

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

И.М. Соловьёва

Задание для контрольной работы

по дисциплине

«МАТЕМАТИКА» (Б1.О.07)

для специальности

23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»

по специализации

«Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и
оборудование»

Форма обучения – заочная

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 5

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ»

Санкт-Петербург 2022

Контрольная работа №5.

Контрольная работа состоит из двух частей и содержит 12 задач.

Часть 1. Дифференциальные уравнения (9 задач).

Часть 2. Ряды (3 задачи).

Работа допускается к защите, если она содержит 5 (и более) полностью и правильно решённых задач из части 1 и 2 (и более) из части 2. Работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится меньшее количество решённых задач. Комментируйте свои решения.

5.01-5.10 (а, б). Решить задачу Коши.

5.01. а) $y' = \frac{5}{2x+3}$, $y(-1) = 1$.

б) $y'' = 3x^2 - x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.02. а) $y' = \frac{10}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.

б) $y'' = \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.03. а) $y' = \frac{11}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 1$.

б) $y'' = 2x - 5$, $y(1) = 7$, $y'(1) = 3$.

5.04. а) $y' = 3e^x + 1$, $y(0) = 1$.

б) $y'' = \frac{x}{6} + \sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

5.05. а) $y' = \frac{11}{x-4}$, $y(5) = 1$.

б) $y'' = x^3 + 2x - 3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5.06. а) $y' = \frac{5}{\cos^2 2x}$, $y(0) = 3$.

б) $y'' = \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.07. а) $(x+1)dx + ydy = 0$, $y(0) = 1$.

б) $y'' = 2x^2 - 3x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.08. а) $(x^2 + 3)dx + dy = 0$, $y(0) = 2$.

б) $y'' = 6x + x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.09. а) $\frac{dx}{x} - 2dy = 0$, $y(1) = 0$.

б) $y'' = \sin 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.10. а) $3x^3 dx = 2x^2 dy$, $y(1) = 2$.

б) $y'' = 7x + 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.11-5.20. Составить таблицу численного решения методом Эйлера дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ при начальном условии $y(x_0)=y_0$ на отрезке $[a,b]$ с шагом h . По полученным данным построить интегральную кривую.

Задачи	$f(x,y)$	$[a,b]$	x_0	y_0	h
5.11.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 2y\right)}{(4x + 2)}$	[2,4]	2	1	0.2
5.12.	$\frac{\left(\frac{3}{y} - y\right)}{(2x + 3)}$	[2,3]	2	2	0.1
5.13.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 3y\right)}{(6x + 4)}$	[3,5]	3	2	0.2
5.14	$\frac{\left(\frac{2}{y} - 2y\right)}{(4x + 5)}$	[1,2]	1	3	0.1
5.15.	$\frac{\left(\frac{6}{y} - y\right)}{(2x + 6)}$	[1,3]	1	6	0.2
5.16.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - 3y\right)}{(6x + 7)}$	[2,3]	2	4	0.1
5.17.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 2y\right)}{(4x + 1)}$	[2,4]	2	2	0.2
5.18.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - y\right)}{(2x + 2)}$	[2,3]	2	1	0.1
5.19.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 3y\right)}{(6x + 2)}$	[3,5]	3	1	0.2
5.20.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - 2y\right)}{(4x + 4)}$	[1,2]	1	2	0.1

5.21-5.30 (а, б, в). Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений.

5.21.

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

в) $y'' + y = 0$.

5.22.

а) $y'' - 5y' - 6y = 0$,

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$,

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

5.23.

а) $y'' + y' - 6y = 0$,

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

в) $y'' + 4y = 0$.

5.24.

а) $y'' - 8y' + 25y = 0$,

б) $y'' + 5y' + 6y = 0$,

в) $y'' - 2y' + y = 0$.

5.25.

а) $y'' + 3y' = 0$,

б) $y'' - 8y' + 16y = 0$,

в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

5.26.

а) $y'' - 5y = 0$,

б) $y'' - 14y' + 49y = 0$,

в) $y'' + 9y = 0$.

