## Задание 2. Расчёт двутавровой балки

## Задание составлено на тему: “Плоский поперечный изгиб” “Проверка прочности балки”

Плоским поперечным изгибом называется такое напряженно-деформированное состояние балки, при котором из всех внутренних силовых факторов не равны нулю только поперечная сила в направлении одной оси и изгибающий момент относительно другой главной центральной оси инерции сечения балки.

Проверка прочности предусматривает определение внутренних силовых факторов Q(z) и M(z) в каждом сечении балки, нахождение по ним максимальных по модулю нормальных - $\sigma$, касательных - $\tau$ и эквивалентных - $\sigma_{экв}$ напряжений в соответствующих точках балки и сравнение названных напряжений с допускаемыми.

### 1.1. Содержание задания.

Расчётные схемы балки с действующими на неё нагрузками даны на рис 2.1

Размеры балки и значения нагрузки приведены в таблице 2.1

*Выбор варианта задания* – исходные данные принимаются в соответствии с шифром студента, который необходимо взять у преподавателя: расчётная схема балки выбирается на рис. 2.1 по 2-й цифре шифра; численные данные к расчету кронштейна определяются, по 1-й цифре из таблицы 2.1.

В задании требуется:

1. Для заданной схемы балки построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M.

2. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать

Расчетная схема балки к РПР-2 принимается по 2-й цифре шифра:

