II СЕМЕСТР

Введение в анализ
Дифференциальное исчисление функций одной переменной
(контрольное задание 4)

В задачах 111–120 задана функция $y = f(x)$. Требуется:

а) выяснить, имеет ли эта функция точки разрыва;

б) в каждой из подозрительных на разрыв точек провести исследование согласно определению непрерывности функции;

в) установив разрыв, указать его тип;

г) сделать схематический чертеж.

111. $y = \begin{cases} x+3, & (x \le 0); \\ 1, & (0 < x \le 2); \\ x^2 - 2, & (x > 2). \end{cases}$

112. $y = \begin{cases} -x, & (x < 0); \\ x^2 + 1, & (0 \le x < 2); \\ x+1, & (x \ge 2). \end{cases}$

113. $y = \begin{cases} x-1, & (x < 0); \\ \sin x, & (0 \le x < \pi); \\ 3, & (x \ge \pi). \end{cases}$

114. $y = \begin{cases} -x+1, & (x < -1); \\ x^2 + 1, & (-1 \le x \le 2); \\ 2x, & (x > 2). \end{cases}$

115. $y = \begin{cases} 1, & (x \le 0); \\ 2^x, & (0 < x \le 2); \\ x+3, & (x > 2). \end{cases}$

116. $y = \begin{cases} -x+2, & (x \le -2); \\ x^3, & (-2 < x \le 1); \\ 2, & (x > 1). \end{cases}$

117. $y=\begin{cases}3x+4, & (x\le -1);\\ x^2-2, & (-1<x<2);\\ x, & (x\ge 2).\end{cases}$

118. $y=\begin{cases}x, & (x\le 1);\\ (x-2)^2, & (1<x<3);\\ -x+6, & (x\ge 3).\end{cases}$

119. $y=\begin{cases}x-1, & (x<1);\\ x^2+2, & (1\le x\le 2);\\ -2x, & (x>2).\end{cases}$

120. $y=\begin{cases}x^3, & (x<-1);\\ x-1, & (-1\le x\le 3);\\ -x+5, & (x>3).\end{cases}$

В задачах 121–130 вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

121. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{x^3-5x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

122. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

126. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3+27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$;

127. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

128. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x^5}$; е) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

129. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

130. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\operatorname{tg}x}$.

В задачах 131–140 заданы функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1, x_2. Требуется:

а) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента;

б) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа и при $x\to\infty$;

в) сделать схематический чертеж.

131. $\begin{cases} f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1\,(x\neq 1),\ x_1=0,\ x_2=1;\\ f(1)=0.\end{cases}$

132. $\begin{cases} f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1\,(x\neq 2),\ x_1=2,\ x_2=3;\\ f(2)=0.\end{cases}$

133. $\begin{cases} f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1\,(x \neq 3), \; x_1 = 2, \; x_2 = 3; \\ f(3) = 1. \end{cases}$

134. $\begin{cases} f(x) = 2^{\frac{3}{2+x}} + 1\,(x \neq -2), \; x_1 = -2, \; x_2 = -1; \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

135. $\begin{cases} f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2\,(x \neq 2), \; x_1 = 2, \; x_2 = 3; \\ f(2) = -1. \end{cases}$

136. $\begin{cases} f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}} - 2\,(x \neq -1), \; x_1 = -1, \; x_2 = 0; \\ f(-1) = 0. \end{cases}$

137. $\begin{cases} f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}} + 1\,(x \neq -4), \; x_1 = -5, \; x_2 = -4; \\ f(-4) = 0. \end{cases}$

138. $\begin{cases} f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}} + 1\,(x \neq 1), \; x_1 = 1, \; x_2 = 2; \\ f(1) = 1. \end{cases}$

139. $\begin{cases} f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}\,(x \neq 4), \; x_1 = 3, \; x_2 = 4; \\ f(4) = 0. \end{cases}$

140. $\begin{cases} f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} - 1\,(x \neq 3), \; x_1 = 3, \; x_2 = 4; \\ f(3) = 0. \end{cases}$

В задачах 141–150 найти производную для каждой из заданных функций.

