1$, а зона резонансной частоты:

$$(1 - \varepsilon)\theta \leq \omega_p \leq (1 + \varepsilon)\theta,$$

где $\varepsilon = 0,15 \div 0,35$ принимается в зависимости от класса ответственности сооружения.

При $\theta > \omega_1$ динамический коэффициент уже будет иметь вид

$$\mu = -\frac{\sin \theta t}{\omega_1^2 - 1} = \frac{\sin(\theta t + \pi)}{\omega_1^2 - 1},$$

То есть при резонансе происходит сдвиг по фазе на величину π (направления силы и перемещений будут противоположными), причем при $\theta = \omega_1$ сдвиг по фазе равен $0,5 \pi$. В случае, когда частота возмущающей силы значительно превосходит ω_1 , динамический коэффициент стремится к нулю.

Представленная теория не отражает реального поведения конструкций, так как на практике, если резонанс и приводит к разрушению конструкции, то происходит это только с течением времени, а не мгновенно.

Как показывает инженерная практика, неограниченного возрастания амплитуды во времени не бывает из-за наличия диссипативных сил, которые в изложенном выше решении не учитывались.

На рис. 2.8 показан график зависимости динамического коэффициента от соотношения частот вынужденных и свободных колебаний при различных значениях относительного коэффициента,

учитывающего неупругое сопротивление $\alpha_{от} = \frac{\alpha_1}{\omega_1}$.

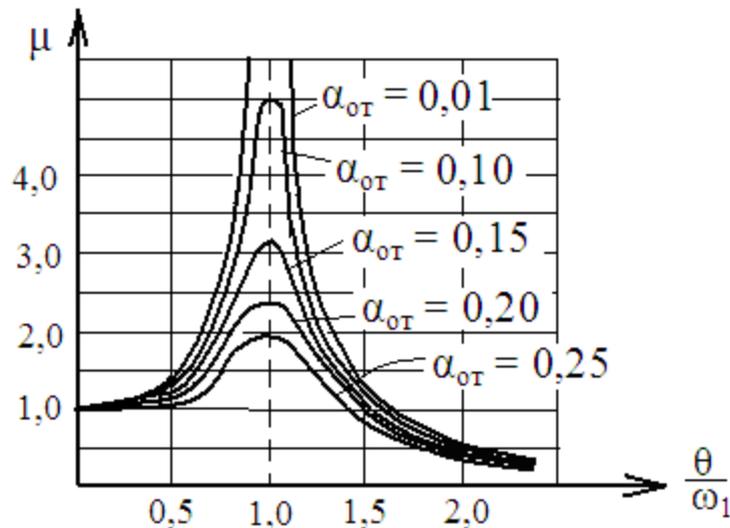


Рис. 2.8. График изменения динамического коэффициента при учете диссипативных сил

Как следует из анализа этого графика, диссипативные силы значительно влияют на динамические перемещения и усилия конструкции в зоне резонанса. Но так как проектирование строительных конструкций при установившихся колебаниях не допускает резонанса, то в первом приближении их динамический расчёт можно проводить без учёта сил неупругого сопротивления, что и предлагается в справочнике [10] при отличии частоты вынужденных колебаний на 10% от ближайшей частоты свободных колебаний.

2.5. Колебания систем с несколькими степенями свободы

2.5.1. Свободные колебания

Рассмотрим балку, распределённую массу которой сосредоточим в n сечениях: m_1, m_2, \dots, m_n (рис. 2.9).

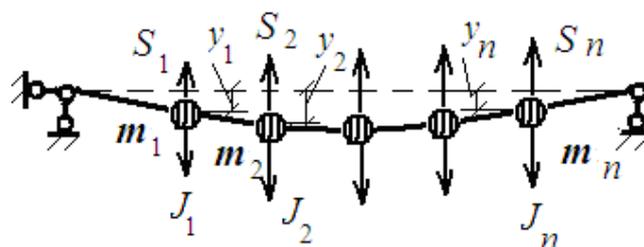


Рис. 2.9. Система с несколькими степенями свободы

При принятых допущениях положение каждой массы определяется одним параметром y_j , поэтому рассматриваемая система имеет n

Вторые производные по времени от этих выражений примут вид:

$$\begin{aligned}
 y_{1j}(t) &= -\omega_j^2 a_{1j} \sin(\omega_j t + v_j), \\
 y_{2j}(t) &= -\omega_j^2 a_{2j} \sin(\omega_j t + v_j), \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_{nj}(t) &= -\omega_j^2 a_{nj} \sin(\omega_j t + v_j).
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Подставим значения (2.32) и (2.33) в (2.31) и сделаем приведение подобных членов. Каждый член имеет множитель $\sin(\omega_j t + v_j)$. Поскольку решение справедливо для любого момента времени, то возьмём тот момент времени, когда $\sin(\omega_j t + v_j) = 1$. В результате придём к однородной системе алгебраических уравнений относительно амплитуд a_{kj} ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned}
 (\delta_{11} m_1 \omega_j^2 - 1) a_{1j} + \delta_{12} m_2 \omega_j^2 a_{2j} + \dots + \delta_{1n} m_n \omega_j^2 a_{nj} &= 0, \\
 \delta_{21} m_1 \omega_j^2 a_{1j} + (\delta_{22} m_2 \omega_j^2 - 1) a_{2j} + \dots + \delta_{2n} m_n \omega_j^2 a_{nj} &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \delta_{n1} m_1 \omega_j^2 a_{1j} + \delta_{n2} m_2 \omega_j^2 a_{2j} + \dots + (\delta_{nn} m_n \omega_j^2 - 1) a_{nj} &= 0.
 \end{aligned}$$

Для краткости записи разделим все уравнения на ω_j^2 и введём обозначение:

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega_j^2}.
 \tag{2.34}$$

В окончательном виде будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (\delta_{11} m_1 - \lambda_j) a_{1j} + \delta_{12} m_2 a_{2j} + \dots + \delta_{1n} m_n a_{nj} &= 0, \\
 \delta_{21} m_1 a_{1j} + (\delta_{22} m_2 - \lambda_j) a_{2j} + \dots + \delta_{2n} m_n a_{nj} &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \delta_{n1} m_1 a_{1j} + \delta_{n2} m_2 a_{2j} + \dots + (\delta_{nn} m_n - \lambda_j) a_{nj} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Известно, что однородные уравнения (без свободных членов) имеют два решения. Одно из них тривиальное, когда все амплитуды

$a_{kj} = 0$. Но оно не представляет интереса, так как в этом случае колебания отсутствуют. Отличные от нуля значения амплитуд возможны тогда, когда определитель из коэффициентов при a_{kj} равен нулю, то есть:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_j) & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda_j) & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & (\delta_{nn}m_n - \lambda_j) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.36)$$

или в матричной форме

$$|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}| = 0. \quad (2.37)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица [5]. Полученный определитель называется *характеристическим уравнением матрицы коэффициентов \mathbf{A}* .

Раскрывая определитель (2.37), получим уравнение степени n относительно λ_j . Решая это уравнение, найдём n значений λ_j и соответственно n значений частот свободных колебаний из (2.34)

$$\omega_j = \sqrt{\frac{1}{\lambda_j}}. \quad (2.38)$$

Берутся только положительные значения квадратного корня (2.38). Некоторые из них могут оказаться одинаковыми. *Одинаковые частоты называются кратными. Совокупность всех угловых частот называется спектром частот рассматриваемой системы.* Наименьшая частота из этого спектра называется частотой основного тона. Решение уравнения (2.36) легко получить лишь для $n \leq 3$. Для решения уравнений более высокого порядка рекомендуется использовать какую-либо вычислительную систему, например MatLAB.

2.5.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки с постоянной частотой

Назначение коэффициентов податливости δ_{jk} такое же, как и ранее.

При установившихся колебаниях все перемещения и, кстати, внутренние усилия будут следовать закону изменения возмущающей силы, то есть

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1 \sin \theta t, \\ y_2(t) &= a_2 \sin \theta t, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(t) &= a_n \sin \theta t, \end{aligned}$$

где a_j – амплитуды вынужденных колебаний масс. Ускорения масс равны вторым производным по времени

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -\theta^2 a_1 \sin \theta t = -\theta^2 y_1(t), \\ y_2(t) &= -\theta^2 a_2 \sin \theta t = -\theta^2 y_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(t) &= -\theta^2 a_n \sin \theta t = -\theta^2 y_n(t), \end{aligned}$$

а силы инерции по определению (2.4) будут равны:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= -m_1 y_1(t) = m_1 \theta^2 y_1(t), \\ J_2(t) &= -m_2 y_2(t) = m_2 \theta^2 y_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ J_n(t) &= -m_n y_n(t) = m_n \theta^2 y_n(t). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Используя (2.41), выразим перемещения через силы инерции

$$y_j(t) = \frac{J_j(t)}{m_j \theta^2}. \tag{2.42}$$

Теперь заменим выражениями типа (2.42) перемещения в (2.40). В итоге в (2.40) неизвестными останутся только силы инерции. Перенесём в (2.40) все члены влево и выполним приведение подобных членов. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых сил инерции

$$\left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2}\right) J_1(t) + \delta_{12} J_2(t) + \dots + \delta_{1n} J_n(t) + \Delta_{1F} \sin \theta t = 0,$$

Для выявления последствий этого факта представим решение уравнений (2.45) с использованием правила Крамера $J_j = -|D_j|/|D|$, где $|D|$ – определитель системы уравнений (2.45), состоящий из коэффициентов при неизвестных силах инерции. Запишем его с учётом (2.44)

$$|D| = \begin{vmatrix} (\delta_{11} - \frac{1}{m_1\theta^2}) & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & (\delta_{22} - \frac{1}{m_2\theta^2}) & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & (\delta_{nn} - \frac{1}{m_n\theta^2}) \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя из каждого столбца множитель $\frac{1}{m_j}$

$$|D| = \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n} \begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\theta^2}) & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & (\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\theta^2}) & \dots & \delta_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_2 & \dots & (\delta_{nn} m_n - \frac{1}{\theta^2}) \end{vmatrix}.$$

Если в этом определителе заменить θ любым значением частоты свободных колебаний ω_j и учесть обозначение (2.34), то получим характеристическое уравнение (2.36). Как известно, оно равно нулю. Следовательно, при совпадении частоты возмущающей силы с любой из частот свободных колебаний определитель $|D|$ будет равен нулю. И по правилу Крамера видно, что в этом случае силы инерции будут стремиться к бесконечности. Последнее свидетельствует о том, что в системах с несколькими степенями свободы резонанс будет иметь место при совпадении частоты возмущающей силы с любой из частот свободных колебаний. Выявленное обстоятельство необходимо учитывать при проектировании конструкций, определяя не одну низшую частоту свободных колебаний, но и последующие частоты. А затем их сравнивать с возможными частотами возмущающих сил, прежде всего для стационарного процесса.

Следует иметь в виду, что приведённое решение получено без учёта диссипативных сил. Учёт последних, как и в случае систем с одной степенью свободы, даёт при $\theta = \omega_j$ конечные значения усилий и перемещений, но они будут относительно большими, недопустимыми по нормам, если, конечно, они не приведут к разрушению конструкции.

2.6. Использование симметрии конструкции при решении задач динамики

Определение частот свободных колебаний представляет собой относительно трудоёмкую задачу. Поэтому следует пользоваться возможными упрощениями при решении этой задачи. Заметное снижение трудоёмкости вычислений можно получить при расчёте симметричных систем. Прежде всего, уточним понятие симметричной системы при решении задач динамики. *Система является симметричной, если она имеет симметричную геометрическую схему, одинаковые жесткости в симметрично расположенных сечениях и элементах и симметричное расположение масс.*

Упрощение достигается за счёт разделения характеристического уравнения (2.36) при одной оси симметрии на два уравнения меньшего порядка. При этом сумма порядков двух уравнений остаётся равной порядку исходного уравнения. Разделение уравнения (2.36) можно достичь двумя путями – либо использованием групповых перемещений, либо разделением системы по оси симметрии на две половины.

С целью сокращения трудоёмкости динамического расчета симметричных систем рекомендуется, как и при статическом расчёте, использовать либо группировку неизвестных сил инерции, либо разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную. При разложении нагрузки рассматривается по половине системы с соответствующими граничными условиями, а затем результаты суммируются. Для симметричных систем справедливы следующие положения:

1) при действии симметричной вибрационной нагрузки все кососимметричные неизвестные силы инерции равны нулю и наоборот;

2) во всякой симметричной системе при симметричной (косо-симметричной) нагрузке явление резонанса будет иметь место только в тех случаях, когда частота вибрационной нагрузки совпадает с частотами свободных колебаний, которым соответствуют симметричные (кососимметричные) формы колебаний. При этом, следует помнить об идеализации периодических колебаний.

При первом подходе число групповых перемещений равно числу степеней свободы, но эпюры от групповых единичных сил получаются либо симметричными, либо кососимметричными. В результате, при определении перемещений некоторые побочные коэффициенты оказываются равными нулю, что и приводит к разделению матрицы \mathbf{A} на две

$$|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_c - \lambda_{cj} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{kc} - \lambda_{kcj} \mathbf{E} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_c - \lambda_{cj} \mathbf{E}| \cdot |\mathbf{A}_{kc} - \lambda_{kcj} \mathbf{E}| = 0$$

или

$$|\mathbf{A}_c - \lambda_j \mathbf{E}| = 0 \text{ и } |\mathbf{A}_{kc} - \lambda_j \mathbf{E}| = 0.$$

При втором подходе сразу рассматривается только половина системы. При этом нужно быть внимательным, назначая граничные условия в месте разделения системы, то есть на оси симметрии. Рассмотрим, например, симметричную систему, представленную на рис. 2.7, а. $m_3 = m_1$; $EI - \text{const}$. В целом для системы $n = 3$.

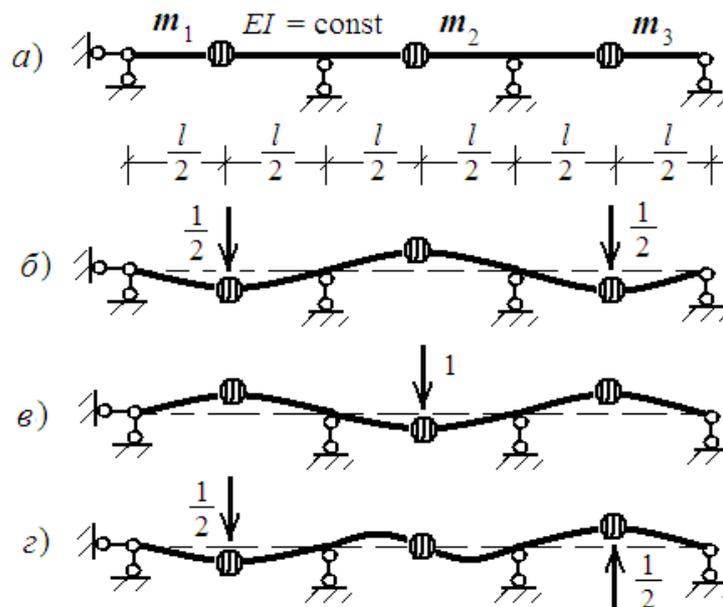


Рис. 2.10. Разложение колебаний симметричной системы

На рис. 2.10, б, в изображены симметричные формы колебаний, а на рис. 2.10, г – кососимметричная форма. На рис. 2.7, б, г также показаны групповые единичные силы. Изображённые формы колебаний позволяют назначить граничные условия на оси симметрии для половины системы.

На рис. 2.11, а изображены граничные условия для симметричных колебаний. На оси симметрии отсутствует поворот, но имеется вертикальное смещение. Следовательно, $n_c = 2$. На рис. 2.11, б представлены граничные условия для кососимметричных колебаний. На оси симметрии имеется поворот, но отсутствует линейное смещение.