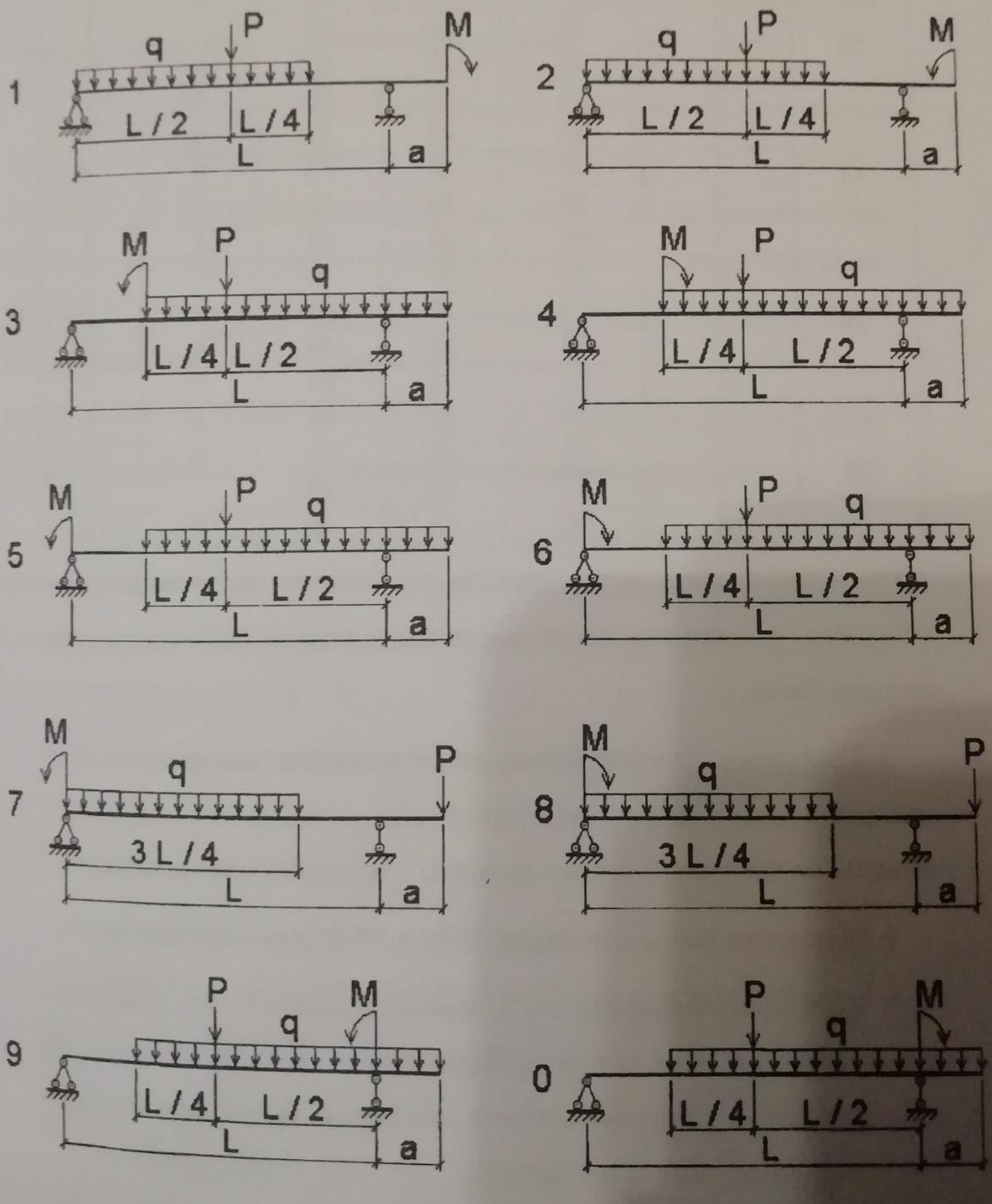



Рис. 2.1

Таблица 2.1.

| Группа | 1-я цифра шифра | P кН | q кН/м | M кНм | L м | a м |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0 | 20 | 10 | 50 | 4 | 1 |
| | 1 | 30 | 20 | 60 | 5 | 2 |
| | 2 | 40 | 30 | 40 | 6 | 2 |
| | 3 | 50 | 10 | 60 | 7 | 3 |
| 22 | 0 | 60 | 20 | 50 | 5 | 1 |
| | 1 | 40 | 30 | 60 | 6 | 2 |
| | 2 | 50 | 10 | 50 | 7 | 2 |
| | 3 | 60 | 20 | 60 | 8 | 3 |
| 23 | 0 | 20 | 30 | 40 | 6 | 2 |
| | 1 | 30 | 10 | 60 | 7 | 2 |
| | 2 | 50 | 20 | 50 | 8 | 3 |
| | 3 | 60 | 30 | 40 | 9 | 3 |
| 24 | 0 | 40 | 10 | 60 | 4 | 1 |
| | 1 | 30 | 30 | 50 | 5 | 2 |
| | 2 | 20 | 20 | 40 | 6 | 2 |
| | 3 | 50 | 20 | 40 | 7 | 3 |

двутавровое сечение балки, приняв допускаемое напряжение $[\sigma]$ = =160 Мпа, и построить опору нормальных напряжений $\sigma$ в опасном сечении балки.

3. Проверить точность балки по касательным напряжениям приняв допускаемое напряжение $[\tau]$=100Мпа, и построить эпюру касательных напряжений в стенке двутавра для опасного сечения балки.

4. Проверить прочность балки по III и IV теориям прочности.

5. УИРС:В соответствии с п.2. задания подобрать стальную балку прямоугольного сечения при соотношении его высоты и ширины h/в = 2; определить экономию металла при замене балки прямоугольного сечения на двутавровую балку.

План выполнения задания

2.1. Начертить в удобном масштабе расчетную схему балки, указать на ней действующие нагрузки (силы, моменты), длины пролетов, консолей и участков, показать реакции опор, пронумеровать участки.

2.2. Составить уравнения равновесия балки, определить опорные реакции и нанести их значения на схему.

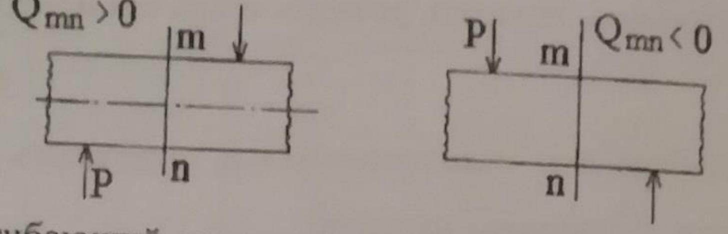
2.3. Применить метод сечений при определении поперечных сил Q и изгибающих моментов M, построить эпюры Q и M. При построении эпюр согласно этому методу следует мысленно разрезать балку на две части в пределах каждого участка произвольно намеченным и зафиксированным по длине поперечным сечением. Причем, фиксированная координата по длине балки для данного поперечного сечения может отсчитываться от общего начала координат слева и справа балки или отдельно в пределах каждого участка.

