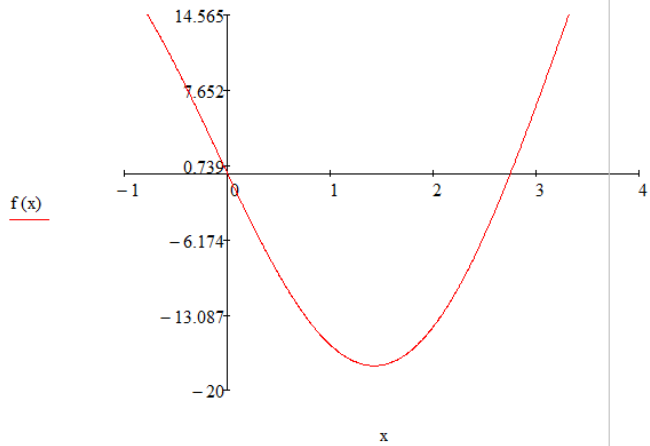
Лабораторная работа №4. Решение нелинейных уравнений и систем уравнений

Цель работы: решить нелинейное уравнение как минимум двумя способами, сравнить полученные результаты с результатами, полученными с помощью встроенных функций MathCAD и графически; Решить систему нелинейных уравнений итерационным способом, сравнить полученные результатами применения встроенных функций MathCAD, решить систему уравнений графически.

1. Рассмотрим решение нелинейного уравнения $f(x) = x^2 - 20\sin(x)$ с помощью метода дихотомии (деления пополам). Суть этого метода заключается в том, что для отыскания корня функции на отрезке [a,b] этот отрезок нужно поделить пополам и принять за первое приближение корня точку c, которая является серединой отрезка [a,b]. Далее из отрезков [a,c] и [c,b] выбирается тот, на концах которого функция f(x) имеет противоположные знаки. Если, например, $f(a)f(c) < 0$, то из этого следует, что на этом интервале функция f(x) пересекает ось x, т.е он содержит корень нашего уравнения. Далее выполняется деление пополам отрезка [a,b], пока не будет выполнено условие $|a-b| < \varepsilon$, где ε - погрешность вычисления корня.

   Для реализации такого цикла в MathCAD удобно использовать цикл по условию while. Условием выполнения такого цикла будет $|a-b| > \varepsilon$. Кроме значения переменной c выведем значение переменной k, описывающей количество итераций, необходимых для вычисления корня с заданной точностью. Перед началом вычислений желательно построить график функции, чтобы определить интервал, на котором определяется корень.

$f(x) := x^2 - 20\cdot\sin(x)$



$$
x(a,b,\varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow 0 \\
\text{while } |a-b| > \varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
c \leftarrow \dfrac{(a+b)}{2} \\
b \leftarrow c \ \text{ if } f(c)\cdot f(a) < 0 \\
a \leftarrow c \ \text{ otherwise} \\
k \leftarrow k+1
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$a := 2$

$b := 3$

$\varepsilon := 10^{-5}$

$$x(a,b,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 2.753 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2. Используем для поиска корня уравнения на этом отрезке метод хорд. Этот способ требует меньшего количества итерации при поиске корня. Вместо деления отрезка пополам разделим его в отношении $f(a)/f(b)$. Тогда первое приближение корня находится в точке $x = c$ пересечения отрезка $[a,b]$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Далее, как и в предыдущем методе, определяем отрезок, на котором находится корень, и применяем к нему описанный алгоритм до достижения необходимой точности. Формула для поиска точки c имеет вид $c = a - \dfrac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a)$.

   Листинг, описывающий решение уравнения данным способом приведен ниже

$f(x) := x^2 - 20\cdot\sin(x)$

$$
x(a,b,\varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow 1 \\
c \leftarrow 1 \\
\text{while } |f(c)| > \varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
c \leftarrow a - \dfrac{f(a)\cdot(b-a)}{(f(b)-f(a))} \\
b \leftarrow c \ \text{ if } f(c)\cdot f(a) < 0 \\
a \leftarrow c \ \text{ otherwise} \\
k \leftarrow k+1
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$a := 1$

$b := 3$

$\varepsilon := 10^{-6}$

$x(a,b,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 2.753 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. Рассмотрим итерационный способ решения уравнения. Для его осуществления надо:
   3.1 Определить начальное приближение корня x0 с помощью графика и вычислить первую производную от функции $f(x)$;

$f(x) := x^2 - 20\cdot\sin(x)$

$x0 := 2.5$

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$f1(x0) = 21.023$

3.2 Привести уравнение к виду $F(x) = x - m\,f(x)$. Для определения коэффициента m нужно воспользоваться неравенством $0 < 1 - m\,f'(x0) < 1$. Для решения неравенства нужно воспользоваться функцией solve с панели инструментов «Символьные». Решение неравенства показывает, что $m \in [0, 0.47]$, поэтому можно принять m = 0.04.