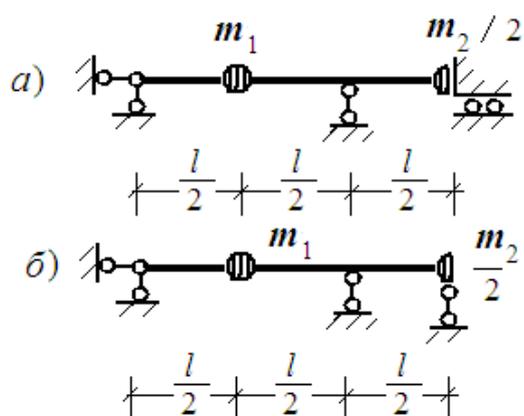


Рис. 2.11. Граничные условия для половины симметричной системы

Следовательно, $n_{kc} = 1$, а $n = n_c + n_{kc} = 2 + 1 = 3$. Но вместо определителя третьего порядка составляются два определителя – первого и второго порядка:

$$|\delta_{33}m_3 - \lambda_j^{kc}| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_j^c) & \delta_{12} \frac{m_2}{2} \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda_j^c) \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление этих двух определителей существенно легче, чем вычисление одного определителя третьего порядка.

2.7. Контрольные вопросы

1. Какая нагрузка называется динамической?

2. Чем определяется число степеней свободы?
3. Всегда ли совпадает число сосредоточенных масс и число степеней свободы?
4. Каковы особенности вибрационной нагрузки?
5. Какие силы действуют на массу при колебании?
6. Какой принцип рассматривается при решении задач динамики и как он формулируется?
7. Что такое частота свободных колебаний и от каких характеристик конструкций она зависит?
8. Какова взаимосвязь между чистотой свободных колебаний и периодом колебаний?
9. Какая формула Эйлера используется при решении дифференциального уравнения колебаний?
10. По какому закону во времени изменяется перемещение массы при свободном колебании?
11. Дать определение свободных колебаний.
12. Какова зависимость между круговой частотой и частотой в Герцах?
13. Каковы причины затухания свободных колебаний?
14. Что такое логарифмический декремент, чему он равен и как он определяется?
15. Что такое динамический коэффициент?
16. Какое явление происходит при совпадении частот собственных и вынуждающих колебаний?
17. Какое явление происходит при совпадении частот собственных и вынуждающих колебаний?
18. Для какой цели в конструкции вводится несколько степеней свободы?
19. Из каких уравнений определяются частоты свободных колебаний в системе с несколькими степенями свободы?
20. Каким свойством обладают главные формы колебаний и в чём они заключаются?
21. Можно ли построить формы колебаний конструкции, используя однородные уравнения. Если можно, то, как это делается?
22. Каково определение симметричной системы при динамическом расчёте?

23. Можно ли получить упрощения при определении частот свободных колебаний в симметричных системах?

24. В какой системе определяются коэффициенты и свободные члены при расчёте на динамическую нагрузку?

25. В чём отличие динамических уравнений от обычных уравнений метода сил?

2.8. РГР № 5. Динамический расчёт плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки

Задание: Определить угловую частоту свободных колебаний. Построить динамическую эпюру изгибающих моментов и формы свободных колебаний сосредоточенных масс. Исходные данные определяются из табл. 2.1 и схемам, представленным на рис. 2.12.

Таблица 2.1

Исходные данные к задачам РГР № 5

Первая цифра шифра	m_1 , т	ℓ , м	h_1 , м	Вторая цифра шифра	$F_1(t)$, кН	$F_2(t)$, кН	m_2 , т	Третья цифра шифра № схемы	EI , кН·м ²	h_2 , м	$\alpha = \theta/\omega$
0	1,2	2	3	0	4	0	1,8	0	6200	2	0,6
1	2,4	4	5	1	0	4	2,2	1	5300	3	0,7
2	1,2	3	2	2	3	0	1,2	2	4800	4	0,5
3	1,6	5	3	3	0	3	1,6	3	6400	2	0,5
4	2,2	4	4	4	5	0	1,4	4	4600	1	0,6
5	1,4	2	4	5	0	5	1,4	5	5200	3	0,75
6	1,2	3	3	6	6	0	2,4	6	4400	1	0,6
7	2,4	4	4	7	0	6	1,6	7	4700	2	0,7
8	2,2	3	2	8	4	0	2,2	8	5400	2	0,6
9	2,6	5	4	9	0	4	2,6	9	6400	3	0,8

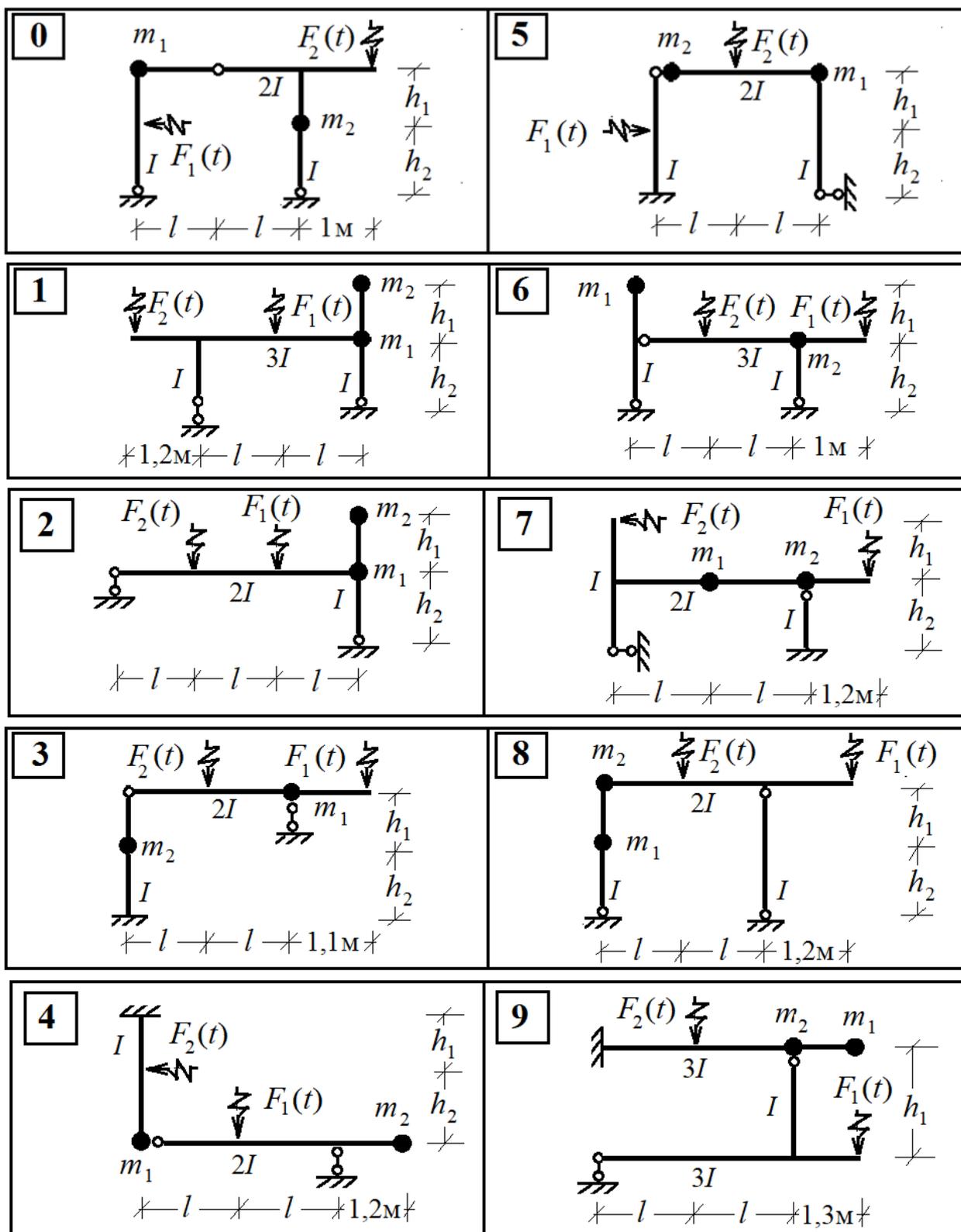


Рис. 2.12. Схемы заданий к задачам РГР № 5

Последовательность расчёта

1. Вычертить схему рамы в масштабе длин. Указать величины масс и жёсткости стержней.
2. Определить степень статической неопределёмости рамы.

3. Определить число степеней свободы массы заданной системы и величину сосредоточенных масс.

4. Записать уравнение частот свободных колебаний в общем виде.

5. Построить эпюры M_i ($i = 1, 2, \dots$) от последовательного приложения единичных безразмерных сил по направлению колебаний сосредоточенных масс.

6. Определить коэффициенты уравнения частот:

$$\delta_{ii} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_i}{EI} dx.$$

7. Определить корни частотного уравнения λ_i ($i = 1, 2, \dots$) и произвести проверку правильности его решения: $S_p(D) = \sum \lambda_i$; $|D| = \Pi \cdot \lambda_i$, где $S_p(D)$ – след (сумма коэффициентов) матрицы, составленной из коэффициентов частотного уравнения.

$|D|$ – величина определителя этой матрицы.

8. Определить частоты свободных колебаний: $\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$.

9. Определить периоды свободных колебаний: $T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$.

10. Построить формы свободных колебаний сосредоточенных масс. Абсолютные значения амплитуд из системы уравнений непосредственно определить нельзя, так как однородные уравнения не содержат свободные члены. Поэтому для построения форм колебаний определяются не сами амплитуды, а соотношения между ними.

Для построения форм колебаний достаточно использовать одно уравнение, в которое подставляется одна из амплитуд, равная единице, а другая определяется: $(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_i) \cdot a_{1i} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{2i} = 0$; ($i = 1, 2$);

для λ_1 ($i = 1, a_{11} = 1$): $(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_1) \cdot a_{11} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{21} = 0$;

для λ_2 ($i = 2, a_{12} = 1$): $(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_2) \cdot a_{12} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{22} = 0$.

Из этих уравнений определить a_{21} и a_{22} .

11. Определить угловую скорость $\theta = \alpha \cdot \omega$.

12. Записать в общем виде систему канонических уравнений для определения амплитудных значений инерционных сил.

13. Построить в заданной расчётной схеме эпюру изгибающих моментов от действия амплитудных значений вибрационной нагрузки.

14. Определить главные коэффициенты системы канонических уравнений:

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \cdot \theta^2}.$$

Побочные коэффициенты системы канонических уравнений имеют те же значения, что и в уравнении частот.

15. Определить свободные члены системы канонических уравнений:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{M_F M_i}{EI} dx.$$

16. Решив систему канонических уравнений в численном виде, определить амплитудные значения инерционных сил J_i .

17. Построить динамическую эпюру изгибающих моментов:

$$M_{\text{дин}} = M_1 \cdot J_1 + M_2 \cdot J_2 + \dots + M_n \cdot J_n + M_F.$$

Пример решения задачи. Определить угловую частоту свободных колебаний. Построить динамическую эпюру изгибающих моментов и формы свободных колебаний сосредоточенных масс.

Дано: $F(t) = 1,6 \text{ кН}$, $\underline{m}_1 = 1,0 \text{ т}$; $\underline{m}_2 = 1,3 \text{ т}$, $\underline{m}_3 = 1,6 \text{ т}$, $EI = 7000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$, $\theta = 0,56 \omega_{\text{мин}}$, $EI_{\text{риг}} = 3EI_{\text{ст}}$

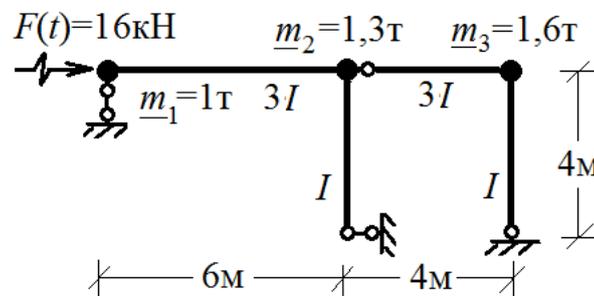


Рис. 2.13. Заданная схема

- Определяем степень статической неопределимости:

$n_{\text{ст}} = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 2 - 6 = 0$. Система статически определима.

- Определяем число степеней свободы массы заданной системы:

мы:

$$n = 2.$$

Определяем величину сосредоточенных масс:

$$m_1 = \underline{m}_2 = 1,3 \text{ т}, m_2 = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = 1,0 + 1,3 + 1,6 = 3,9 \text{ т}.$$

- Уравнение частот свободных колебаний в общем виде:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_i) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{12}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0;$$

• Прикладывая единичные безразмерные силы по направлению колебаний сосредоточенных масс, определяем опорные реакции и строим единичные эпюры моментов:

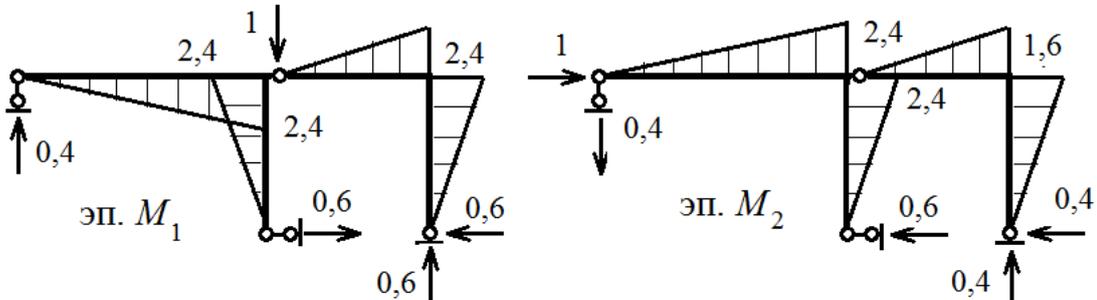


Рис. 2. 14. Единичные эпюры моментов

• Определяем коэффициенты уравнения частот:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 \cdot 2 +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 = \frac{1}{EI} 21,76 = \frac{21,76}{7000} = 3,11 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м};$$

$$\delta_{12} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 +$$

$$\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 = -\frac{1}{EI} 5,33 = -\frac{5,33}{7000} =$$

$$= -0,76 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м};$$

$$\delta_{22} = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 = \frac{1}{EI} 16,07 = \frac{16,07}{7000} =$$

$$= 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м}.$$

• Определяем корни частотного уравнения λ_i (λ_1 и λ_2):

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{EI} 21,76 \cdot 1,3 - \lambda_i\right) & \frac{1}{EI} (-5,33 \cdot 3,9) \\ \frac{1}{EI} (-5,33 \cdot 1,3) & \left(\frac{1}{EI} 16,07 \cdot 3,9 - \lambda_i\right) \end{vmatrix}$$

умножаем всё на EI :

$$(28,288 - \lambda_i \cdot EI) \cdot (62,673 - \lambda_i \cdot EI) - 144,033 = 0;$$

$(\lambda_i \cdot EI)^2 - 90,961 \cdot \lambda_i \cdot EI + 1628,861 = 0$; Решаем уравнение:

$$\lambda_1 = \frac{1}{EI} 66,45; \quad \lambda_2 = \frac{1}{EI} 24,51;$$

• Проверяем правильность решения уравнения:

$$S_p(D) = \sum \lambda_i: \delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2 = \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$S_p(D) = \delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2 = \frac{1}{EI} 21,76 \cdot 1,3 + \frac{1}{EI} 16,07 \cdot 3,9 = \frac{1}{EI}$$

90,96;

$$\sum \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{EI} 66,45 + \frac{1}{EI} 24,51 = \frac{1}{EI} 90,96;$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D \\ D \end{vmatrix} &= \Pi \cdot \lambda_i: (\delta_{11} \cdot m_1) \cdot (\delta_{22} \cdot m_2) - (\delta_{12} \cdot m_1) \cdot (\delta_{21} \cdot m_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2; \\ \begin{vmatrix} D \\ D \end{vmatrix} &= (\delta_{11} \cdot m_1) \cdot (\delta_{22} \cdot m_2) - (\delta_{12} \cdot m_1) \cdot (\delta_{21} \cdot m_2) = \\ &= \frac{1}{EI^2} (28,288 \cdot 62,673 - 20,787 \cdot 6,929) = \frac{1}{EI^2} 1628,86, \end{aligned}$$

$$\Pi \cdot \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{EI} 66,45 \cdot \frac{1}{EI} 24,51 = 1628,69 \frac{1}{EI^2};$$

% ошибки: $1628,86 - 1628,69 = (0,17/1628,86) \cdot 100\% = 0,01\% < 1\%$.