Отбросить одну часть, например, правую. Заменить ее действие на левую искомыми внутренними усилиями Q и M. Найти эти усилия из уравнений равновесия системы сил, приложенных к левой части, включая и сами Q и M.

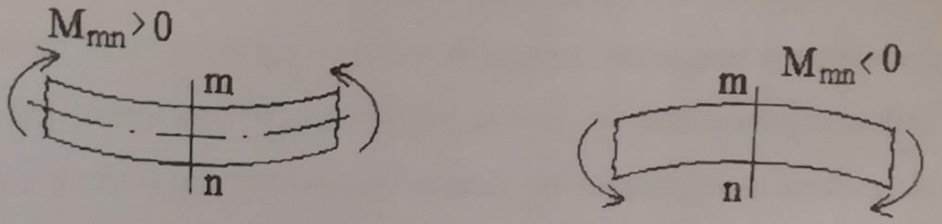
Поперечная сила Q в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил.

Изгибающий момент M в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно центра тяжести сечения.

Поперечная сила в сечении балки считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз, и отрицательной – в противоположном случае.




Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз, и отрицательным – выпуклостью вверх.




Записать аналитические выражения для поперечной силы Q(z) и изгибающего момента M(z) для каждого участка балки и вычислить значения Q(z) и M(z) на границах каждого участка. Если зависимость для изгибающего момента на участке криволинейна, а поперечная сила на границах этого участка имеет разный знак, то следует определить координату z на этом участке, где поперечная сила равна нулю, и для этой точки вычислить экстремальное значение изгибающего момента.

По полученным значениям построить графики – эпюры Q(z) и M(z).

2.4. Используя дифференциальные зависимости при изгибе:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{d^2M}{d^2z} = q$$

проверить правильность построения обеих эпюр.

2.5. Подобрать из условия прочности балки по нормальным напряжениям двутавровое сечение по моменту сопротивления $W_x$:

$$W_x \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]}$$

Выписать из сортамента геометрические характеристики сечения $W_x$, $J_x$ – осевой момент инерции, $S_x$ – статический момент полусечения, s – толщина стенки, b и t – ширина и толщина полки двутавра.

2.6. Определить максимальные нормальные напряжения по формуле

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x}$$

и построить эпюру σ в сечении балки (рис. 2.2).

2.7. Проверить прочность балки по касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}| \cdot S_x}{J_x \cdot s} \leq [\tau]$$

и построить эпюру касательных напряжений τ в стенке двутавра, рассчитав их в точках перехода от стенки к полке по формуле:

$$\tau_к = \frac{|Q_{max}| b \cdot t \left(\frac{h-t}{2}\right)}{J_x \cdot s}$$

2.8. Проверить прочность балки по III теории прочности:

$$\sigma_{экв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Так как расчетное напряжение зависит от σ и τ, то проверке подлежит тот элемент материала балки, для которых σ и τ будут одновременно возможно большими и это осуществимо при наличии таких двух условий:

а) Изгибающий момент и поперечная сила достигают наибольшей величины в одном и том же сечении по длине балки;

б) Ширина резко меняется вблизи краев сечения (например, в двутавре или пустотелом прямоугольном профиле). Нормальные и касательные напряжения на уровне перехода от полки к стенке для таких профилей имеют величину, близкую к максимальной.

Указанные два условия, таким образом, определяют и необходимость дополнительной проверки прочности, а также сечение и точку на нем, для которых эта проверка должна быть сделана.

Если эти условия не имеют места, тогда следует выбрать несколько поперечных сечений по длине балки и несколько точек по высоте сечения, могущих дать наиболее высокие значения расчетного напряжения.

Для двутаврового сечения:

$$\sigma_{к} = \sigma = -\frac{M_x \cdot Y_к}{J_x} = -\frac{M\left(\frac{h}{2} - t\right)}{J_x} \tag{7}$$

$$\tau_к = \tau = \frac{Q \cdot S_x^к}{J_к \cdot S} = \frac{Qbt\left(\frac{h-t}{2}\right)}{J_к \cdot S} \tag{8}$$

Значения M и Q в этих формулах берутся для одного выбранного сечения.