5.27.

а) $y'' + 5y' - 6y = 0$,

б) $y'' + 12y' + 36y = 0$,

в) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

5.28.

а) $y'' + 5y' + 4y = 0$,

б) $y'' + 22y' + 121y = 0$,

в) $y'' + 16y = 0$.

5.29.

а) $y'' - 5y' + 4y = 0$,

б) $y'' - 26y' + 169y = 0$,

в) $y'' - 4y' + 8y = 0$.

5.30.

а) $y'' - 100y = 0$,

б) $y'' + 14y' + 49y = 0$,

в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

5.31-5.40 (а, б). Найти общее решение дифференциальных уравнений.

5.31. а) $(2y+1)\sin^2x dy + 5y dx = 0$;

б) $y' \sin x + y \cos x = 2x$.

5.32. а) $(x+2)\cos^2(2y) dx + 3x dy = 0$;

б) $xy' - 2y = x^4 \cos x$.

5.33. а) $3y dx - (y+3)\operatorname{tg}(2x) dy = 0$;

б) $y'x - y = x^3 e^x$.

5.34. а) $2x dy - (2x+1)\operatorname{tg}(3y) dx = 0$;

б) $xy' + x^2 = 3y$.

5.35. а) $(5y-2)\operatorname{tg}(7x) dy - 2y dx = 0$;

б) $xy' - y = 5x^2 \cos(3x)$.

5.36. а) $(2x^2-5)\operatorname{ctg}(4y) dx + 3x dy = 0$;

б) $x dy = (2x \ln x - y) dx$.

5.37. а) $-3y dx + (y^2-3y)\cos^2(6x) dy = 0$;

б) $(x \ln x - y) dx + x dy = 0$.

5.38. а) $(y^2-3)e^x dy - 5y dx = 0$;

б) $xy' - y = 2 \ln x$.

5.39. а) $-5x dy + (x^2-x)\sin^2(3y) dx = 0$;

б) $y' - y = 4x e^x$.

5.40. а) $2x dy + (x^2-4)e^y dx = 0$;

б) $xy' - 3y = x^5 \sin(2x)$.

5.41-5.50 (а, б). Решить задачу Коши.

- 5.41. а) $y'=(2x+3)/(4y+5)$, $y(0)=1$;
б) $(y-2x+3)dx+(x-y+3)dy=0$, $y(1)=2$.
- 5.42. а) $y'=(3x+4)/(2y+5)$, $y(0)=2$;
б) $(4x+2y+3)dx+(2x+2y+2)dy=0$, $y(1)=1$.
- 5.43. а) $y'=(4x+3)/(3y+1)$, $y(0)=1$;
б) $(2y-3x+1)dx+(2x-y+2)dy=0$, $y(1)=0$.
- 5.44. а) $y'(2y+3)=2x+5$, $y(0)=1$;
б) $(x-2y+3)dx+(3y-2x+4)dy=0$, $y(1)=2$.
- 5.45. а) $y'(7y-2)=2x+3$, $y(0)=2$;
б) $(x+4y+3)dx+(4x-y+2)dy=0$, $y(1)=1$.
- 5.46. а) $y'=(2x-3)/(2y+8)$, $y(1)=1$;
б) $(3y-2x-2)dx+(3x-3y+2)dy=0$, $y(0)=2$.
- 5.47. а) $y'=(6x+5)/(4y+3)$, $y(1)=2$;
б) $(3x-2y+3)dx+(4y-2x-1)dy=0$, $y(0)=1$.
- 5.48. а) $y'=(4x-1)/(2y+5)$, $y(1)=0$;
б) $(4y-3x+2)dx+(4x-3y+2)dy=0$, $y(0)=2$.
- 5.49. а) $y'(3y-7)=x+4$, $y(1)=1$;
б) $(4x-y+6)dx+(3-x-2y)dy=0$, $y(0)=1$.
- 5.50. а) $y'(y-2)=5x+3$, $y(1)=2$;
б) $(2y-2x+3)dx+(2x-y+5)dy=0$, $y(0)=2$.