141. а) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$; б) $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$;

в) $y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$; г) $y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$;

д) $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$; е) $y=\dfrac{(x-3)^4\sqrt{x+7}}{(x+2)^5}$.

142. а) $y=\sqrt[3]{(x-4)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$; б) $y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$;

в) $y=\dfrac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}$; г) $y=\dfrac{\ln(5x-3)}{4\operatorname{tg} 3x^4}$;

д) $y=(\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$; е) $y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

143. а) $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$; б) $y=2^{-x^3}\operatorname{arctg} 7x^4$;

в) $y=\dfrac{e^{-\sqrt{4x}}}{\sqrt[4]{x^2+5x-1}}$; г) $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos^4 2x}$;

д) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$; е) $y=\dfrac{(9x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$.

144. а) $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$; б) $y=(x+6)^7\operatorname{arctg} 3x^{11}$;

в) $y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{3x^2-4x+2}$; г) $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$;

д) $y=(\operatorname{tg}(8x+3))^{\operatorname{tg} 5x}$; е) $y=\dfrac{(x+3)^4\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.

145. а) $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$; б) $y=3^{\cos x}\ln(x^2-3x+7)$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$; г) $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\operatorname{tg}(3x-4)}$;

д) $y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x}$; е) $y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

146. а) $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^2}$; б) $y=\log_2(x-7)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

в) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$; г) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)}$;

д) $y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; е) $y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$;

147. а) $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$; б) $y=\arccos^3 5x\cdot\operatorname{tg}x^4$;

в) $y=\dfrac{\log_3(4x+5)}{2\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$; г) $y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$;

д) $y=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg}3x}$; е) $y=\dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$.

148. а) $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$; б) $y=(x-5)^7\operatorname{arctg}7x^3$;

в) $y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$; г) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$;

д) $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$; е) $y=\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.

149. а) $y=-\sqrt{5x^2-4x+3}+\dfrac{3}{(4-x)^7}$; б) $y=\arccos x^2\cdot\operatorname{ctg}7x^3$;

в) $y=\dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$; г) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+4x-5}}{e^{x^2}}$;

д) $y=(\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg}7x}$; е) $y=\dfrac{(x-3)^2(x+1)^8}{\sqrt{(x+2)^5}}$.

150. а) $y=\sqrt{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$; б) $y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$;

в) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$; г) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}5x}}{(x+4)^3}$;

д) $y=(\operatorname{arcctg}(7x+5))^{-x^3}$; е) $y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

В задачах 151–160 найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) для функции $F(x,y)=0$, заданной неявно;

б) для функции $x=\varphi(t)$, $y=\varphi(t)$, заданной параметрически.

151. а) $y=x+\operatorname{arctg}y$; б) $\begin{cases}x=(2t+3)\cos t;\\ y=3t^3.\end{cases}$

152. а) $y^2=25x-4$; б) $\begin{cases}x=6\cos^3 t;\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$

153. а) $y^2-x=\cos y$; б) $\begin{cases}x=e^{-2t};\\ y=e^{-4t}.\end{cases}$

154. а) $\operatorname{tg}y=3x+5y$; б) $\begin{cases}x=2\cos^2 t;\\ y=3\sin^2 t.\end{cases}$

155. а) $y = e^y + 4x$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+2}; \\ y = \dfrac{1}{(t+2)^2}. \end{cases}$

156. а) $x^2 + y^2 = \sin y$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

157. а) $4\sin^2(x+y) = x$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

158. а) $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}; \\ y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$

159. а) $xy - 6 = \cos y$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}; \\ y = t\ln t. \end{cases}$

160. а) $y^2 = x + \ln\dfrac{y}{x}$; б) $\begin{cases} x = e^t\cos t; \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

В задачах 161–170 найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(t)$ на отрезке $[a,b]$.

161. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $[0;3]$. 162. $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $[0;5]$.

163. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, $\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$. 164. $y = (x+2)\,e^{1-x}$, $[-2; 2]$.

165. $y = \sqrt{x - x^3}$, $[0; 1]$. 166. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$, $[1; 2]$.