• Определяем частоты свободных колебаний и угловую скорость

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{7000}{66,45}} = 10,26 \text{ 1/с} = \omega_{\min}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{7000}{24,51}} =$$

16,91/с;

$$\theta = 0,56 \cdot \omega_{\min} = 0,56 \cdot 10,26 = 5,75 \text{ 1/с.}$$

• Определяем периоды свободных колебаний: $T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}$:

$$T_1 = \frac{2 \cdot 3,14}{10,26} = 0,61 \text{ с}; \quad T_2 = \frac{2 \cdot 3,14}{16,9} = 0,37 \text{ с};$$

• Строим формы свободных колебаний сосредоточенных масс. Вычисляем собственные векторы из уравнения

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_i) a_{1i} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{2i} = 0; \quad (i = 1, 2);$$

$$\text{для } \lambda_1: i = 1, a_{11} = 1; (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_1) \cdot a_{11} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{21} = 0;$$

$$\left(\frac{1}{EI} 21,76 \cdot 1,3 - \frac{1}{EI} 66,45 \right) \cdot 1 - \frac{1}{EI} 5,33 \cdot 3,9 \cdot a_{21} = 0; \quad a_{21} = -1,84;$$

$$\text{для } \lambda_2: i = 2, a_{12} = 1; (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_2) \cdot a_{12} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{22} = 0;$$

$$\left(\frac{1}{EI} 21,76 \cdot 1,3 - \frac{1}{EI} 24,51\right) \cdot 1 - \frac{1}{EI} 5,33 \cdot 3,9 \cdot a_{22} = 0; \quad a_{22} = 0,18;$$

Векторы первой и второй форм колебаний:

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,84 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,18 \end{bmatrix}.$$

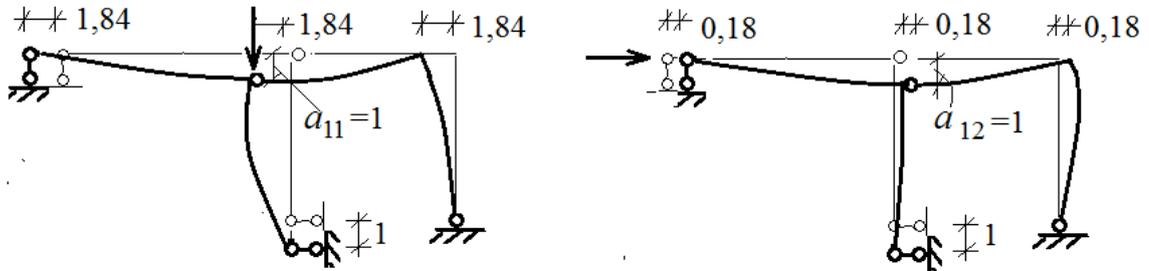


Рис. 2.15. Формы колебаний

• Строим в заданной расчётной схеме эпюру изгибающих моментов от действия амплитудных значений вибрационной нагрузки:

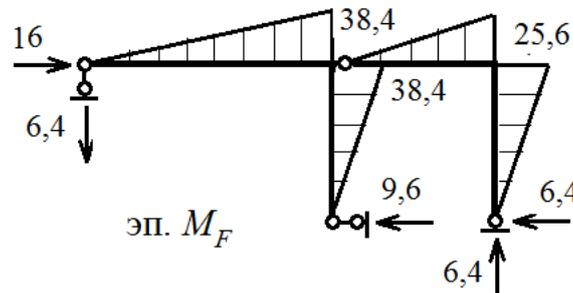


Рис. 2.16. Эпюра моментов от амплитудных значений вибрационной нагрузки

• Запишем систему канонических уравнений для определения амплитудных значений инерционных сил:

$$\delta_{11}^* \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot J_1 + \delta_{22}^* \cdot J_2 + \Delta_{2F} = 0;$$

• Определяем главные коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \cdot \theta^2} = 3,11 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{1,3 \cdot 5,75^2} = -20,16 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \cdot \theta^2} = 2,3 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{3,9 \cdot 5,75^2} = -5,46 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int_0^l \frac{M_F M_1}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 +$$

$$\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 = -\frac{1}{EI} 151,89 =$$

$$-\frac{151,89}{7000} = -21,7 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \int_0^l \frac{M_F M_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 +$$

$$\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 = \frac{1}{EI} 257,12 =$$

$$\frac{257,12}{7000} = 36,73 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

• Решаем систему канонических уравнений и определяем амплитудные значения инерционных сил J_1 и J_2 :

$$-20,16 \cdot 10^{-3} \cdot J_1 - 0,76 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 + -21,7 \cdot 10^{-3} = 0; J_1 = -1,34 \text{ кН},$$

$$-0,76 \cdot 10^{-3} \cdot J_1 - 5,46 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 + 36,73 \cdot 10^{-3} = 0; J_2 = 6,91 \text{ кН}.$$

• Строим динамическую эпюру изгибающих моментов:

$$M_{\text{дин}} = M_1 \cdot J_1 + M_2 \cdot J_2 + M_F.$$

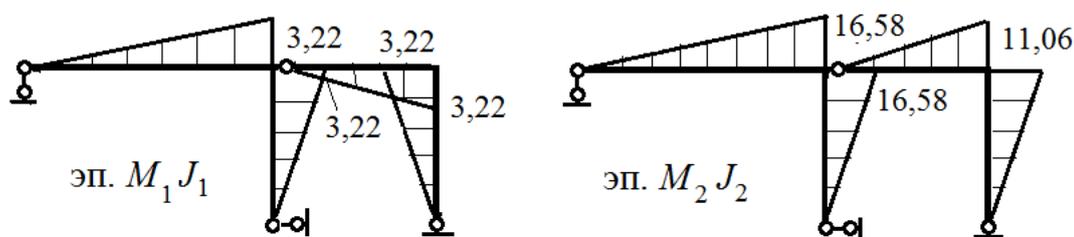


Рис. 2.17. Эпюры моментов от инерционных сил

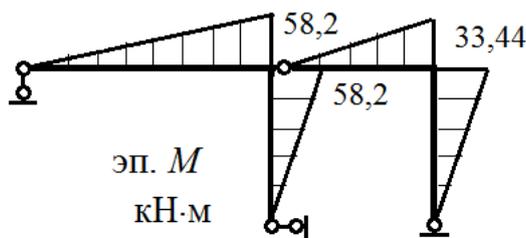


Рис. 2.18. Динамическая эпюра изгибающих моментов

Глава 3. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

3.1. Понятие о потере устойчивости и критической нагрузке

Сущность явления потери устойчивости можно продемонстрировать на примере упругого идеально прямого консольного стержня, к концу которого в центре сечения приложена сосредоточенная сила, направленная вдоль оси стержня (рис. 3.1, а). Пока величина силы не превосходит некоторого предельного значения, стержень в результате центрального сжатия будет только укорачиваться, сохраняя прямолинейную форму равновесия. Если при этом вывести его из состояния равновесия, приложив действующую кратковременно горизонтальную силу, то он, поколебавшись, займет первоначальное положение (см. рис. 3.1, а). Таким образом, если стержень или любая конструкция, выведенная из состояния равновесия, вновь возвращается в своё первоначальное положение, то такое состояние считается устойчивым.

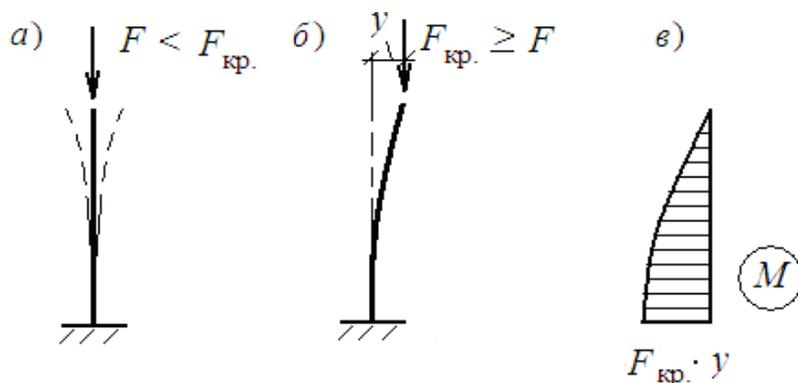


Рис. 3.1. Демонстрация явления потери устойчивости

При определенном значении силы, обозначаемом через $F_{кр}$ и называемом критическим, выведенный из состояния равновесия стержень, уже не возвращается в исходное положение (рис. 3.1, б). Такое состояние системы уже будет не устойчивым. При $F = F_{кр}$ происходит разветвление форм равновесия, так называемая *бифуркация*. Это означает, что одной и той же нагрузке могут соответствовать другие формы равновесия, или деформированного состояния. Такого явления при решении задач прочности не встречалось.

Итак, *критической силой или нагрузкой для всего сооружения либо для отдельного стержня называется то её предельное значение, при котором начальная форма равновесия перестаёт быть устойчивой.*

Граница между устойчивым и неустойчивым состоянием системы называется безразличным состоянием. В безразличном состоянии сжатый стержень обладает удивительным свойством. Он как бы теряет жёсткость. Достаточно небольшого усилия, чтобы изменить его деформированную форму. Естественно, задаваемые перемещения весьма малы, но конечны и видимы простым глазом.

Изложенное выше явление потери устойчивости с появлением смежных форм равновесия было предложено Л. Эйлером (1744 г.). Однако его предложение не является всеобъемлющим. При расчёте гибких конструкций типа стальных оболочек, часто имеет место потеря устойчивости в виде «хлопка», когда система принимает форму равновесия далекую от смежной. Этот факт подтверждается диаграммой «нагрузка – прогиб» (см. рис. 3.2, а).

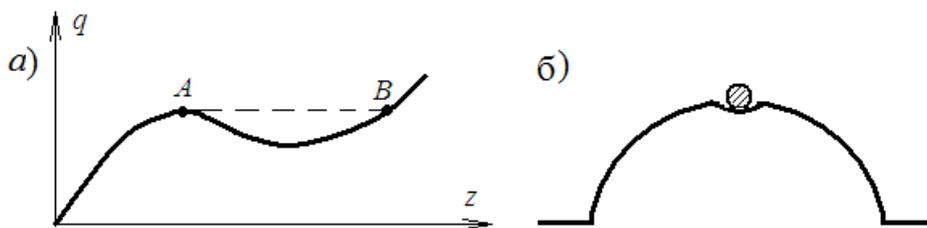


Рис. 3.2. Диаграмма нагрузка-прогиб:
а – перескок состояния из А в В; б – демонстрация понятия о потере устойчивости в «малом» и «большом»

Существует ещё понятие – потеря устойчивости в «малом» и «большом» (см. рис. 3.2, б). При малых отклонениях шарика состояние будет устойчивым, а при больших отклонениях шарик выйдет из лунки и его состояние будет уже не устойчивым. Он потеряет устойчивость в «большом». Следует также иметь в виду, что в ряде случаев, особенно при расчёте сложных многоэлементных конструкций, до общей потери устойчивости конструкции, могут иметь место местные потери устойчивости отдельных элементов. Имеют место и другие виды потери устойчивости.

Обычный статический расчёт, как правило, ведётся по недеформированной схеме, то есть по первоначальной геометрической схеме без учёта величин прогибов стержней под нагрузкой. Осо-

бенность решения задач устойчивости состоит в том, что расчёт сооружений производится с учётом его деформированной схемы. При потере устойчивости в стержнях, кроме продольных сил, появляются изгибающие моменты вследствие изгиба стержней. Чтобы подчеркнуть, что причиной изгиба является не поперечная нагрузка, а продольная сила, такой изгиб обычно называют *продольным*. На рис. 3.1, в показана эпюра изгибающих моментов в стержне, изображенном на рис. 3.1, б. Эпюра в этом случае уже нелинейная.

Вопросы расчёта сооружений на устойчивость встали со всей полнотой только после появления нового строительного материала (стали) и в связи со строительством крупных инженерных сооружений, особенно после ряда крушений мостов из-за потери устойчивости сжатых элементов. Особенно активно наука об устойчивости различных конструкций развивалась в конце XIX и начале XX веков.

В рамках настоящей главы пособия рассматриваются стержневые системы, в которых, при их нагружении напряжения не превосходят предела упругости.

Необходимо отметить, что в случае потери устойчивости зависимость между силами и перемещениями становится нелинейной (см. рис. 3.3), поэтому принцип независимости действия сил к задачам устойчивости уже не применим.

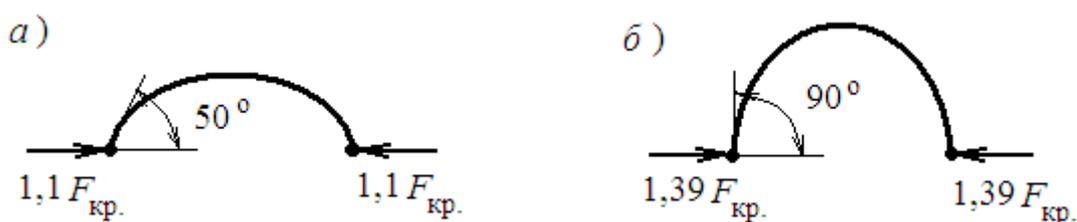


Рис. 3.3. Иллюстрация нелинейности задач устойчивости

В инженерной практике обычно различают два рода потери устойчивости форм равновесия. Вообще, такой подход не исчерпывает и не характеризует полностью специфику поведения различных конструкций. Но, применительно к стержневым идеально упругим системам, разделение потери устойчивости на два рода вполне допустимо.

Потеря устойчивости I рода по сути дела отражает подход Эйлера к решению задач устойчивости. Характерная особенность

этого похода состоит в том, что при потере устойчивости новая форма равновесия существенно отличается от формы, предшествующей потере устойчивости. Следует отметить, что потеря устойчивости I рода относится к идеализированным системам, которые трудно реализовать на практике. Тем не менее, её использование часто подтверждается экспериментом.

В данной главе теория потери устойчивости I рода охватывает большинство приведённых ниже примеров расчёта элементов строительных конструкций. Среди них устойчивость центрально сжатых стержней рам (рис. 3.4, а), круговых колец и арок (рис. 3.4, б), пластинок и оболочек, потеря плоской формы изгиба (рис. 3.4, в) и др.

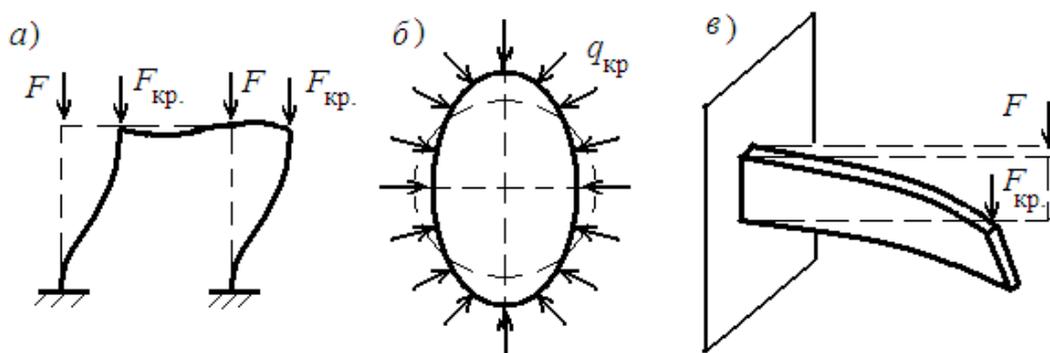


Рис. 3.4. Конструкции, подвергшиеся потере устойчивости I рода

Потеря устойчивости II рода характеризуется сильным развитием предшествовавших деформаций без появления деформаций нового типа (рис. 3.5).

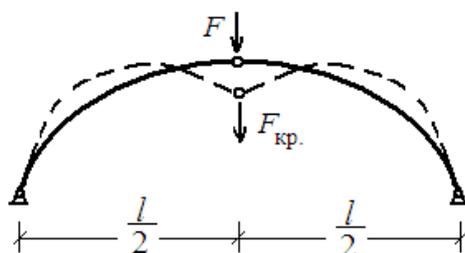


Рис. 3.5. Потеря устойчивости II рода

3.2. Основные допущения и критерии устойчивости

Поскольку построение математической модели задач устойчивости значительно сложнее, чем при решении задач прочности, то

при выборе расчётной схемы вводятся дополнительные допущения, практически приводящие все реальные задачи к идеализированным:

- при исследовании устойчивости рамных систем принимается, что система образована из идеально прямых стержней, соединенных друг с другом жёстко или шарнирно. Возможные искривления стержней, а также неточности изготовления и соединения их между собой, учитываются коэффициентом продольного изгиба φ , который зависит от гибкости стержня.