5.51-5.60 (а, б). Найти общие решения дифференциальных уравнений.

- 5.51. а) $y''=y'/x$, б) $y''+4y=1/\sin(2x)$.
- 5.52. а) $xy''+1=y'$, б) $y''+9y=1/\cos(3x)$.
- 5.53. а) $2y'+xy''=0$, б) $y''-6y'+9y=e^{3x}/x$.
- 5.54. а) $xy''+y'=4x$, б) $y''+16y=\cos 4x/\sin^2 4x$.
- 5.55. а) $(1+x^2)y''+2xy'=0$, б) $y''-2y'+y=e^x/x$.
- 5.56. а) $xy''+x+y'=0$, б) $y''+y=1/\sin^3 x$.
- 5.57. а) $y''-y'/x=x^3$, б) $y''+y=1/\cos^2 x$.
- 5.58. а) $yy''=(y')^2$, б) $y''-2y'+y=e^x/(9+x^2)$.
- 5.59. а) $x^3y''+x^2y'=1$, б) $y''-4y'+4y=e^{2x}/x^3$.
- 5.60. а) $xy''-y'=2x^2$, б) $y''+y=1/\cos^3 x$.

5.61-5.70 (а, б). Решить задачу Коши.

- 5.61. а) $y''+4y'+4y=4x^2+4x+6$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-5y'+6y=-e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.62. а) $y''+2y'+5y=5x^2+2x+7$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-y'=e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.63. а) $y''+y'=2x+3$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-6y'+8y=3e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.64. а) $y''-y'=-2x+1$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-4y'+3y=-3e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.65. а) $y''-2y'=-4x$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-2y'+y=-e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.66. а) $y''+2y'=4x+4$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''+4y'+4y=9e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.67. а) $y''-3y'=-6x-1$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-6y'+9y=4e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.68. а) $y''-5y'+6y=6x^2-5x+8$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''-2y'=2e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.69. а) $y''+2y'+y=4x^2+2x+3$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''+2y'=-e^{-2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 5.70. а) $y''+6y'+9y=9x^2+6x+11$, $y(0)=1, y'(0)=0$,
б) $y''+3y'+2y=-e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.

5.71. Локомотив уменьшил скорость с 10 м/с до 5 м/с за 60 с. Полагая силу торможения пропорциональной квадрату скорости движения локомотива, определить время, необходимое для достижения скорости 2 м/с.

5.72. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству. Определить, какая часть вещества останется через 200 лет, если период полураспада составляет 1600 лет.

5.73. Заряженный конденсатор теряет заряд по причине несовершенства изоляции со скоростью пропорциональной наличному заряду. Определить время, через которое конденсатор разрядится на 75%, если на 50% он разряжается за 3 ч.

5.74. В сосуде 100 л водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью 5 л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе содержалось 10 кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

5.75. Через щель в дне цилиндрического резервуара вытекает жидкость. В течение первых суток вытекло 20% жидкости. Определить время, через которое из резервуара вытечет половина всей жидкости, если скорость истечения пропорциональна уровню жидкости в резервуаре.

5.76. Подогреватель, имея начальную температуру 100°C , охлаждается в среде с температурой 20°C . Скорость охлаждения пропорциональна разности температур подогревателя и окружающей среды. Через какое время подогреватель охладится до 30°C , если за 20 мин его температура снизилась до 60°C ?

5.77. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью 12 км/ч. Через 10 с после выключения мотора скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через одну минуту после остановки мотора.

5.78. Пуля, двигаясь со скоростью 400 м/с, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее. При этом сила сопротивления стены придает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности 7 м^{-1} . Найти скорость пули через 0.001 с после вхождения ее в стену.

5.79. Конденсатор колебательного контура, состоящего из индуктивности L , емкости C и сопротивления R , заряжен до напряжения U_0 . Как меняется напряжение U на конденсаторе в процессе его разрядки?