167. $y=(x-2)\,e^{x},\quad [-2;1].$ 168. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^{2}},\quad \left[-\frac{4}{5};3\right].$

169. $y=e^{4x-x^{2}},\quad [1;3].$ 170. $y=\dfrac{x^{5}-8}{x^{4}},\quad [-3;-1].$

В задачах 171–180 найти пределы заданных функций, пользуясь правилом Лопиталя.

171. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

172. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{2}}-1}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

173. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^{2}}$.

174. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^{2}}-1}{1-\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^{2}}$.

175. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-a^{\sin x}}{x^{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^{x})^{1/x}$.

176. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^{x})}{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{1/x}$.

177. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^{2})^{1/x}$.

178. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^{2} x}$.

179. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x+3^{x})^{5/x^{2}}$.

180. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^{2} 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.

Приложения дифференциального исчисления функций одной переменной

(контрольное задание 5)

В задачах 181–190 написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке x_0.

181. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

182. $y = \mathrm{tg}\, 2x$, $x_0 = 0$.

183. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

184. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

185. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

186. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

187. $y = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$.

188. $y = \mathrm{arctg}\, 2x$, $x_0 = 0$.

189. $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = 1$.

190. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x_0 = -3$.

Задачи 191–200 решить, применив дифференциальный метод поиска экстремумов.

191. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, основание которого лежит на основании треугольника, а две вершины – на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

192. Периметр осевого сечения цилиндра равен $6a$. Найти наибольший объем такого цилиндра.

193. Цилиндр вписан в конус с высотой h и радиусом основания r. Найти наибольший объем вписанного цилиндра.

194. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара с радиусом r.

195. Найти наибольший объем конуса при заданной длине m его образующей.

196. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг с радиусом r.

197. На параболе $y = x^2$ найти точку N, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

198. В полукруг с радиусом r вписан прямоугольник наибольшей площади. Требуется определить его основание и высоту.

199. Отрезок длины a разделить на две части таким образом, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих частях, была наименьшей.

200. Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. На оси $0x$ найти точку, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая.

В задачах 201–210 методами дифференциального исчисления исследовать заданную функцию. На основании результатов исследования построить ее график.

201. $y = e^{\frac{1}{5+x}}$.

202. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

203. $y = x^2 - \ln x$.

204. $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$.

205. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

206. $y = \dfrac{x^2+6}{x^2+1}$.

207. $y = \ln(x^2+1)$.

208. $y = (x-1)\, e^{3x+1}$.

209. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

210. $y = \dfrac{x^3}{x^4-1}$.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

(контрольное задание 6)

В задачах 211–220 найти область определения функций и сделать рисунки. Найти полные дифференциалы первого порядка для указанных функций.

211. а) $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$; б) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

212. а) $z=\dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2-4}$; б) $z=\arccos(x+2y)$.

213. а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-6}}$; б) $z=\arcsin(2x-y)$.

214. а) $z=\ln(y^2-x)$; б) $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

215. а) $z=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; б) $z=\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

216. а) $z=\sqrt{x+y-2}$; б) $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{x}{3}$.

217. а) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$; б) $z=\ln\dfrac{x}{y-1}$.

218. а) $z=x+\sqrt{y-1}$; б) $z=\sqrt{\dfrac{y-x}{y-x^2}}$.

219. а) $z=\ln(1-x-y)$; б) $z=e^{x/y}\sqrt{x-y}$.

220. а) $z=e^{\sqrt{x-y^2}}$; б) $z=\arccos\dfrac{x}{y}$.

В задачах 221–230:

а) дана функция $z=f(x,y)$; найти частные производные второго порядка $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$, $\partial^2 z/\partial x\partial y$;

б) дана неявная функция $F(x,y,z)=C$; найти частные производные первого порядка $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

221. а) $z=\ln(y^2-e^{-x})$; б) $e^z+x+2y+z=0$.

222. а) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

223. а) $z = \ln(3x^2 - y^4)$; б) $z^3 + 3xyz + 3y = 7$.

224. а) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$; б) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$.