- стержни системы до момента потери устойчивости испытывают только продольные деформации;

- для сплошных стержней системы в момент потери устойчивости учитываются только деформации изгиба, то есть, как и при решении задач прочности, не учитывается влияние продольных и поперечных сил на деформации стержней;

- предполагается, что критическое состояние конструкции достигается путём одновременного возрастания всех узловых нагрузок с сохранением постоянного соотношения между ними;

- в дальнейшем рассматривается потеря устойчивости в малом, что позволяет использовать для решения задач приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня:

$$EIy''(x) = -M(x), \quad (3.1)$$

вместо точного $\frac{EIy''(x)}{\sqrt{[1 + (y'(x))^2]^3}} = -M(x)$.

Принятые допущения приводят задачу к абстрактной расчётной схеме, так как на самом деле стержни не являются идеально прямыми, а нагрузка вызывает изгибающие моменты в стержнях ещё до наступления момента потери устойчивости. Но они позволяют описать задачи устойчивости достаточно простой математической моделью. Получаемый результат даёт возможность в какой-то мере судить о поведении реального объекта.

При решении задач, излагаемых далее, находится критическая нагрузка, соответствующая переходу системы из устойчивого в неустойчивое состояние. Вопрос установления перехода системы из одного состояния в другое или установление *критерия устойчиво-*

сти в общем случае представляется относительно сложным, а порою и спорным. Общепринятыми и часто встречающимися критериями являются *статический*, *энергетический* и *динамический*.

В данной главе будут использованы только два первых критерия, которые допускают решение задач устойчивости консервативных систем. В консервативных системах работа, совершаемая внешними силами, не зависит от пути, проделываемого силами при переходе системы из начального положения в конечное положение, как при решении задач прочности.

Динамический критерий устойчивости используется при исследовании движения системы после её вывода из состояния покоя. Если при этом частота свободных колебаний системы стремится к нулю, то этот факт свидетельствует о потере устойчивости системы. Динамический критерий устойчивости применим и к неконсервативным системам. Примеры консервативной и неконсервативной систем показаны на рис. 3.6. Консервативная система изображена на рис. 3.6, *а*. Направление силы не меняется при потере устойчивости. На рис. 3.6, *б* показана так называемая следящая сила, которая при потере устойчивости всё время направлена по касательной к оси стержня в месте приложения. Для консервативных систем все три критерия приводят к одинаковым результатам.

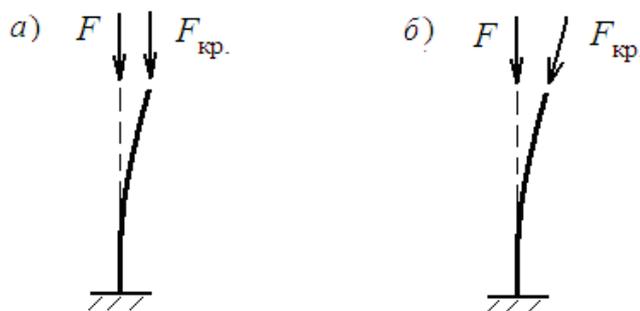


Рис. 3.6. Примеры систем:
а – консервативной; *б* – неконсервативной

В данной главе излагаются метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня или, другими словами, метод Эйлера, и метод перемещений, которые при принятых допущениях считаются точными.

Для приближённого решения задач предлагаются энергетический метод, метод конечных элементов и вариационные методы, которые не рассматриваются в этом пособии.

3.3. Устойчивость центрально сжатых прямолинейных стержней

Для расчета на устойчивость центрально сжатых прямолинейных стержней при определении критической нагрузки используется статический критерий устойчивости. Он состоит в том, что упругой системе с узловой нагрузкой, вызывающей только продольные деформации, задаётся небольшое отклонение от первоначальной формы равновесия, приводящее к продольному изгибу стержней. Затем определяется та минимальная нагрузка, которая способна удерживать эту систему в новом деформированном состоянии.

С этой целью для каждого стержня системы составляется дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня. При интегрировании этих уравнений появляются произвольные постоянные. На основе имеющихся граничных условий относительно произвольных постоянных составляется система однородных уравнений, которые имеют два решения. Либо все произвольные постоянные равны нулю, что свидетельствует об отсутствии перемещений, связанных с потерей устойчивости, либо определитель из коэффициентов при произвольных постоянных равен нулю. Последнее приводит к трансцендентному уравнению устойчивости, корни которого вычисляются путем подбора.

Для систем, состоящих из нескольких стержней, метод приводит к громоздким уравнениям, а потому его приложение к сложным системам нецелесообразно. Преимущество метода состоит в том, что он наиболее чётко выявляет физическую сущность рассматриваемого явления. Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня удобно использовать при определении критической силы для отдельных стержней. Знание этого метода также необходимо при построении решения задач устойчивости методом перемещений.

Возьмём стержень длиной l постоянного поперечного сечения с тремя упругими опорами по его концам (рис. 3.7, *a*), то есть рассмотрим наиболее общий случай граничных условий. Опорные

устройства, изображенные на рис. 3.7, *а* в виде пружин, представляют собой упругоподатливые опоры, имеющие жёсткости r_1, r_2, r_3 . Изменяя эти жёсткости от 0 до ∞ , можно получить любые другие условия закрепления концов стержня. Напомним, что жёсткость – это усилие, которое надо приложить к пружине, чтобы получить смещение, равное единице. При решении задач устойчивости жёсткости упругоподатливых опор принимаются известными.

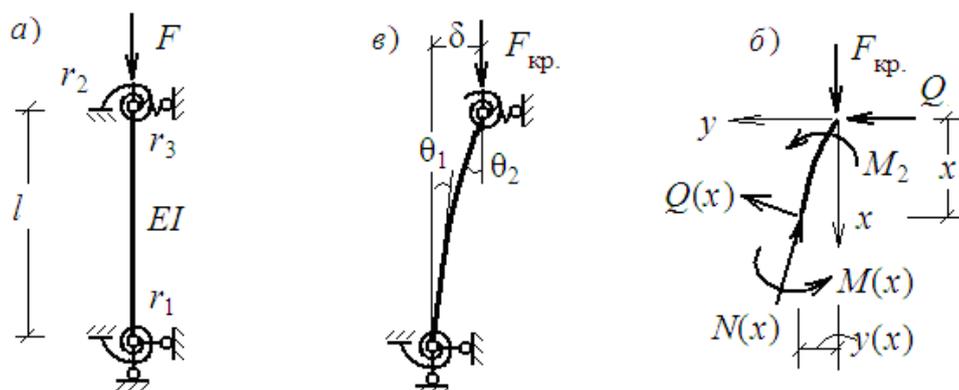


Рис. 3.7. Потеря устойчивости стержнем с тремя упругими опорами

Рассмотрим потерю устойчивости этого стержня с жёсткостью EI в плоскости рисунка. Используем статический критерий устойчивости. С этой целью зададим стержню небольшое отклонение от прямолинейной формы равновесия (рис. 3.7, *б*). В результате отклонения концы стержня повернутся на углы θ_1 и θ_2 , а верхний конец сместится относительно нижнего по горизонтали на величину δ . Естественно, что при таком отклонении уже будет иметь место продольный изгиб.

Для составления дифференциального уравнения изогнутой оси стержня определим изгибающий момент $M(x)$ в произвольном сечении. Для этого отсечём верхний конец стержня и в выбранной системе координат (ось Oy должна быть направлена в сторону выпуклости оси стержня, чтобы соблюдалось правило знаков в уравнении (3.1)) составим уравнение моментов относительно нейтральной оси сечения, чтобы в уравнение не вошли $Q(x)$ и $N(x)$,

$$F_{кр}y - Qx - M_2 - M(x) = 0.$$

Отсюда

$$M(x) = F_{кр}y - Qx - M_2. \quad (3.2)$$

Здесь $Q = r_3 \delta$ – реакция упругоподатливой опоры 3;

$M_2 = r_2 \theta_2$ – реакция упругоподатливой опоры 2.

Подставим выражение момента (3.2) в уравнение (3.1):

$$EIy''(x) = Qx + M_2 - F_{кр}y(x),$$

или

$$y''(x) + \frac{F_{кр}}{EI} y(x) = \frac{Q}{EI} x - \frac{M_2}{EI}.$$

Введём обозначение:

$$\frac{F_{кр}}{EI} = \alpha^2, \quad (3.3)$$

и перепишем уравнение изогнутой оси стержня:

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = \frac{Q}{EI} x + \frac{M_2}{EI}. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение состоит из двух частей: $y(x) = y_0 + y_ч$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; $y_ч$ – частное решение, зависящее от правой части уравнения (3.4). Однородное уравнение имеет вид

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = 0. \quad (3.5)$$

В нём нужно лишь заменить ω на α и ввести переменную x вместо t . Решение уравнения (3.5) в новых обозначениях примет вид:

$$y_0 = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x. \quad (3.6)$$

Частное решение уравнения (3.4) получим путём сравнения коэффициентов при переменных с одинаковыми степенями. С этой целью представим $y_ч$ в виде полинома первой степени

$$y_ч = Cx + D, \quad (3.7)$$

где C и D – произвольные постоянные. Определим их путём подстановки $y_{\text{ч}}$ из (3.7) в (3.4):

$$0 + \alpha^2(Cx + D) = \frac{Q}{EI}x + \frac{M_2}{EI},$$

откуда $C = \frac{Q}{\alpha^2 EI}$; $D = \frac{M_2}{\alpha^2 EI}$.

Следовательно $y_{\text{ч}} = \frac{Q}{\alpha^2 EI}x + \frac{M_2}{\alpha^2 EI}$,

а полное решение уравнения (3.4) примет вид:

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{Q}{\alpha^2 EI}x + \frac{M_2}{\alpha^2 EI}. \quad (3.8)$$

Подставим в выражение (3.8) значения Q и M_2 и введём ещё одно обозначение:

$$v = \alpha l, \quad (3.9)$$

которое будем называть *критическим параметром*, так как через него, учитывая (3.3), можно определить $F_{\text{кр}}$.

$$F_{\text{кр}} = \frac{v^2 EI}{l^2}. \quad (3.10)$$

$$y(x) = A \cos \frac{v}{l}x + B \sin \frac{v}{l}x + \frac{r_3 \delta l^2}{v^2 EI}x + \frac{r_2 \theta_2 l^2}{v^2 EI}. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) содержит, кроме v , ещё четыре неизвестные величины: A , B , δ , θ_2 . Для их определения используем граничные условия по концам стержней:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad & 1) y = 0; \quad 2) y' = \theta_2; \\ \text{при } x = l, \quad & 3) y = \delta; \quad 4) y' = \theta_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Чтобы воспользоваться условиями (3.12), запишем выражение первой производной от (3.11):

$$y'(x) = -\frac{\nu}{l} A \sin \frac{\nu}{l} x + \frac{\nu}{l} B \cos \frac{\nu}{l} x + \frac{r_3 \delta l^2}{\nu^2 EI}.$$

Граничные условия (3.11) позволяют записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & A + \frac{r_2 l^2}{\nu^2 EI} \theta_2 = 0; \\ 2) \quad & \frac{\nu}{l} B + \frac{r_3 l^2}{\nu^2 EI} \delta = \theta_2; \\ 3) \quad & A \cos \nu + B \sin \nu + \frac{r_3 l^3}{\nu^2 EI} \delta + \frac{r_2 l^2}{\nu^2 EI} \theta_2 = \delta; \\ 4) \quad & -\frac{\nu}{l} A \sin \nu + \frac{\nu}{l} B \cos \nu + \frac{r_3 l^2}{\nu^2 EI} \delta = \theta_1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из первого уравнения легко определяется A : $A = -\frac{r_2 l^2}{\nu^2 EI} \theta_2$.

В уравнениях (3.13) появилась ещё одна неизвестная величина – угол порота θ_1 (рис. 3.7, б). Эту величину определим из уравнения равновесия для всего стержня (см. рис. 3.7, б).

$$\Sigma M = F_{кр} \delta - Ql - M_2 - M_1 = 0, \quad (3.14)$$

где $M_1 = r_1 \theta_1$. Если в (3.14) подставить выражение $F_{кр}$ из (3.10), а также значения Q и M_2 , то получим:

$$\frac{\nu^2 EI}{l^2} \delta - r_3 l \delta - r_2 \theta_2 - r_1 \theta_1 = 0.$$

Отсюда

$$\theta_1 = -\frac{r_2}{r_1} \theta_2 + \left(\frac{\nu^2 i}{r_1 l} - \frac{r_3 l}{r_1} \right) \delta.$$

Здесь $i = \frac{EI}{l}$ – относительная или погонная жёсткость стержня.

В уравнения (3.13) подставим значения A и θ_1 , в результате получим три однородных уравнения относительно B , θ_2 и δ :

$$\begin{aligned}
B \frac{v}{l} - \theta_2 + \delta \frac{r_3 l}{v^2 i} &= 0, \\
B \sin v + \theta_2 \frac{r_2 l}{v^2 i} (1 - \cos v) + \delta \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) &= 0, \\
B \frac{v}{l} \cos v + \theta_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) + \delta \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

В итоге пришли к проблеме собственных значений. Тривиальное решение системы однородных уравнений (3.15), когда B , θ_2 и δ равны нулю, соответствует прямолинейной форме стержня и указывает на отсутствие потери устойчивости. Существование отличных от нуля значений B , θ_2 и δ возможно только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных B , θ_2 и δ , будет равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix}
\frac{v}{l} & -1 & \frac{r_3 l}{v^2 i} \\
\sin v & \frac{r_2 l}{v^2 i} (1 - \cos v) & \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) \\
\frac{v}{l} \cos v & r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) & \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right)
\end{vmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

Как и в случае определения частот свободных колебаний, сами значения B , θ_2 и δ при потере устойчивости остаются неопределёнными.

Определитель (3.16) представляет собою трансцендентное уравнение устойчивости, корни которого находятся путем подбора. Подбирается минимальное значение критического параметра v , превращающее уравнение в тождество. Затем, через критический параметр по формуле (3.10), вычисляется величина критической силы. Определитель можно каждый раз раскрывать в численном виде после подстановки в него значений r_1 , r_2 , r_3 , i , l и v либо эти значения подставлять в раскрытый определитель, который имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{r_2}{vi} (1 - \cos v) \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) - \frac{v}{l} \cos v \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) + \\
& + \frac{r_2 r_3 l}{v^2 i} \sin v \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) - \frac{r_2 r_3 l}{v^3 i^2} \cos v (1 - \cos v) - \\
& - \frac{r_2}{l} v \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) + \sin v \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) = 0. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Следует помнить, что трансцендентное уравнение имеет множество корней, из которых необходимо найти лишь минимальный, соответствующий $F_{кр}$. Для решения уравнения целесообразно составить программу построения графика функции в зависимости от v , которое изменяется от 0 до 2π . Тогда первое значение v , приводящее к нулевому значению функции, и будет искомой величиной.

3.4. Расчет плоских рам на устойчивость методом перемещений

Метод перемещений получил широкое распространение при расчёте строительных конструкций. Объясняется этот факт элементарностью выбора основной системы и её простотой. Особенно существенны эти преимущества при решении задач устойчивости. На первый взгляд кажется, что основная система метода сил проще, так как она является статически определимой. На самом же деле, в силу того, что расчёт на устойчивость проводится по деформированной схеме, в многоэлементной системе метода сил получить деформированную схему гораздо сложнее, чем в основной системе метода перемещений, состоящей из отдельных прямолинейных стержней.

3.4.1. Теория метода

Основная система метода перемещений при определении критической нагрузки принимается такой же, как при решении задач прочности (рис. 3.8, *a*). Но реакции в дополнительных связях определяются уже с учётом продольного изгиба по деформированной схеме.

чение нагрузки, при котором рама может находиться в равновесии как в недеформированном состоянии, так и в деформированном.