$1 - m\cdot f1(x0) < 1 \text{ solve}, m \rightarrow 0.0 < m < \infty$

$1 - m\cdot f1(x0) \geq 0 \text{ solve}, m \rightarrow -\infty < m \leq 0.047567239395716514962$

$m := 0.04$

3.3 Итерационным способом решить уравнение F(x)

$F(x) := x - m\cdot f(x)$

```
x(x1, ε) := | k ← 0
            | while 1
            |   | x0 ← x1
            |   | x1 ← F(x0)
            |   | k ← k + 1
            |   | break if |x0 − x1| < ε
            | (x1)
            | (k )
```

$x\left(x0, 10^{-5}\right) = \begin{pmatrix} 2.753 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. Решим уравнение с помощью встроенного в MathCAD вычислительного блока Given-Find, решающее уравнения итерационным методом. Перед вычислительным блоком требуется задать начальное приближение корня. В самом вычислительном блоке требуется использовать логический оператор «=» с панели инструментов «Булева алгебра».

$x := 2$

Given

$x^2 - 20 \cdot \sin(x) = 0$

$\mathrm{Find}(x) = 2.753$

5. Решим систему нелинейных уравнений $\begin{cases} x - \sin(y+2) + 1.5 = 0 \\ \cos(x-2) + y - 0.5 = 0 \end{cases}$. Для этого можно воспользоваться итерационным методом (модифицированным методом Ньютона). Для этого нужно выполнить следующие действия:

5.1 Преобразовать систему, выразив x из первого уравнения и y из второго $\begin{cases} x = \sin(y+2) - 1.5 \\ y = 0.5 - \cos(x-2) \end{cases}$;

5.2 Задать начальные приближения x0 и y0 и запустить процедуру подстановки начальных приближений в систему. Листинг программы, реализующий данный этап, приведен ниже

```
ORIGIN := 1

F1(x,y) := sin(y + 2) − 1.5

F2(x,y) := 0.5 − cos(x − 2)

iter(x0,y0,ε) := | k ← 0
                 | while 1
                 |   | x ← x0
                 |   | y ← y0
                 |   | x0 ← F1(x,y)
                 |   | y0 ← F2(x,y)
                 |   | Δx ← x − x0
                 |   | Δy ← y − y0
                 |   | k ← k + 1
                 |   | break if max(|Δx|,|Δy|) < ε
                 | (x0)
                 | (y0)
```

Выход из цикла происходит по условию, что модуль разностей k и k+1 приближений для x или y становится меньше заданной погрешности вычисления корней систему уравнений. Результат работы функции iter(x0, y0, ε), где ε - заданная погрешность вычисления, приведен ниже

$$x0 := 2$$

$$y0 := 1$$

$$\varepsilon := 10^{-5}$$

$$\mathrm{iter}(x0, y0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -1.703 \\ 1.346 \end{pmatrix}$$

6. Найдем решение системы уравнений с помощью вычислительного блока Given-Find

$$x := 2$$

$$y := 1$$

Given

$$x - \sin(y + 2) + 1.5 = 0$$

$$\cos(x - 2) + y - 0.5 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -1.703 \\ 1.346 \end{pmatrix}$$

В случае неудачи применения функции Find, в MathCAD возможно применение функции Minerr, которая позволяет найти значение x и y, при которых уравнения системы вычислительного блока принимают наиболее близкие к 0 решения. Недостатком этой функции является более высокая по сравнению с Find погрешность вычислений