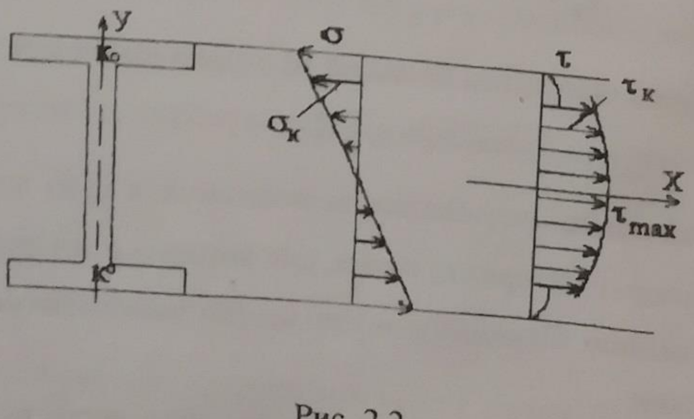



Рис. 2.2.

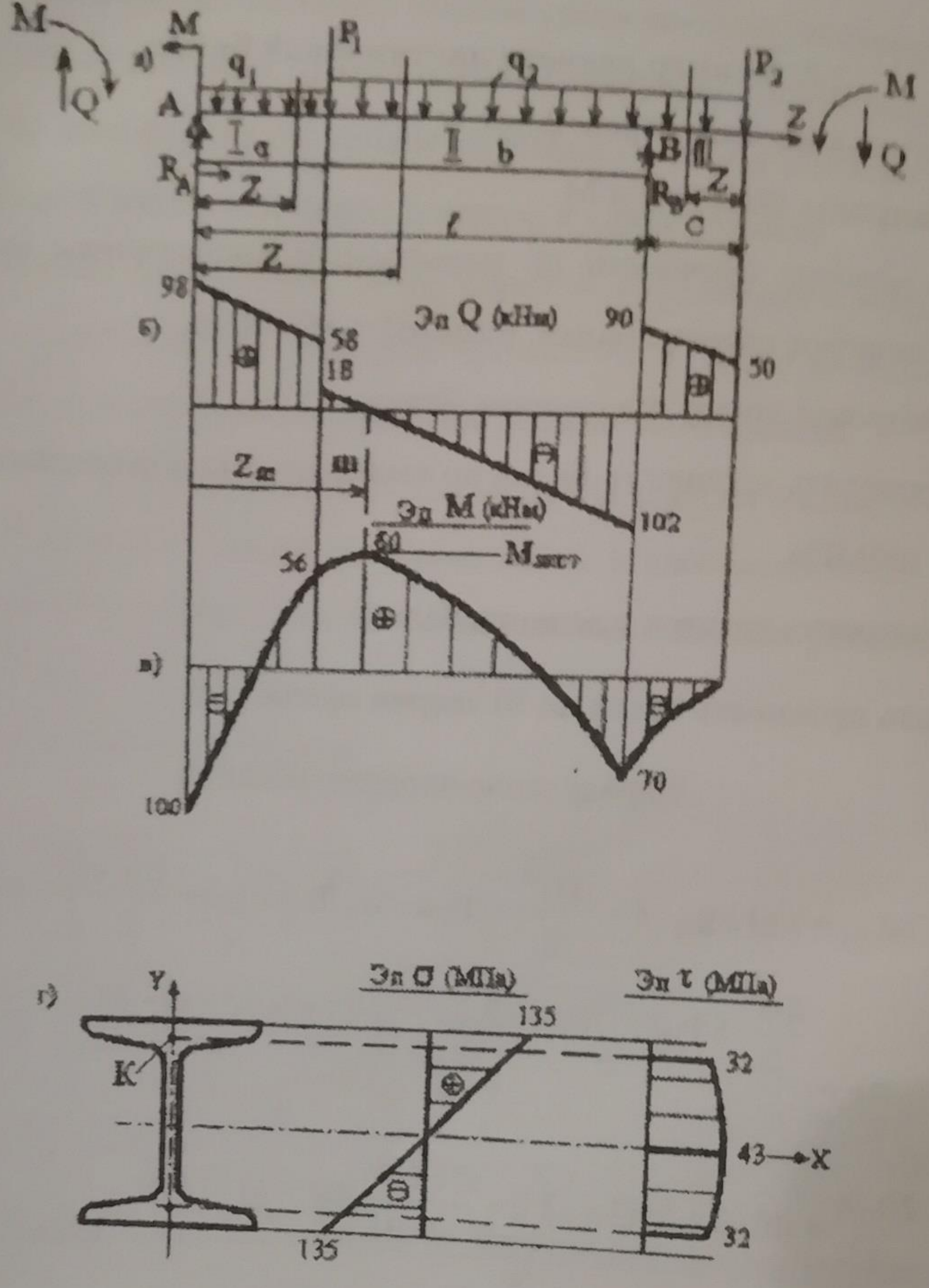



Рис. 2.3

**Исходные данные**:

C = 1 м; $a$ = 2 м; b = 3 м; $\ell$ = 5 м; $q_1$ = 20 кН/м; $q_2$ = 40 кН/м;

M = 100 кНм; $P_1$ = 40 кН; $P_2$ = 50 кН; [σ] = 160 МПа; [τ] = 100 МПа.

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_A + R_B - q_1 a - q_2 (b + c) - P_1 - P_2 =$$
$$= 192 + 98 - 20 \cdot 2 - 40(3 + 1) - 40 - 50 = 0$$

Опорные реакции определены верно.

Построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M

I участок слева $0 < Z < a$

Уравнение поперечной силы

$$Q_I = R_A - q_1 Z$$

и изгибающего момента

$$M_I = -M + R_A Z - \frac{q_1 Z^2}{2}$$

$$\text{При} \begin{cases} Z = 0;\ Q_0 = R_A = 98\ \text{кН};\ M_0 = -M = -100\ \text{кНм}. \\ Z = a = 2;\ Q_0 = 58\ \text{кН};\ M_2 = 56\ \text{кНм}. \end{cases}$$

Построим эпюры Q и M на I участке, где поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M по квадратичной параболе.

II участок слева $a < Z < a + b$

$$Q_{II} = R_A - q_1 a - q_2 (Z - a) - P_1 \qquad (1)$$

$$M_{II} = -M + R_A Z - q_1 a\left(Z - \frac{a}{2}\right) - P_1 (Z - a) - q_2 \frac{(Z - a)^2}{2} \qquad (2)$$

$$\text{При} \begin{cases} Z = a = 2;\ Q_2 = 18\ \text{кН};\ M_2 = 56\ \text{кНм}. \\ Z = a + b = 5;\ Q_5 = -102\ \text{кН};\ M_5 = -70\ \text{кНм}. \end{cases}$$