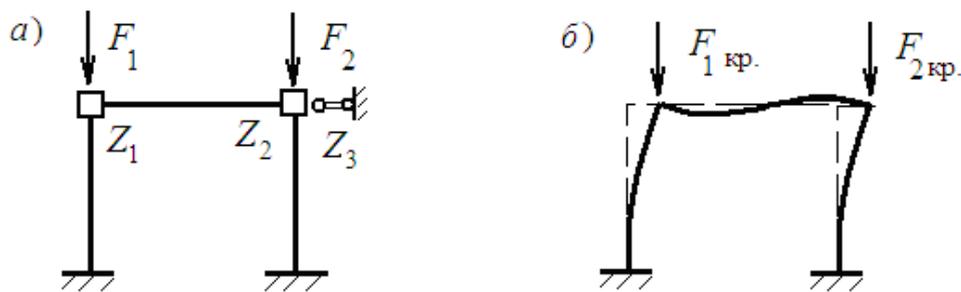


Рис. 3.8. Основная система метода перемещений и форма потери устойчивости

Нетривиальное решение уравнений (3.18), когда перемещения не будут нулевыми, имеет место в том случае, когда определитель из коэффициентов будет равен нулю, то есть

$$|K| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

Раскрывая этот определитель, получим *уравнение устойчивости*, которое служит для вычисления критической нагрузки. Как правило, коэффициенты r_{kj} выражаются не через $F_{кр}$ непосредственно, а через критический параметр ν (3.9). Как будет показано ниже, коэффициенты r_{kj} являются трансцендентными функциями этого параметра. Поэтому уравнение устойчивости, получаемое в результате раскрытия определителя (3.19), будет трансцендентным уравнением, корни которого находятся путем подбора. Уравнение (3.19) имеет множество корней, из которых, как и в методе непосредственного интегрирования дифференциального уравнения оси стержня, нужно находить только минимальное ненулевое значение ν , удовлетворяющее уравнению (3.19).

В общем случае параметр ν_k , определяемый выражением (3.9), зависит от длины стержня l_k , силы F_k и жёсткости EI_k , поэтому для различных стержней он может оказаться различным. Но на основании допущения о том, что критическое состояние конструкции до-

стигается путём одновременного возрастания всех узловых нагрузок с сохранением постоянного соотношения между ними, задающего соотношение между силами F_k , легко выразить все критические параметры v_k через какой-нибудь один из них. Тогда все коэффициенты r_{kj} определителя (3.19) будут функциями только одного параметра.

После определения критического параметра критическое значение силы для выбранного стержня находится по формуле (3.10). Затем, исходя из полученных соотношений между критическими параметрами, находятся остальные параметры v_j , а через них и критические силы по той же формуле (3.10). Для дальнейших расчётов определяются расчётные длины стержней из выражения

$$l_0 = \frac{\pi}{v} l. \quad (3.20)$$

Полученной критической нагрузке соответствует определенная форма потери устойчивости, которую нетрудно представить ориентировочно. Но эту форму можно и уточнить, насколько это возможно выразив форму деформированного состояния системы с бесконечным числом степеней свободы через несколько перемещений. С этой целью следует использовать приём для определения соотношений между перемещениями. Нужно принять какое-то значение, например $Z_1 = 1$, подставить его и значения v_j в уравнение (3.18) и, решая систему $(n - 1)$ уравнений, найти остальные значения Z_j . По ним можно уточнить искомую форму потери устойчивости.

3.4.2. Вычисление опорных реакций продольно сжатых стержней от единичных перемещений (общий случай)

Как было отмечено выше, при определении реакций в дополнительных связях от единичных перемещений Z_k в основной системе необходимо учесть влияние продольных сил. Эта задача решается методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня.

Рассмотрим прямолинейный стержень AB , жёстко защемленный верхним концом и шарнирно опирающийся внизу (рис. 3.9, а). Определим опорные реакции от линейного смещения нижнего кон-

ца стержня на единицу (рис. 3.9, б). Примем начало координатных осей в точке B , отсечём нижнюю часть (рис. 3.9, в) и составим выражение для изгибающего момента в сечении с абсциссой x .

$$\sum M = M(x) - N \cdot y - Q \cdot x = 0.$$

Отсюда $M(x) = N \cdot y + Q \cdot x$.

Подставим это значение в приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (3.1), перенесём неизвестные влево и введём обозначение (3.3). В итоге получим,

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = -\frac{Q}{EI} x.$$

Решение неоднородного уравнения полученного типа изложено в пункте 3.3. Для данного уравнения получен следующий результат:

$$y(x) = y_0 + y_n = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - \frac{Q}{N} x. \quad (3.21)$$

Произвольные постоянные определим из граничных условий:

1) при $x = 0$; $y = 0$;

2) при $x = l$; $y' = 0$, где $y'(x) = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x - \frac{Q}{N}$.

Или

1) $y(0) = A = 0$;

2) $y'(l) = \alpha B \cos \alpha l - \frac{Q}{N} = 0$. Отсюда $B = \frac{Q}{\alpha N \cos \alpha l}$.

Подставим эти значения и $N = \alpha^2 EI$ в (3.21):

$$y(x) = \frac{Q \sin \alpha x}{\alpha^3 EI \cos \alpha l} - \frac{Q}{\alpha^2 EI} x. \quad (3.22)$$

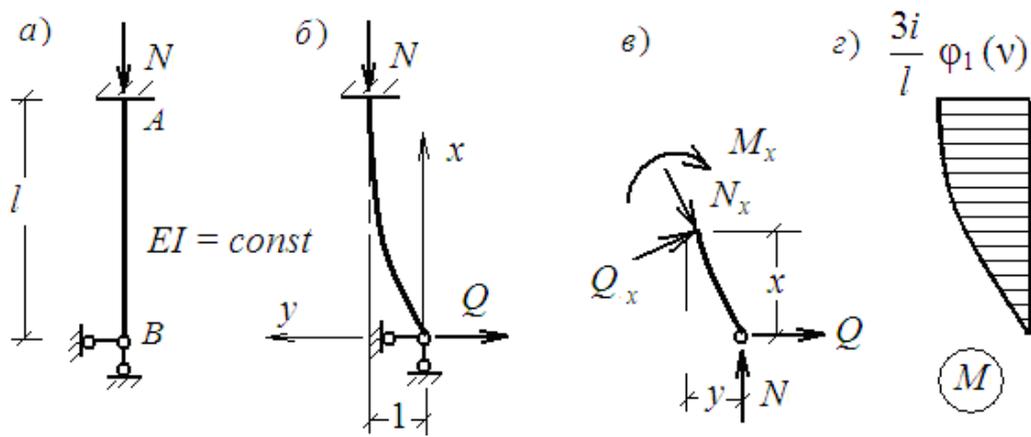


Рис. 3.9. Определение реакций от единичных перемещений

Для определения горизонтальной реакции Q используем третье условие при $x = l$; $y = 1$ и введём обозначение (3.9):

$$y(x) = \frac{Q \sin v}{\alpha^3 EI \cos v} - \frac{Ql}{\alpha^2 EI} = 1, \text{ откуда } Q = \frac{\alpha^3 EI}{\operatorname{tg} v - v}.$$

Приведём это выражение к виду, используемому при решении задач прочности, путём умножения числителя и знаменателя на l^3 :

$$Q = \frac{3i}{l^2} \cdot \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \frac{3i}{l^2} \eta_1(v).$$

Изгибающий момент в защемлении A :

$$M(l) = N \cdot y(l) + Q \cdot l = \alpha^2 EI \cdot 1 + \frac{\alpha^3 EI}{\operatorname{tg} v - v} l = \frac{3i}{l} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \frac{3i}{l} \cdot \varphi_1(v).$$

Аналогично определяются реакции по концам стержней для других вариантов закрепления. Результаты сведены в табл. 3.1. Для удобства использования всем значениям реакций придан вид, применяемый при решении задач прочности. Отличие состоит в том, что для стержней, в которых имеет место продольная сила, значения реакций умножаются на соответствующие функции (см. Приложение 3).

Можно показать, что при $N = 0$ и, соответственно, $v = 0$ все функции будут равны единице. Возьмём, например, функцию $\eta_1(v)$.

При $v = 0$, $-\frac{0}{3(\operatorname{tg} 0 - 0)} = \frac{0}{0}$ возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Раскроем её по правилу Лопиталя. $\frac{v^2 \cos^2 v}{1 - \cos^2 v}$, что при $v = 0$ опять приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Повторим операцию дифференцирования $\frac{v \cos v - v^2 \sin v}{\sin v}$, и снова получается неопределенность $\frac{0}{0}$. Ещё раз продифференцируем числитель и знаменатель по v : $\frac{\cos v - v \sin v - 2v \sin v - v^2 \cos v}{\cos v}$, что при $v = 0$ даёт $\frac{1}{1} = 1$.

То же самое можно доказать и для других функций. Чтобы табл. 3.1 можно было пользоваться и для стержней, в которых продольная сила отсутствует, в ней приведены значения реакций при $N = 0$ (4-й столбец). Под номером 5 в табл. 3.1 приведена горизонтальная реакция для шарнирного стержня, которая по аналогии обозначена через Q , хотя изгибающий момент в стержне отсутствует.

3.4.3. Определение реакций для частных случаев

Для ряда конструкций, в частности для статически определимых систем, использование метода перемещений в общем виде оказывается нецелесообразным, но необходимым при решении задач устойчивости. Однако для конструкций типа консольной стойки ступенчатого сечения и в ряде других случаев, когда ничто не препятствует смещению узлов, можно решить задачу без постановки линейных связей, что заметно понижает число основных неизвестных метода перемещений.

В данных расчетных схемах основную систему метода перемещений получают введением в заданную систему узловых дополнительных связей, препятствующих только угловым смещениям (так называемая «плавающая» заделка).

Реакции и усилия от единичных перемещений

№ п.п.	Схема связей	Задаваемое перемещение	$N = 0$	$N > 0$
1				
2				
3				
4				
5			$Q = 0$	$Q = -\frac{i v^2}{l^2}$

Например, на рис. 3.10, а изображена ступенчатая стойка. Так как таблица составлена для стержней постоянного сечения, то при выборе основной системы необходимо сечение, где меняется жёсткость, принимать за узел. В результате этого в общем случае получаются пять неизвестных (рис. 3.10, б). Однако, если не ставить линейные связи, так как ничто не препятствует горизонтальному смещению узлов, то останутся только два неизвестных (рис. 3.10, в).

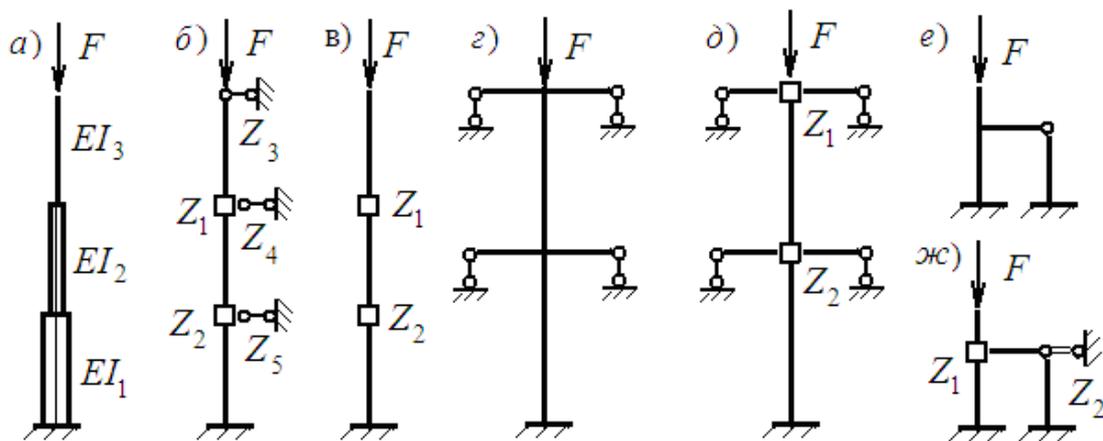


Рис. 3.10. Выбор основной системы метода перемещений без постановки линейных связей

На этом же рисунке показаны ещё две расчетные схемы, когда можно ставить не все линейные связи. Для схемы на рис. 3.10, г) можно ограничиться только защемлением узлов (рис. 3.10, д). Для схемы на рис. 3.10, е) нужно ставить одну линейную связь, потому что при задании горизонтального перемещения на уровне первого этажа левая стойка будет препятствовать смещению верхнего конца правой стойки. На консоли же горизонтальную связь можно не ставить.

Чтобы воспользоваться возможным сокращением числа неизвестных метода перемещений, нужно иметь значения реакций для двух типов стержней:

- 1) один конец защемлен, другой свободный;
- 2) оба конца защемлены.

Определим эти реакции от поворота концов стержней методом непосредственного интегрирования изогнутой оси стержня.

Рассмотрим консольный стержень (рис. 3.11, а). Зададим поворот защемления на угол $Z = 1$ (рис. 3.11, б), отсечём верхнюю часть стержня и составим уравнение равновесия с целью определения изгибающего момента $M(x)$ (рис. 3.11, в).

$\sum M = P \cdot y - M(x) = 0$, откуда $M(x) = P \cdot y$. Подставим это значение в дифференциальное уравнение, которое приведем к обычному виду с учётом обозначения (3.3):

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0.$$

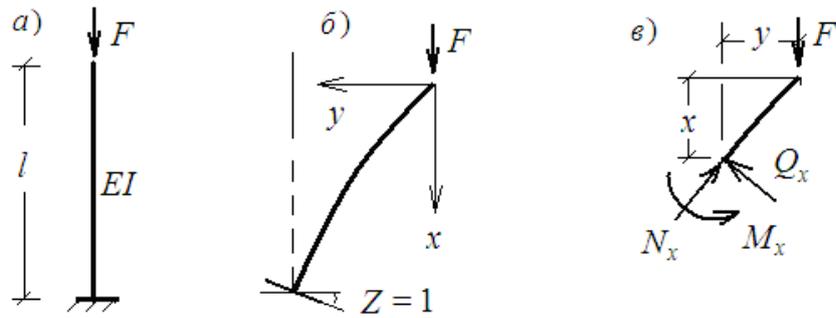


Рис. 3.11. Определение момента в защемлении консольной стойки

Решение этого уравнения известно: $y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$. Произвольные постоянные определим, используя граничные условия:

1) при $x = 0, y = 0$;

2) при $x = l, y' = -1$, где $y'(x) = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x - \frac{Q}{N}$.

В принятой системе координат поворот имеет знак минус. Но в дальнейшем этот факт не играет большой роли.

В итоге: 1) $y(0) = A = 0$; 2) $y'(l) = \alpha B \cos \alpha l = -1$.

$B = -\frac{1}{\alpha \cos \nu}$ (здесь и далее введено обозначение (3.9)):

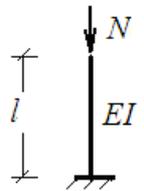
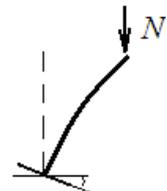
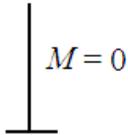
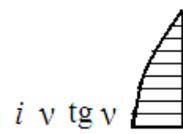
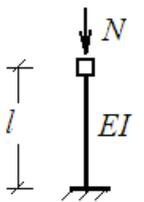
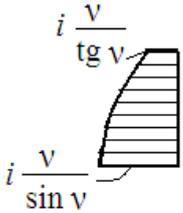
$$y(x) = -\frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos \nu}.$$

Далее получим момент в защемлении:

$$M(l) = F \cdot y(l) = -\alpha^2 EI \frac{\sin \alpha l}{\alpha \cos \nu} = -i\nu \operatorname{tg} \nu.$$

Таким же путем вычисляются реакции для защемленного стержня. Результаты сведены в табл. 3.2.

Реакции от единичных перемещений

№ п.п.	Схема связей	Задаваемое перемещение	$N = 0$	$N > 0$
1				
2				

Уравнения устойчивости, получаемые с помощью этих реакций, также являются трансцендентными и их корни находятся путём подбора. Числовые значения функций приведены в Приложении 4.

