СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ В 3-м СЕМЕСТРЕ

Контрольная работа № 3

ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И РЯДЫ

191–200. Дана функция $z=f(x,y)$. Показать, что

$$F\left(x;y;z;\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\equiv 0.$$

191. $z=y/(x^2-y^2)^5$; $F=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{z}{y^2}$.

192. $z=\sin^2(y-ax)$; $F=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

193. $z=x^y$; $F=y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-(1+y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

194. $z=\cos y+(y-x)\sin y$; $F=(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

195. $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $F=x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

196. $z=x/y$; $F=x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

197. $z=\operatorname{arctg}(x/y)$; $F=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

198. $z=\ln(x^2+y^2+2y+1)$; $F=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

199. $z=e^{-\cos(ax+y)}$; $F=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

200. $z=\ln(x+e^{-y})$; $F=\partial z\ \partial^2 z\ -\ \partial z\ \partial^2 z$

201–210. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

201. $z = x^2 + xy$; $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le 3$.

202. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$; $0 \le y \le x \le 1$.

203. $z = x^2 + xy - 2$; $4x^2 - 4 \le y \le 0$.

204. $z = x^2 - xy - 4x$; $0 \le y$; $0 \le x$; $2x + 3y \le 12$.

205. $z = 2x + y - xy$; $0 \le x \le 4$; $0 \le y \le 4$.

206. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $0 \le x \le 2$; $0 \le y \le 3$.

207. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $x \le 1$; $y \le 1$; $1 \le x + y$.

208. $z = x^2/2 - xy$; $x^2/3 \le y \le 3$.

209. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; $x \le 0$; $y \le 0$; $-3 \le x + y$.

210. $z = xy - 2x - y$; $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le 4$.

211–220. Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$. Найти:

1). $\operatorname{grad} z(x, y)$ и его значение в точке A;

2). производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$.

211. $z = 2x^2 + xy$; $A(-1; 2)$; $\vec{a}(3; 4)$.

212. $z = \operatorname{arctg}(y/x)$; $A(-1; 1)$; $\vec{a}(1; -1)$.

213. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$; $A(2; 3)$; $\vec{a}(4; -3)$.

214. $z = \arcsin(x^2/y)$; $A(1; 2)$; $\vec{a}(5; -12)$.

215. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2; 1)$; $\vec{a}(1; 2)$.

216. $z = x^3y + xy^3$; $A(1; 3)$; $\vec{a}(-5; 12)$.

217. $z = \ln(2x + 3y)$; $A(2; 2)$; $\vec{a}(2; -3)$.

218. $z = 3x/y^2$; $A(3; 4)$; $\vec{a}(-3; -4)$.

219. $z = \operatorname{arctg}(xy)$; $A(2; 3)$; $\vec{a}(4; 3)$.

220. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$; $A(1; 1)$; $\vec{a}(1; 2)$.

Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где

221. $a_k = (3k+1)(k3^k)^{-1/2}$. 222. $a_k = \dfrac{k^3}{(2k)!}$. 223. $a_k = \dfrac{5^k}{3^k(2k+1)}$.

224. $a_k = \dfrac{1}{(2k+1)^2 - 1}$. 225. $a_k = (k\ln k)^{-1}$. 226. $a_k = \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

227. $a_k = \dfrac{2^k}{3k!}$. 228. $a_k = \dfrac{e^{-n^{1/2}}}{n^{1/2}}$. 229. $a_k = \dfrac{k+3}{k^3 - 2}$. 230. $a_k = \dfrac{k^k}{k!}$.

231–240. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, где

231. $c_n = \frac{(n+1)^{n/3}}{n!}$. 232. $c_n = \frac{2^n}{n(n+1)}$. 233. $c_n = \frac{(2n)!}{n^n}$. 234. $c_n = \frac{3^n n!}{(n+1)^n}$.

235. $c_n = \frac{n}{3^n(n+1)}$. 236. $c_n = \frac{5^n}{n^{1/n}}$. 237. $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

238. $c_n = \frac{n+1}{3^n(n+2)}$. 239. $c_n = \frac{3^n}{\left(3^n(3n-1)\right)^{1/2}}$. 240. $c_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$.

241–250. Вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0{,}001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно.

241. $f(x) = e^{-x^2/3}$; $b = 1$. 242. $f(x) = x\ln(1 + x^2)$; $b = 0{,}5$.

243. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$; $b = 1$. 244. $f(x) = \mathrm{arctg}(x^2)$; $b = 0{,}5$.

245. $f(x) = x\sin(x^2)$; $b = 1$. 246. $f(x) = x^2\ln(1 + x^{1/2})$; $b = 0{,}5$.

247. $f(x) = \sin(x^2)$; $b = 1$. 248. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; $b = 0{,}5$.

249. $f(x) = x^{1/2}\cos x$; $b = 1$. 250. $f(x) = xe^{-x}$; $b = 0{,}5$.

251–260. Разложить данную функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b).

251. $f(x) = x - 1$; $a = -1$, $b = 1$. 252. $f(x) = |x|$; $a = -\pi$, $b = \pi$.

253. $f(x) = 2 + |x|$; $a = -1$, $b = 1$. 254. $f(x) = x^2+1$; $a = -2$, $b = 2$.

255. $f(x) = |1 - x|$; $a = -2$, $b = 2$. 256. $f(x) = x + 1$; $a = -\pi$, $b = \pi$.

257. $f(x) = x^2$; $a = 0$; $b = 2\pi$. 258. $f(x) = (\pi - x)/2$; a $-\pi$, $b = \pi$.

259. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ $a = -\pi$, $b = \pi$.

260. $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi \le x \le 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ $a = -\pi$, $b = \pi$.

ЧАСТЬ 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

261–280. Найти общее решение дифференциального уравнения.

261. $xy' + y = 3$. 262. $xy' = y\ln(y/x)$.

263. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$. 264. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$.

265. $y'\cos x = (y + 1)\sin x$. 266. $xy' - 2y + x^2 = 0$.

267. $xy' + y = \sin x$.

268. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

269. $(1 - x^2)y' + xy = 1$.

270. $y' + y = e^{-x}$.

271. $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$.

272. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

273. $xy'' + 2y' = x^3$.

274. $y''x\ln x - y' = 0$.

275. $2yy'' = 1 + (y')^3$.

276. $y''y^3 = 1$.

277. $xy'' - y' = x^2e^x$.

278. $2(y')^2 = (y - 1)y''$.

279. $(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0$.

280. $y'' - 2y'\mathrm{tg}x = \sin x$.

281–290. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

281. $y'' - 3y' = x + \cos x$; $y_0 = 0$; $y_1 = -1/9$.

282. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$; $y_0 = 1$; $y_1 = 0$.

283. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$; $y_0 = 0$; $y_1 = 2$.

284. $y'' - y' = 9xe^{2x}$; $y_0 = 0$; $y_1 = -5$.

285. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$; $y_0 = 0$; $y_1 = -1$.

286. $y'' - y' = x + 1$; $y_0 = 0$; $y_1 = 2$.

287. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$; $y_0 = y_1 = 0$.

288. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$; $y_0 = 4$; $y_1 = 0$.

289. $y'' + 2y' + y = x + \sin x$; $y_0 = y_1 = 0$.

290. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$; $y_0 = 0$; $y_1 = 1/9$.

291–300. Дана однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Требуется: 1) записать данную систему в матричной форме; 2) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения, т. е. через собственные числа и собственные векторы матрицы системы; 3) выписать решение системы из ее решения в матричной форме.

291. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

292. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases}$

293. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

294. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

295. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

296. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$

297. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

298. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

299. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

300. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$