225. а) $z = \sin\sqrt{x - y^3}$; б) $e^{z-1} - \cos x \cdot \cos y = 1$.

226. а) $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$; б) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$.

227. а) $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$; б) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$.

228. а) $z = e^{-x^2 + y^2}$; б) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \frac{\pi}{2}$.

229. а) $z = \ln \operatorname{tg}(2x + 3y)$; б) $3x^2 + y^2 + 2xy - 2x^3 z + 4y^3 z = 4$

230. а) $z = \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; б) $xyz - x - y - z = 2$.

В задачах 231–240 найти экстремумы функции $z = f(x, y)$.

231. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14$. 232. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

233. $z = 4(x - y) - x^2 y^2$. 234. $z = 1 + 15x - 2x^2 - 2y^2 - xy$.

235. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. 236. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

237. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$. 238. $z = x^2 + y^2 + xy + x + y$.

239. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$. 240. $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

В задачах 241–250 составить уравнения касательной плоскости и нормали в точке A к поверхности, заданной уравнением:

а) $z=f(x,y)$;
б) $F(x,y,z)=C$.

241. а) $z=\ln(x^2+y^2)$; б) $x^2-y^2-z^2=1$; $A(1;0;0)$.

242. а) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; б) $2x\sin^2(x-y+z)=1$; $A(1;1;\pi/4)$.

243. а) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; б) $9x^2yz=1$; $A(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$.

244. а) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; б) $x^2+y^2-z^2=1$; $A(1;-1;0)$.

245. а) $z=(x+y)\,e^{-x^2-y^2}$; б) $x\cos(y+z)+z\cos(x+y)=0$; $A(0;0;0)$.

246. а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $x^3+y^3+z^3-4xyz=-24$; $A(3;4;5)$.

247. а) $z=x^2-y^2-2xy-x-3y$; б) $5xyz^3+11z=6$; $A(-1;1;1)$.

248. а) $z=-x^2+y^2+2xy-3y$; б) $2x^3-y^3+z^3+x^2yz=3$; $A(1;-1;1)$.

249. а) $z=x^2+y^2-2xy+2x-2y$; б) $e^z-\sin(\pi xyz/3)=1$; $A(-1;-1;0)$

250. а) $z=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$; б) $\dfrac{x^4}{a^4}+\dfrac{x^3y}{a^3b}+\dfrac{y^4}{b^4}+xyz=\dfrac{3}{4}$; $A(a/\sqrt{2}; b/\sqrt{2}; 0)$.

В задачах 251–260 найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке A по направлению, составляющему угол α с градиентом указанной функции в этой точке.

251. $z = x^2 - 3xy + y^2 + e^{3x-4y} + 10$; $A(2; 3/2)$, $\alpha = \pi/4$.

252. $z = 2x^2 - 4xy + 4y^3 + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $A(1/2; -1/2)$ $\alpha = 3\pi/4$.

253. $z = e^{x/y} + x^2 - \frac{y}{2x - 3y + 2} - 4xy^2 - 2y - 5$; $A(1; 1)$, $\alpha = -\pi/4$.

254. $z = 2\sin(x^2 - y^2 - 3) + 2xy - 7x - 30y$; $A(2; 1)$, $\alpha = \pi/6$.

255. $z = 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - x + 3y\right) + xy^2 - x - 6y$; $A(3; 1)$, $\alpha = \pi/3$.

256. $z = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x + 3y\right) + x^2 y + 19x - 6y$; $A(3; 2)$, $\alpha = 3\pi/4$.

257. $z = x^3 - xy + y^2 + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - 2y - 3x$; $A(1; 2)$, $\alpha = \pi/3$.

258. $z = 4x^2 + y^2 - 3xy + e^{-4x-3y} + 10$; $A(3/2; 2)$, $\alpha = 3\pi/4$.

259. $z = 4x^3 - 4xy + 2y^2 + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3$; $A(-1/2; 1/2)$, $\alpha = \pi/4$;

260. $z = 2\sin(y^2 - x^2 - 3) - 2xy + 7y - 6x$; $A(1; 2)$, $\alpha = \pi/6$.