3.4.4. Упрощения при расчете симметричных рам на устойчивость

При решении задач устойчивости из-за отсутствия линейной зависимости между силами и перемещениями принцип независимости действия сил уже не соблюдается. Поэтому разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную, как при статическом расчёте, не допускается. Таким образом, симметрией рамы можно воспользоваться только в случае, когда упруго симметричная рама нагружена симметричной нагрузкой. Упрощение имеет место вследствие доказательства того факта, что общий определитель, составленный для всей системы, можно разложить на два определителя, соответствующих симметричным и кососимметричным формам потери устойчивости.

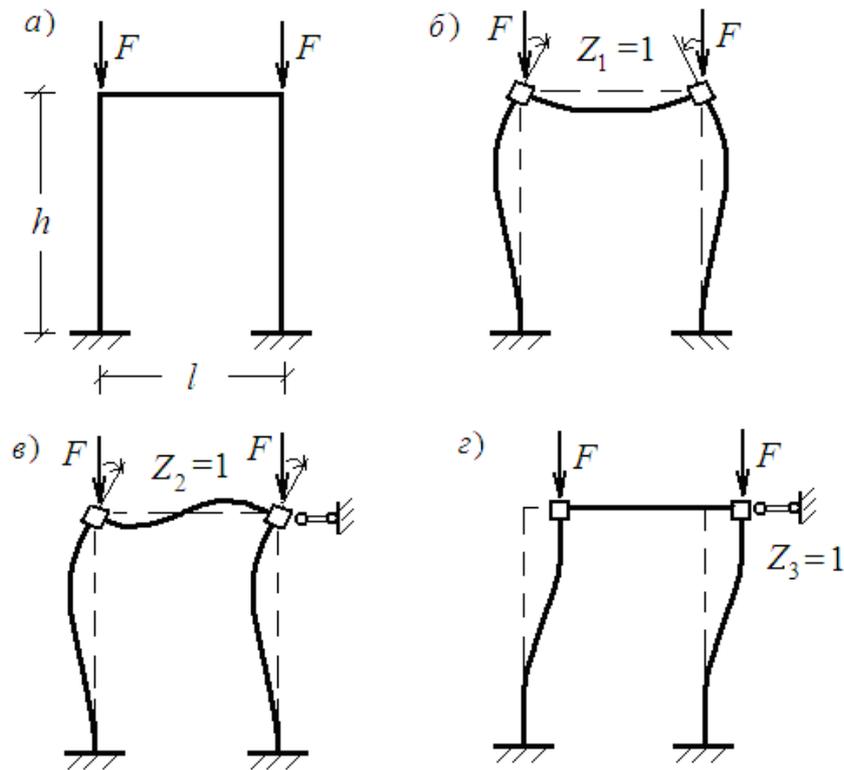


Рис. 3.12. Формы потери устойчивости симметричной рамы

Рассмотрим симметричную и симметрично нагруженную раму, изображённую на рис. 3.12, а. При расчёте этой рамы методом перемещений она имеет три неизвестных перемещения. Решим задачу с помощью групповых неизвестных. Формы деформаций от единичных значений этих неизвестных показаны на рис. 3.12, б, в, г. Форма б) соответствует симметричной форме потери устойчивости, а формы в) и г) – кососимметричным формам. В силу симметрии побочные коэффициенты r_{12} , r_{13} , r_{21} , r_{31} будут равны нулю. В итоге общий определитель распадается на два определителя:

$$|K| = \begin{vmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |K_c| & 0 \\ 0 & |K_{kc}| \end{vmatrix} = |K_c| \cdot |K_{kc}| = 0,$$

что позволяет рассматривать отдельно $|K_c| = 0$ и $|K_{kc}| = 0$.

Таким образом, при исследовании упругой устойчивости симметричных и симметрично нагруженных систем достаточно отдельно рассмотреть симметричные и кососимметричные формы потери устойчивости. Комбинированные формы потери устойчивости не могут дать меньшей критической нагрузки, чем наиболее опасная симметричная или кососимметричная форма. Как правило,

нужно рассматривать оба типа форм потери устойчивости, однако, в ряде случаев нетрудно предугадать наиболее опасную форму потери устойчивости (симметричную или кососимметричную). Отдельные исследования даже двух типов форм существенно снижают трудоёмкость задачи по сравнению с её расчётом без учёта симметрии.

3.5. Контрольные вопросы

1. Что такое критическая нагрузка?
2. Какие критерии используются для определения критической нагрузки?
3. Какой критерий используется при реализации метода Эйлера?
4. Какие допущения вводятся при решении задач устойчивости стержневых систем?
5. Какое дифференциальное уравнение положено в основу метода Эйлера для определения критической силы?
6. Как качественно сказываются способы закрепления стержней на величину критической силы?
7. Что такое приведённая длина стержня, от чего она зависит и как она определяется?
8. В каких пределах изменяется критический параметр при расчёте стержневых систем?
9. Каким получается уравнение устойчивости, и сколько оно имеет корней при решении?
10. Какое явление наблюдается в момент потери устойчивости стержня?
11. Покажите формы потери устойчивости, значения критических сил и расчетных длин для прямолинейных стержней с различными закреплениями их концов.
12. Идея использования метода перемещений в задачах устойчивости. Допущения и уравнение устойчивости в общем виде.
13. В чём отличие метода перемещений, используемого при решении задач устойчивости от метода перемещений, реализуемого при решении задач прочности?

14. Какой критерий устойчивости реализуется в методе перемещений?

15. Что представляет собой уравнение устойчивости при использовании метода перемещений?

16. Каким методом определяются реакции в сжатых стержнях от единичных перемещений?

17. Какие стержневые системы можно рассчитывать без постановки линейных связей?

18. Упрощения при расчете на устойчивость при использовании основной системы без постановки линейных связей. Когда это возможно?

19. Каким является уравнение устойчивости при использовании метода перемещений, и сколько корней оно имеет?

20. В каких случаях можно использовать симметрию системы при решении задач устойчивости? Упрощения при расчете на устойчивость симметричных систем.

21. Какие формы потери устойчивости возможны в симметричных рамах и какие из них наиболее опасны в свободных и несвободных рамах?

3.6. РГР № 6. Расчёт плоской рамы на устойчивость

Задание: Рассчитать статически неопределимую раму на устойчивость. Исходные данные к задаче определить по табл. 3.3 и схемам, представленным на рис. 3.13.

Таблица 3.3

Исходные данные для РГР № 6

Первая цифра шифра	$\frac{F_1}{F_2}$	l , м	Вторая цифра шифра	EI_1 , кН·м ²	h_2 , м	Третья цифра шифра № схемы	h_1 , м	$\frac{I_1}{I_2}$
0	2,5	4	0	5000	3,2	0	4,2	2
1	1,6	6	1	6200	2,8	1	5,4	3
2	2,2	4	2	6400	2,6	2	3,3	4
3	1,5	5	3	5600	4,4	3	4,4	2
4	2,8	6	4	6400	3,4	4	4,8	3
5	2,1	3	5	7200	4,0	5	5,1	4
6	1,8	4	6	7400	3,0	6	3,8	2
7	2,6	5	7	5800	2,2	7	4,5	3
8	3,0	6	8	6600	4,4	8	6,0	4
9	3,2	5	9	8200	3,5	9	5,2	2

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить степень кинематической неопределимости по формуле:

$$n_k = n_y + n_{л.}$$

3. Выбрать основную систему метода перемещений, введя дополнительные связи, препятствующие смещению узлов системы.

4. Пронумеровать все стержни расчётной схемы. Определить относительные жёсткости стержней по формуле $i = EI/l$ и выразить их через общий множитель i_0 , который может являться относительной жёсткостью любого стержня.

5. Для всех сжатых стержней записать выражения их критических параметров по формуле $\nu = h\sqrt{\frac{N}{EI}}$ и выразить их через значение

ν_0 – критический параметр любого стержня.

6. Составить уравнение устойчивости в общем виде для данной расчётной схемы.

7. Построить в основной системе схемы деформаций и эпюры моментов от единичных смещений по направлению дополнительных связей, воспользовавшись таблицами приложений 1 и 2.

8. Определить реакции в дополнительных связях от заданных единичных смещений.

9. Записать уравнение устойчивости в развёрнутом виде.

10. Решить уравнение устойчивости путём подбора критического параметра $\nu_{кр}$ при помощи таблиц трансцендентных функций (приложение 3) или на ПК при помощи учебной программы BU-CLING (Приложение 4).

11. Определить величину критических сил $F_{кр}$ и расчётные длины l_0 для всех сжатых стержней по формулам

$$F_{кр} = \frac{\nu_{кр}^2 \cdot EI}{h}; \quad l_0 = \frac{\pi \cdot h}{\nu_{кр}}.$$

Пример решения задачи. Рассчитать статически неопределимую раму на устойчивость: определить величины критических сил и расчётные длины сжатых стержней. Принять: $EI = 10000 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$; $F_2 = 0,81F_1$.

- Определяем степень кинематической неопределимости:
 $n_k = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2$.

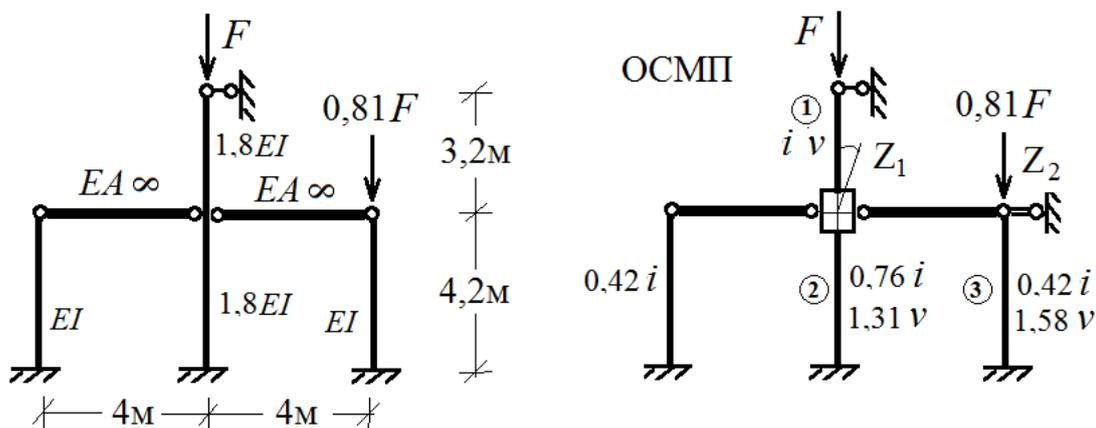


Рис. 3.14. Заданная рама и основная система метода перемещений

- Записываем уравнение устойчивости в общем виде для данной расчётной схемы:
$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21} = 0;$$

- Выбираем основную систему метода перемещений.

• Пронумеровываем все стержни расчётной схемы. Определяем относительные жёсткости стержней по формуле $i_i = EI_i/l_i$ и выражаем их через общий множитель i , который является относительной жёсткостью первого стержня:

$$i_1 = \frac{1,8EI}{3,2} = i; \quad i_2 = \frac{1,8EI \cdot 3,2}{4,2 \cdot 1,8} = 0,76 \cdot i; \quad i_3 = \frac{EI \cdot 3,2}{4,2 \cdot 1,8} = 0,42i.$$

- Для всех сжатых стержней записываем выражения их критических параметров по формуле $v_i = h_i \sqrt{\frac{N_i}{EI}}$ и выражаем их через значение v , где v – критический параметр первого стержня:

$$v_1 = 3,2 \sqrt{\frac{F}{1,8EI}} = 2,385 \sqrt{\frac{F}{EI}} = v;$$

$$v_2 = 4,2 \sqrt{\frac{F}{1,8EI}} = \frac{3,13}{2,385} = 1,31v; \quad v_3 = 4,2 \sqrt{\frac{0,81F}{EI}} = \frac{3,78}{2,385} = 1,58v;$$

• Строим в основной системе схемы деформаций от $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$ и эпюры моментов M_1^o и M_2^o от единичных смещений по направлению дополнительных связей, воспользовавшись таблицами приложений 1, 2 и 3.

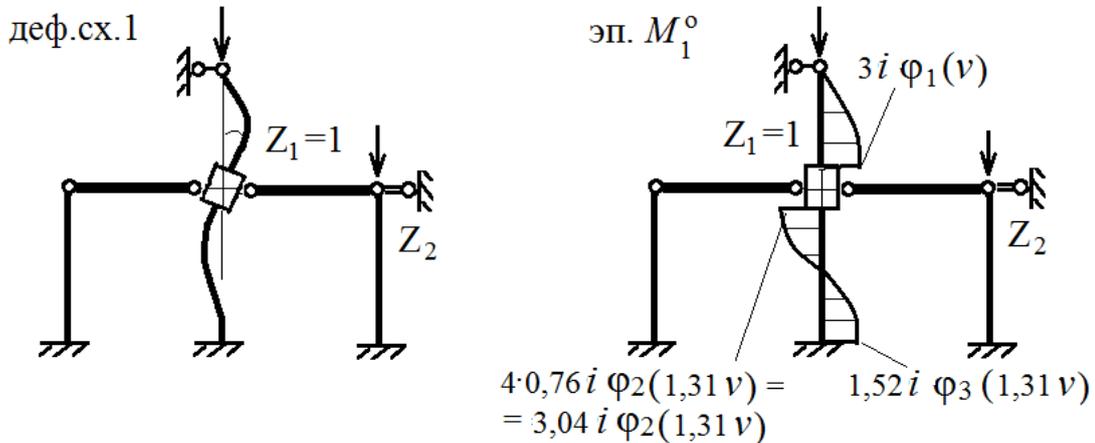


Рис. 3.15. Деформированная схема и эпюра моментов от $Z_1=1$

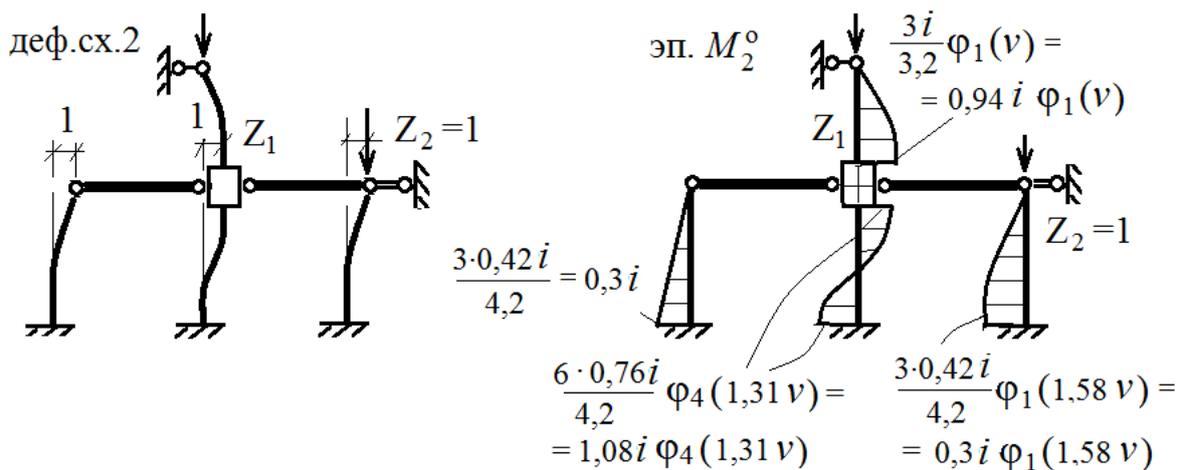


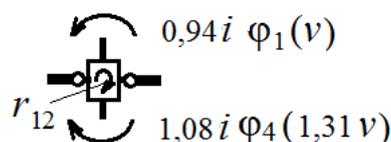
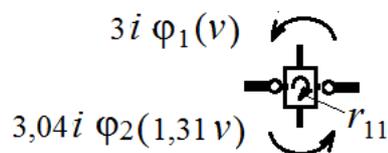
Рис. 3.16. Деформированная схема и эпюра моментов от $Z_2=1$

• Определяем реакции в дополнительных связях от заданных единичных смещений. Из условия равновесия отсеченных частей с эпюр моментов от единичных неизвестных, вычисляем реакции в дополнительных связях:

$$r_{11} = 3i \cdot \varphi_1(v) + 3,04i \cdot \varphi_2(1,31v);$$

$$r_{12} = 0,94i \cdot \varphi_1(v) - 1,08i \cdot \varphi_4(1,31v);$$

$$r_{22} = 0,29i \cdot \eta_1(v) + 0,07i + 0,52i \cdot \eta_2(1,31v) + 0,07i \cdot \eta_1(1,58v);$$