5.80. Материальная точка движется под действием постоянной силы, сообщающей точке ускорение a . Сопротивление окружающей среды пропорционально скорости движения точки. С какой скоростью будет двигаться точка через 20 мин, если в начальный момент она находилась в покое?

5.81-5.90. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$5.81. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$5.82. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$$

$$5.83. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$$

$$5.84. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y \end{cases}$$

$$5.85. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$5.86. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$5.87. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

$$5.88. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

$$5.89. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$$

$$5.90. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

5.91-5.100. а), б) Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

в) Определить, абсолютно или условно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$5.91. \text{ а) } a_n = \frac{1}{4n+1}. \quad \text{ б) } a_n = \frac{3n-2}{2^n}. \quad \text{ в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{n^2+2n+2}.$$

$$5.92. \text{ а) } a_n = \frac{2}{n^2}. \quad \text{ б) } a_n = \frac{n^2+2}{3^n}. \quad \text{ в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n^2+5)}{n^3+3n}.$$

$$5.93. \text{ а) } a_n = \frac{1}{n-1}. \quad \text{ б) } a_n = \frac{n+3}{4^n}. \quad \text{ в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(5n^2+4)}{3(n+2)^3}.$$

$$5.94. \text{ а) } a_n = \frac{n+1}{3n^2+2}. \quad \text{ б) } a_n = \frac{1}{2^n}. \quad \text{ в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(3n^4+n^2)}{n^5+n+1}.$$

$$5.95. \text{ а) } a_n = 1 + \frac{1}{n}. \quad \text{ б) } a_n = \frac{2n}{(n^3+1)7^n}. \quad \text{ в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(5n+6)}{(2n+1)^2}.$$

$$5.96. \text{ a) } a_n = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad \text{б) } a_n = \frac{n^5}{n^2 + 3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n. \quad \text{в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(9n^2 + 4)}{6n^3 + 5n - 2}.$$

$$5.97. \text{ a) } a_n = \frac{n+1}{n+3}. \quad \text{б) } a_n = \frac{n \cdot 2^n}{n^2 + 5}. \quad \text{в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(6n^3 - 5)}{2n^5 + 3n^3 + n}.$$

$$5.98. \text{ a) } a_n = \frac{n+1}{3n+5}. \quad \text{б) } a_n = \frac{n^2 3^n}{n+2}. \quad \text{в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(7n+2)}{4n^3 + 5n^2 + 3}.$$

$$5.99. \text{ a) } a_n = n. \quad \text{б) } a_n = \frac{n^2 + 2}{3n - 1} 4^n. \quad \text{в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n^2 + 3)}{4n^5 + 29}.$$

$$5.100. \text{ a) } a_n = \frac{1}{n^3 - 1}. \quad \text{б) } a_n = \frac{n^4 + 2}{n^3} 5^n. \quad \text{в) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(3n + 2)}{2n^5 + 9}.$$

5.101-5.110. Найти интервал сходимости степенного ряда и изучить поведение ряда на концах интервала сходимости.

$$5.101. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}. \quad 5.102. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}. \quad 5.103. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^n}.$$

$$5.104. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}. \quad 5.105. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}. \quad 5.106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(4n-1) \cdot 2^n}.$$

$$5.107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3}. \quad 5.108. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}. \quad 5.109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}.$$

$$5.110. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^n}.$$

5.111-5.120. Разложить по степеням x функцию $f(x)$. Найти интервал сходимости полученного ряда (использовать стандартные разложения функций в ряд).

$$5.111. f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad 5.112. f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$5.113. f(x) = \sin^2 x. \quad 5.114. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$5.115. f(x) = \frac{1}{x} \cdot (e^x - 1). \quad 5.116. f(x) = \sin \frac{x}{2}.$$

$$5.117. f(x) = \cos \frac{x}{2}. \quad 5.118. f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$5.119. f(x) = \frac{x}{1-x^3}. \quad 5.120. f(x) = \cos^2 x$$