$$x := 2$$

$$y := 1$$

Given

$$x - \sin(y + 2) + 1.5 = 0$$

$$\cos(x - 2) + y - 0.5 = 0$$

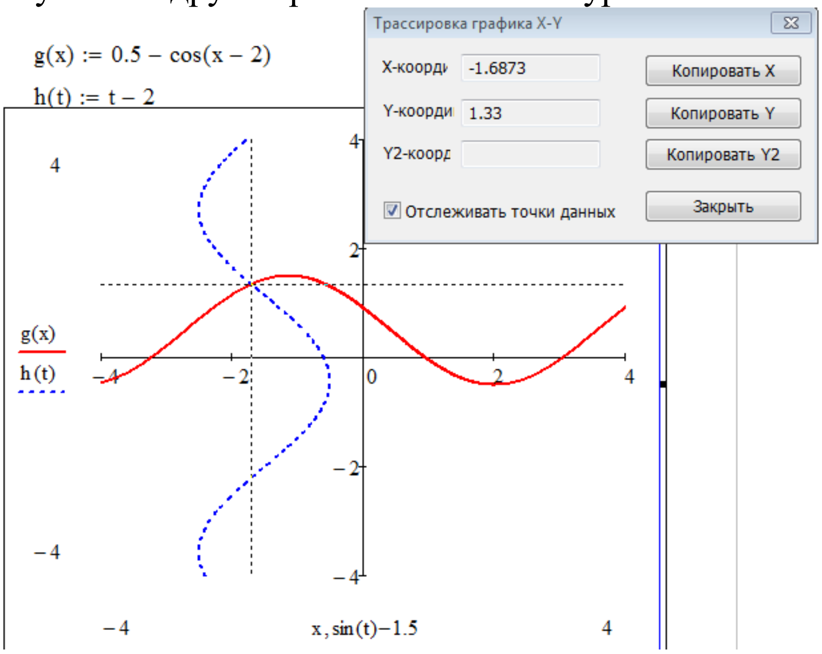
$$\mathrm{Minerr}(x, y) = \begin{pmatrix} -1.703 \\ 1.346 \end{pmatrix}$$

7. Решим систему уравнений графически. Для этого выразим в уравнениях переменную y через x

$y = 0.5 - \cos(x - 2)$,

$y = \arcsin(x + 1.5) - 2$.

Форма записи последнего уравнения не очень удобна для представления в MathCAD, так как при попытке ее построить график строится только на интервале $y \in [-\pi/2-2; \pi/2-2]$. Поэтому можно задать x через параметр t: $x = \sin(t) - 1.5$, тогда $y = t - 2$. Задавая второе уравнение системы как параметрическое, получаем графики функций, изображенные ниже, и с помощью трассировки определяем точку пересечения, и убеждаемся в отсутствии других решений системы уравнений.



Задания для самостоятельного выполнения

1. Решить уравнение методом дихотомии (методом хорд) и итерационным методом с погрешностью 10^{-5}. Начальные приближения выбрать, используя построенный график функции. Проверить полученный результат с помощью встроенных функций MathCAD.

1. $\ln x + (x+1)^3 = 0$.
2. $x \cdot 2^x = 1$.
3. $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$.
4. $x - \cos x = 0$.
5. $3x + \cos x + 1 = 0$.
6. $x + \ln x = 0,5$.
7. $2 - x = \ln x$.
8. $(x-1)^2 = \frac{1}{2} e^x$.
9. $(2-x)e^x = 0,5$.
10. $2,2x - 2^x = 0$.
11. $x^2 + 4\sin x = 0$.
12. $2x - \lg x = 7$.
13. $5x - 8\ln x = 8$.
14. $3x - e^x = 0$.
15. $x(x+1)^2 = 1$.
16. $x = (x+1)^3$.
17. $x^2 = \sin x$.
18. $x^3 = \sin x$.
19. $x = \sqrt{\lg(x+2)}$.
20. $x^2 = \ln(x+1)$.

2 Решить систему нелинейных уравнений. Построить график и по нему определить начальные приближения неизвестных. Решить систему нелинейных уравнений итерационным методом с погрешностью 10^{-5}. Проверить полученный результат с помощью встроенных функций MathCAD.

1. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0,7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos(x+0,5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \cos x + y = 1,5; \\ 2x - \sin(y-0,5) = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1,3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0,8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0,4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos(x+0,5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1,5; \\ x + \cos(y-2) = 0,5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1,2; \\ 2y - \cos x = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x-1) + y = 0,7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos y + x = 1,5; \\ 2y - \sin(x-0,5) = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin(y+0,5) - x = 1; \\ \cos(x-2) + y = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \cos(y+0,5) + x = 0,8; \\ \sin x - 2y = 1,6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1,3; \\ y - \sin(x+1) = 0,8. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ \sin x + y = -0,4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \cos(y+0,5) - x = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1,5; \\ \cos(x-2) + y = 0,5. \end{cases}$