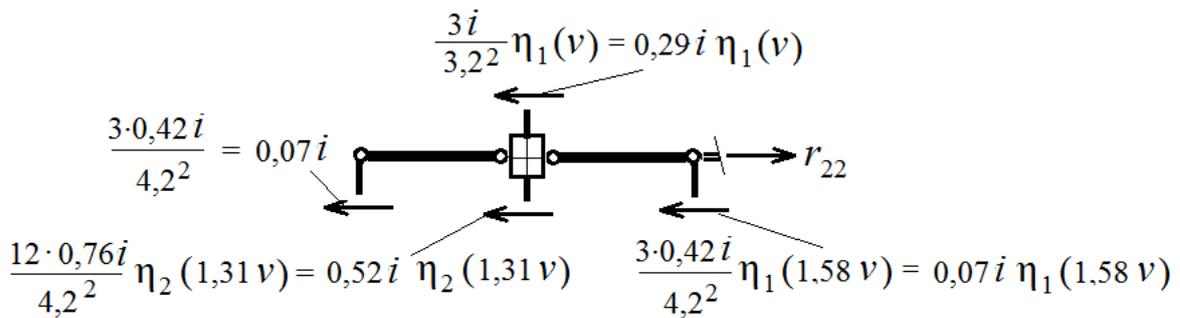


Рис. 3.16. Равновесие отсеченных частей основной системы

- Записываем уравнение устойчивости в развёрнутом виде:

$$(3i \cdot \varphi_1(v) + 3,04i \cdot \varphi_2(1,31v)) \cdot (0,29i \cdot \eta_1(v) + 0,07i + 0,52i \cdot \eta_2(1,31v) + 0,07i \cdot \eta_1(1,58v)) - (0,94i \cdot \varphi_1(v) - 1,08i \cdot \varphi_4(1,31v))^2 = 0;$$

Выносим i за скобку, и так как $i \neq 0$, уравнение принимает вид:

$$(3 \cdot \varphi_1(v) + 3,04 \cdot \varphi_2(1,31v)) \cdot (0,29 \cdot \eta_1(v) + 0,07 + 0,52 \cdot \eta_2(1,31v) + 0,07 \cdot \eta_1(1,58v)) - (0,94 \cdot \varphi_1(v) - 1,08 \cdot \varphi_4(1,31v))^2 = 0;$$

- Решаем уравнение устойчивости на ПК при помощи учебной программы BUCLING (Прил. 5). Для этого записываем (и набираем на компьютере) функцию применительно к указанной программе и определяем критический параметр $v_{кр}$:

$$(3 * F1(x) + 3,04 * F2(1,31 * x)) * (0,29 * H1(x) + 0,07 + 0,52 * H2(1,31 * x) + 0,07 * H1(1,58 * x)) - (0,94 * F1(x) - 1,08 * F4(1,31 * x))^2$$

- $v = 2,02 = v_{кр1}$; $v_{кр2} = 1,31 \cdot 2,02 = 2,65$; $v_{кр3} = 1,58 \cdot 2,02 = 3,19$;

- Определяем критические силы $F_{кр}$ и расчётные длины l_0 для

всех сжатых стержней по формулам: $F_{кр} = \frac{v_{кр}^2 \cdot EI}{h^2}$; $l_0 = \frac{\pi \cdot h}{v_{кр}}$.

$$F_{кр1} = \frac{2,02^2 \cdot 1,8 \cdot 9000}{3,2^2} = 6455,3 \text{ кН}; \quad l_{01} = \frac{3,14 \cdot 3,2}{2,02} = 4,97 \text{ м};$$

$$F_{кр2} = \frac{2,65^2 \cdot 1,8 \cdot 9000}{4,2^2} = 6449,2 \text{ кН}; \quad l_{02} = \frac{3,14 \cdot 4,2}{2,65} = 4,98 \text{ м};$$

$$F_{кр3} = \frac{3,19^2 \cdot 9000}{4,2^2} = 5192 \text{ кН}; \quad l_{03} = \frac{3,14 \cdot 4,2}{3,19} = 4,13 \text{ м}.$$

При $F = F_{кр1} = 6455,3 \text{ кН}$, $0,81F = 5228,8 > F_{кр3} = 5191,9 \text{ кН}$;

Принимаем $F = F_{кр1} = 6455,3 \text{ кН}$.

Рекомендуемая литература

1. *Бабанов В. В.* Строительная механика. Расчетно-графические работы: учеб. пособие / В. В. Бабанов, Н. А. Масленников; СПбГАСУ. – СПб., 2017.
2. *Масленников А. М.* Начальный курс строительной механики стержневых систем. 2-е изд., доп. / А. М. Масленников. – СПб.: ООО «Перспектива науки», 2009. – 240 с.
3. *Масленников А. М.* Основы динамики и устойчивости стержневых систем: учебное пособие / А. М. Масленников. – М.: Изд-во АСВ; СПбГАСУ, 2000. – 204 с.
4. *Масленников А. М.* Динамика и устойчивость сооружений: учебник и практикум для вузов / А. М. Масленников. – М.: Изд-во Юрайт, 2016. – 366 с.
5. *Масленников А. М.* Расчет строительных конструкций численными методами / А. М. Масленников. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 224 с.
6. *Масленников А. М.* Основы расчёта стержневых систем на устойчивость: учебное пособие / А. М. Масленников, В. М. Воронина; ЛИСИ. – Л. 1980. – 66 с.
7. *Масленников А. М.* Основы динамики стержневых систем: учебное пособие / А. М. Масленников, В. М. Воронина; ЛИСИ. – Л. 1981. – 82 с.
8. *Вибрации в технике.* Колебания линейных систем. Т.1. Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
9. *Ишлински А. Ю.* Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
10. *Справочник по динамике сооружений.* Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

**Таблицы реакций и усилий в изгибаемых стержнях
от единичных смещений связей и внешних воздействий**

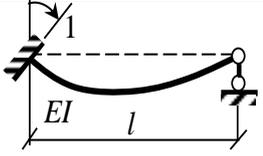
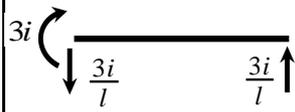
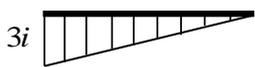
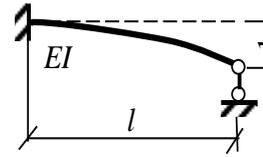
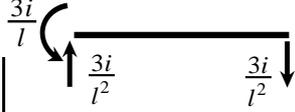
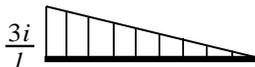
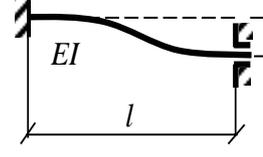
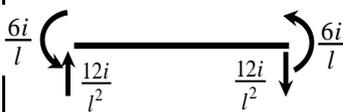
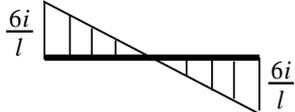
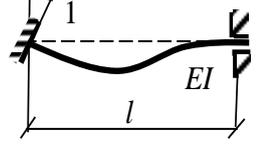
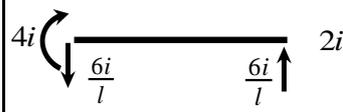
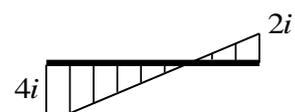
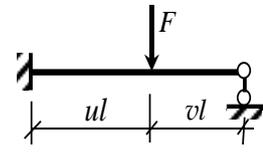
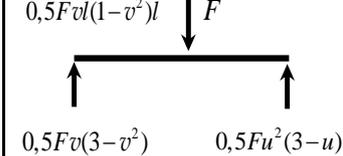
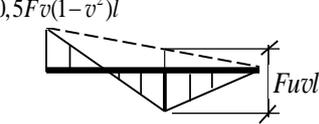
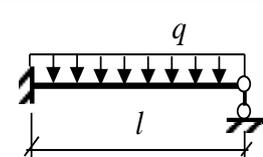
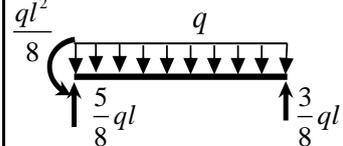
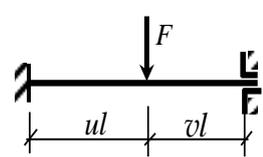
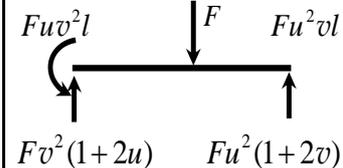
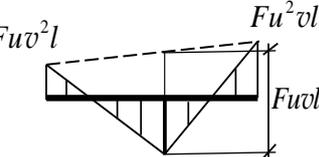
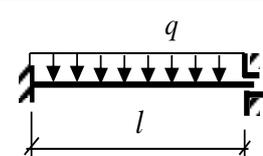
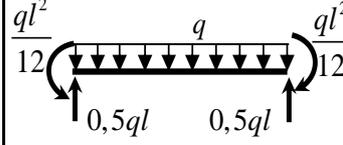
№ п.п	Схема воздействия	Значения опорных реакций	Эпюры изгибающих моментов
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
$i = \frac{EI}{l}$ — относительная жесткость стержня; $(u + v) = 1$			

Таблица реакций и усилий в сжато-изогнутых стержнях от единичных смещений связей

№ п.п.	Схема воздействия	Значения опорных реакций	Эпюры изгибающих моментов
1		$\begin{matrix} 3i\varphi_1(\nu) \\ \frac{3i}{l}\varphi_1(\nu) \end{matrix}$	$3i\varphi_1(\nu)$
2		$\begin{matrix} \frac{3i}{l}\varphi_1(\nu) \\ \frac{3i}{l^2}\eta_1(\nu) \end{matrix}$	$\frac{3i}{l}\varphi_1(\nu)$
3		$\begin{matrix} \frac{6i}{l}\varphi_4(\nu) \\ \frac{12i}{l^2}\eta_2(\nu) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{6i}{l}\varphi_4(\nu) \\ \frac{6i}{l}\varphi_4(\nu) \end{matrix}$
4		$\begin{matrix} 4i\varphi_2(\nu) \\ \frac{6i}{l}\varphi_4(\nu) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2i\varphi_3(\nu) \\ 4i\varphi_2(\nu) \end{matrix}$
5		$i\nu \operatorname{tg} \nu$	$i\nu \operatorname{tg} \nu$
6		$\begin{matrix} \frac{i\nu}{\operatorname{tg} \nu} \\ \frac{i\nu}{\sin \nu} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{i\nu}{\operatorname{tg} \nu} \\ \frac{i\nu}{\sin \nu} \end{matrix}$
7		$\begin{matrix} \frac{i\nu^2}{l^2} \\ \frac{i\nu^2}{l^2} \end{matrix}$	$-$

$i = \frac{EI}{l}$ – относительная жесткость стержня;
 $\nu = l\sqrt{\frac{N}{EI}}$ – критический параметр сжато-изогнутого стержня.

**Таблица значений трансцендентных функций метода
перемещений для сжато-изогнутых стержней**

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9194	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,5565
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4763	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,180	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2π	0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,033	-3,2898

**Таблица значений специальных функций метода
перемещений для сжато-изогнутых стержней**

v	$v/\operatorname{tg}v$	$v/\sin v$	$v\operatorname{tg}v$	$\cos v$	$\sin v$	$\operatorname{tg}v$
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,00000	0,00000	0,00000
1,10	0,9967	1,0017	0,0100	0,99500	0,09983	0,10033
0,20	0,9866	1,0067	0,0405	0,98007	0,19867	0,20271
0,30	0,9698	1,0152	0,0928	0,95534	0,29552	0,30934
0,40	0,9461	1,0272	0,1691	0,92106	0,38942	0,42279
0,50	0,9152	1,0429	0,2731	0,87758	0,47943	0,54630
0,60	0,8770	1,0626	0,4105	0,82534	0,56464	0,68414
0,70	0,8311	1,0866	0,5896	0,76484	0,64422	0,84229
0,80	0,7770	1,1152	0,8237	0,69671	0,71736	1,02964
0,90	0,7142	1,1489	1,1341	0,62161	0,78333	1,26016
1,0	0,6421	1,1885	1,5574	0,54030	0,84147	1,55741
1,10	0,5599	1,2343	2,1612	0,45360	0,89121	1,96476
1,20	0,4665	1,2875	3,0866	0,36236	0,93204	2,57215
1,30	0,3609	1,3493	4,6827	0,26750	0,96356	3,60210
1,40	0,2415	1,4207	8,1170	0,16997	0,98545	5,79788
1,50	0,1064	1,5038	21,1521	0,07074	0,99749	14,10142
1,60	-0,0467	1,6007	-54,7721	-0,02920	0,99957	-37,23253
1,70	-0,2209	1,7143	-13,0842	-0,12884	0,99166	-7,69660
1,80	-0,4199	1,8483	-7,7153	0,22720	0,92385	-4,28626
1,90	-0,6491	2,0078	-5,5615	-0,32329	0,94630	-2,92710
2,0	-0,9153	2,1995	-4,3701	-0,41615	0,90930	-2,18504
2,10	-1,2282	2,4328	-3,5907	-0,50485	0,86321	-1,70985
2,20	-1,6014	2,7211	-3,0224	-0,58850	0,80850	-1,37382
2,30	-2,0550	3,0843	-2,5742	-0,66628	0,74571	-0,11921
2,40	-2,6201	3,5531	-2,1984	-0,73739	0,67546	-0,91601
2,50	-3,3466	4,1773	-1,8675	-0,80114	0,59847	-0,74702
2,60	-4,3218	5,0436	-1,5642	-0,85689	0,51550	-0,60160
2,70	-5,711	6,3176	-1,2764	-0,90407	0,42738	-0,47273
2,80	-7,8756	8,3585	-0,9955	-0,94222	0,33499	-0,35553
2,90	-11,769	12,1212	-0,7146	-0,97096	0,23925	-0,24641
3,0	-21,0452	21,2585	-0,4276	-0,98999	0,14112	-0,14255
3,10	-74,4888	74,5533	-0,1321	-0,99914	0,04158	-0,04162
3,20	54,7289	-54,8227	0,1871	-0,99829	-0,05837	0,05847
3,30	20,6573	-20,9192	0,5272	-0,98748	-0,15775	0,15975
3,40	12,8632	-13,3052	0,8967	-0,96680	-0,25554	0,26432
3,50	9,3435	-9,9778	1,3111	-0,93646	-0,35078	0,37459

v	$v/\operatorname{tg}v$	$v/\sin v$	$v\operatorname{tg}v$	$\cos v$	$\sin v$	$\operatorname{tg}v$
3,60	7,2953	-8,1352	1,7765	-0,89676	-0,44252	0,49347
3,70	5,9226	-6,9832	2,3115	-0,84810	-0,52984	0,62473
3,80	4,9123	-6,2106	2,9395	-0,79097	-0,61186	0,77356
3,90	4,1164	-5,6705	3,69449	-0,72593	-0,68777	0,94742
4,0	3,4548	-5,2854	4,6313	-0,65364	-0,75680	1,15782
4,20	2,3625	-4,8188	7,4667	-0,49026	-0,82158	1,77778
4,30	1,8811	-4,6934	9,8291	-0,40080	-0,91617	2,28585
4,40	1,4210	-4,6238	13,6238	-0,30733	-0,95160	3,09632
4,50	0,9704	-4,6034	20,8680	-0,21080	-0,97753	4,63733
4,60	0,5192	-4,6292	40,7568	-0,11215	-0,99369	8,86017
4,70	0,0582	-4,7004	379,350	-0,01239	-0,99992	80,71276
4,80	-0,4216	-4,8185	-54,6474	0,08750	-0,99616	-11,3849
4,90	-0,9302	-4,9875	-25,8107	0,18651	-0,98245	-5,26749
5,0	-1,4791	-5,2142	-16,9026	0,28366	-0,95892	-3,38052
5,10	-2,0821	-5,5087	-12,4919	0,37798	-0,92581	-2,44939
5,20	-2,7577	-5,8860	-9,8053	0,46852	-0,88345	-1,88564
5,30	-3,5303	-6,3681	-7,9567	0,55437	-0,63227	-1,50127
5,40	-4,4352	-6,9879	-6,5747	0,63469	-0,77276	-1,21754
5,50	-5,5244	-7,7954	-5,4757	0,70867	-0,70554	-0,99558
5,60	-6,8801	-8,8710	-4,5581	0,77557	-0,63127	-0,81394
5,70	-8,6399	-10,3506	-3,7605	0,83471	-0,55069	-0,65973
5,80	-11,0546	-12,4839	-3,0431	0,88552	-0,46460	-0,52467
5,90	-14,6362	-15,7805	-2,3783	0,92748	-0,37388	-0,40311
6,0	-20,6178	-21,4731	-1,7461	0,96017	-0,27942	-0,29101
6,10	-32,9263	-33,4867	-1,1301	0,98327	-0,18216	-0,18526
6,20	-74,3604	-74,6184	-0,5170	0,99654	-0,08309	-0,08338

Программа расчета рам на устойчивость методом перемещений

Программа работает в среде DOS VC. Последовательность выполнения после включения компьютера:

1. **BCL**

2. **bucling.exe**

3. Если на экране появится какая-то функция, её стереть с помощью клавиши «Backspace» и набрать вашу функцию.