Построим эпюры Q и M на II участке, где поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M по квадратичной параболе.

На этом участке имеет место экстремум изгибающего момента, так как есть сечение (•)m, в котором поперечная сила Q = 0.

Из уравнения (1) найдем координату $Z_m$ экстремального изгибающего момента $M_{экс}$

$$Q_{II} = R_A - q_1 a - q_2(Z_m - a) - P_1 = 0$$

отсюда

$$Z_m = \frac{R_A - q_1 a + q_2 a - P_1}{q_2} = \frac{98 - 20\cdot 2 + 40 \cdot 2 - 40}{40} = 2{,}45 \text{ м}$$

Из уравнения (2) находим

$$M_{экс} = -M + R_A Z_m - q_1 a\left(Z_m - \frac{a}{2}\right) - P_1(Z_m - a) - q_2\left(\frac{Z_m - a}{2}\right)^2 =$$

$$= 60 \text{ кНм}.$$

III участок справа $0 < Z < c$

$$Q_{III} = P_2 + qZ$$

$$M_{III} = -P_2 z - q\frac{z^2}{2}$$

$$\text{При} \begin{cases} Z = 0;\ Q_0 = P_2 = 50 \text{ кН};\ M_0 = 0 \\ Z = c = 1 \text{ м};\ Q_1 = 90 \text{ кН};\ M_1 = -70 \text{ кНм}. \end{cases}$$

Построим эпюры на III участке, где поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M по квадратичному.

Эпюры Q и M представлены на рис. 2.3б,в.

Максимальная поперечная сила $|Q|_{max} = 102$ кН.

Максимальный изгибающий момент $|M|_{max} = 100$ кНм.