Набрать: $\varphi_1(v)$ как $F1(x)$, $\eta_1(v)$ как $H1(x)$, $\tan(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и т. д.

Например: $7.48 + 3 * F1(x) + 7.04 * F2(0.8 \cdot x)$ или

$(5.4 + 3 * F1(x) + 3.2 * F2(2.5 * x)) * (0.75 * H1(x) + 1.536 * H2(2.5 * x) + 0.384 * H1(3.06 * x)) - (1.5 * F1(x) - 1.92 * F4(2.5 * x))^2$;

4. ENTER

5. Сохранить, нажав клавишу F2

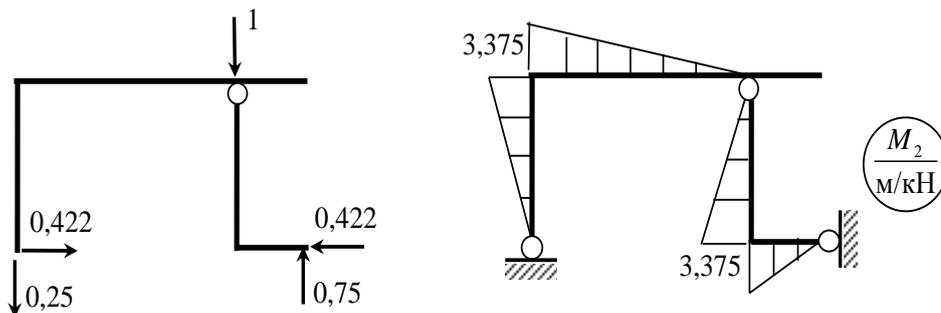
6. Нажать клавишу Esc

7. Ввести пределы (максимум от 0 до 6.28), последовательно нажимая клавишу ENTER (всего 3 раза).

8. На экране появится ответ красными цифрами в виде двух значений. Выписываем меньшее значение критического параметра.

9. Выход: нажать клавишу Esc.

Состояние 2



Коэффициенты уравнения частот

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{(M_1)^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 6^2 + \frac{13,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 6^2 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 2^2 + \frac{4,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 2^2 \right] = \frac{488}{3EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 6 - \frac{13,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 6 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 2 + \frac{4,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 2 \right] = -\frac{47}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22} = \sum_0^l \int \frac{(M_2)^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375^2 + \frac{13,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 3,375^2 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 2^2 + \frac{4,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 2^2 \right] = \frac{180,383}{3EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

Определение частот и периодов свободных колебаний

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{488}{3EI} \cdot 3m - \frac{1}{\omega^2}\right) & -\frac{47}{EI} \cdot 2m \\ -\frac{47}{EI} \cdot 3m & \left(\frac{180,383}{3EI} \cdot 2m - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} (488 - \lambda) & -94 \\ -141 & (120,255 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{EI}{m\omega^2}.$$

Его решение:

$$(488 - \lambda)(120,255 - \lambda) - 94 \cdot 141 = 0,$$

$$\lambda^2 - 608,255\lambda + 45430,44 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max} = 522,8287; \lambda_2 = 85,1713.$$

Проверка:

$$1. |D| = \Pi \lambda_i, \quad |D| = 488 \cdot 120,255 - 141 \cdot 94 = 45430,44,$$

$$\Pi \lambda_i = 522,8287 \cdot 85,1713 = 44530.$$

$$|D| \approx \Pi \lambda_i \quad \text{с погрешностью в } 0,0009\%.$$

$$2. S_p |D| = 488 + 120,255 = 608,255.$$

$$\sum \lambda_i = 522,8287 + 85,1713 = 608$$

$$S_p |D| \approx \sum \lambda_i \quad \text{с погрешностью в } 0,042\% < [0,5\%].$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max} = 522,8287.$$

$$\omega_1 = \omega_{\min} = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \lambda_1}} = 0,04373 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \sqrt{\frac{85000}{0,7 \cdot 522,8287}} = 15,24 \text{ с}^{-1}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{15,24} = 0,412 \text{ с}.$$

$$\lambda_2 = 85,1713.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \lambda_2}} = 0,108356 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \sqrt{\frac{85000}{0,7 \cdot 85,1713}} = 56,05 \text{ с}^{-1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{56,05} = 0,112 \text{ с}.$$

Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	2		

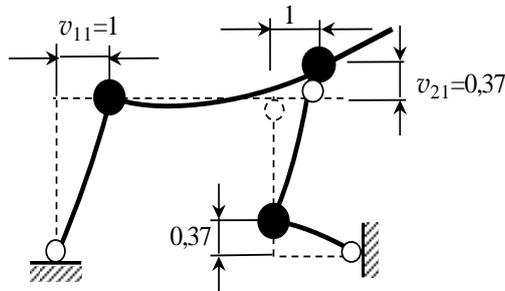
Построение форм свободных колебаний

$$\lambda_1 = \lambda_{\max} = 522,8287, \omega_1 = 4,819 \text{ c}^{-1}.$$

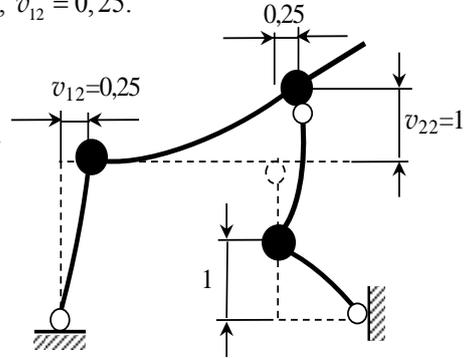
$$(488 - 522,8287)v_{11} - 94v_{21} = 0, \text{ при } v_{11} = 1, v_{21} = -0,37.$$

$$\lambda_2 = 85,1713, \omega_2 = 11,94 \text{ c}^{-1},$$

$$-141v_{12} + (120,255 - 85,1713)v_{22} = 0, \text{ при } v_{22} = 1, v_{12} = 0,25.$$



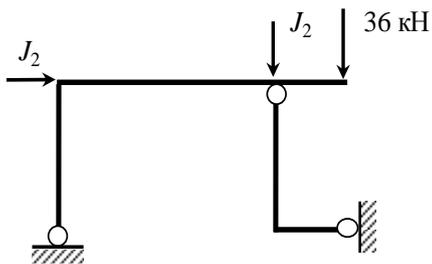
Форма колебаний при $\omega_{\min} = 4,819 \text{ c}^{-1}$



Форма колебаний при $\omega_{\min} = 11,64 \text{ c}^{-1}$

2. Расчет на действие вибрационной нагрузки

Расчетная схема при $\sin \theta t = 1$



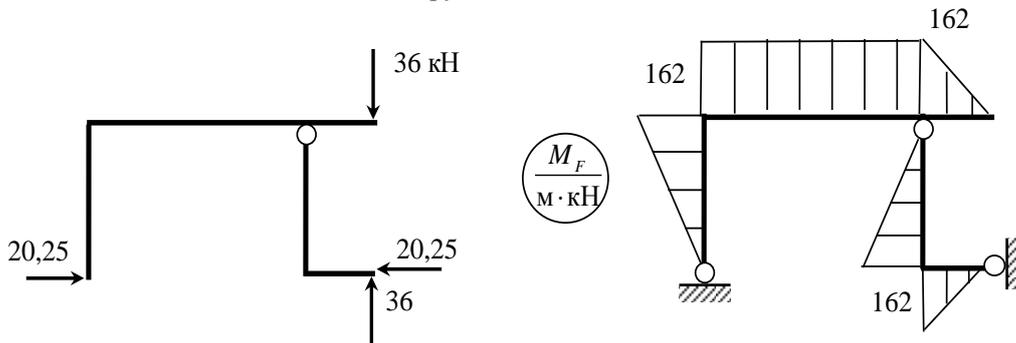
Система канонических уравнений для определения амплитудных значений сил инерции

$$\delta_{11}^* J_1 + \delta_{12}^* J_2 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}^* J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \Delta_{2F} = 0$$

$$\theta = 0,65\omega_{\min} = 0,65 \cdot 0,04373 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,02842 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 9,903 \text{ c}^{-1}.$$

Грузовое состояние



Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	3		10.04.17

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы уравнений

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{488}{3EI} - \frac{1}{3m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{250,0297}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{47}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{180,383}{3EI} - \frac{1}{2m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{558,9168}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\Delta_{1F} = \sum_i \int \frac{M_i M_F}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 162 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 162 \cdot 13,5 \cdot 3 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 162 + \frac{4,5}{6 \cdot 3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 162 \right] = -\frac{8532}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

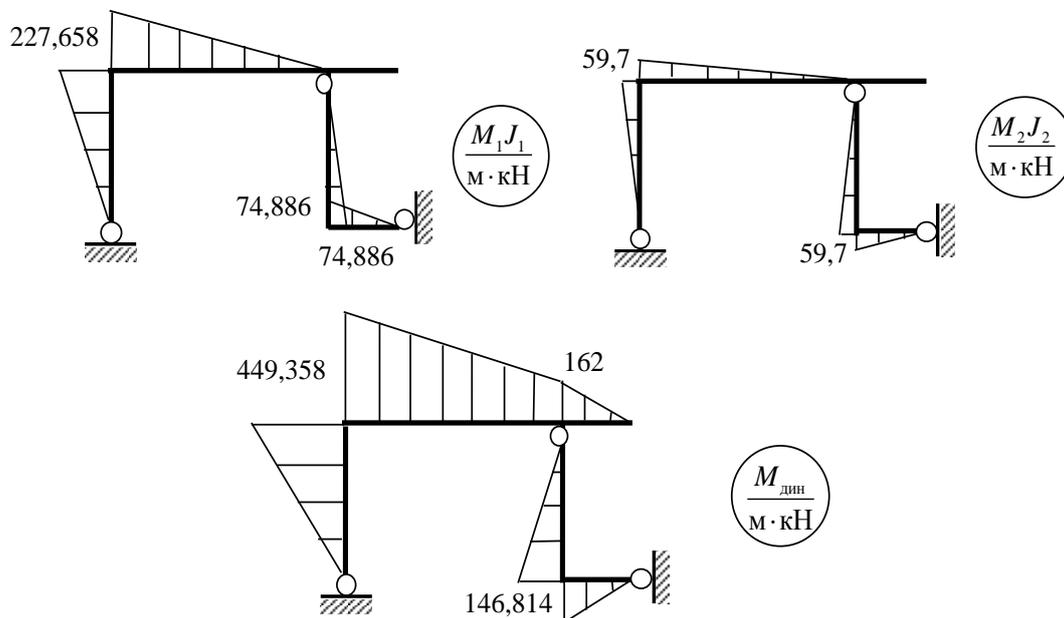
$$\Delta_{2F} = \sum_i \int \frac{M_i M_F}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 162 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 162 \cdot 13,5 \cdot 3,375 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 162 + \frac{4,5}{6 \cdot 3} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 162 \right] = \frac{8110,125}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

Решение системы уравнений (определение амплитуд инерционных сил)

$$-250,0297J_1 - 47J_2 - 8532 = 0$$

$$-47J_1 - 558,9168J_2 + 8110,125 = 0 \quad J_1 = -37,443 \text{ кН}, \quad J_2 = 17,659 \text{ кН}.$$

Определение динамических усилий $M_{\text{дин}} = M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_F$

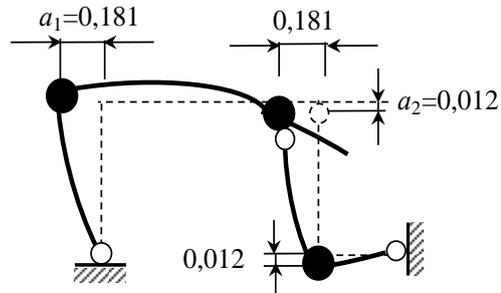


Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	4		

Определение динамических амплитуд и построение формы вынужденных колебаний

$$a_1 = \frac{J_1}{m_1 \theta^2} = \frac{J_1}{3m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{37,443}{3 \cdot 0,02842^2 \cdot 85000} = -0,181 \text{ м};$$

$$a_2 = \frac{J_2}{m_1 \theta^2} = \frac{J_2}{2m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{17,659}{2 \cdot 0,02842^2 \cdot 85000} = -0,012 \text{ м};$$



Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Куценко В.Я.	14823	5		

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Глава 1. Расчет статически неопределимых систем методом перемещений

- 1.1. Допущения, вводимые при расчете рам методом перемещений
- 1.2. Степень кинематической неопределимости. Основная система
- 1.3. Теорема о взаимности реакций
- 1.4. Идея метода перемещений. Система канонических уравнений
- 1.5. Последовательность расчета при действии внешней нагрузки
- 1.6. Контрольные вопросы
- 1.7. РГР № 4. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Глава 2. Основы расчета стержневых систем на динамические воздействия

- 2.1. Предмет и задачи динамики сооружений
- 2.2. Виды динамических нагрузок
- 2.3. Степени свободы системы
- 2.4. Колебания упругих систем с одной степенью свободы
 - 2.4.1. Свободные колебания
 - 2.4.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки
- 2.5. Колебания систем с несколькими степенями свободы
 - 2.5.1. Свободные колебания
 - 2.5.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки с постоянной частотой
- 2.6. Использование симметрии конструкции при решении задач динамики
- 2.7. Контрольные вопросы
- 2.8. РГР № 5. Динамический расчет плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки

Глава 3. Основы расчета стержневых систем на устойчивость

- 3.1. Понятие о потере устойчивости и критической нагрузке
- 3.2. Основные допущения и критерии устойчивости
- 3.3. Устойчивость центрально сжатых прямолинейных стержней
- 3.4. Расчет плоских рам на устойчивость методом перемещений
 - 3.4.1. Теория метода
 - 3.4.2. Вычисление опорных реакций продольно сжатых стержней от единичных перемещений (общий случай)
 - 3.4.3. Определение реакций для частных случаев
 - 3.4.4. Упрощения при расчете рам на устойчивость
- 3.5. Контрольные вопросы
- 3.6. РГР № 6. Расчет плоской рамы на устойчивость

Рекомендуемая литература

Приложения

Приложение 1. Таблицы реакций и усилий в изгибаемых стержнях от единичных смещений связей и внешних воздействий

Приложение 2. Таблицы реакций и усилий в сжато-изогнутых стержнях от единичных смещений связей

Приложение 3. Таблица значений трансцендентных функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней

Приложение 4. Таблица значений специальных функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней

Приложение 5. Программа расчета рам на устойчивость методом перемещений

Приложение 6. Образец оформления листов РГР (формат листа А-4)

Приложение 7. Пример выполнения и оформления расчетно-графической работы № 5

Учебное издание

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

**Руководство по выполнению
расчетно-графических работ**

Учебно-методическое пособие

**Кобелев Евгений Анатольевич
Масленников Никита Александрович**

Редактор
Корректор
Компьютерная верстка

Подписано к печати .2018. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.

Усл. печ. л. . Тираж 100 экз. Заказ . «С» .

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.

190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.

Отпечатано на ХХХ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А.