

Расчётно-графическая работа № 8 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Выбор варианта расчётной схемы и его выполнение осуществляются согласно данным, приведённым в таблице.

Расчётные данные	Цифра шрифта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l_1, \text{ м}$	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4
$l_2, \text{ м}$	4	5	6	4	5	6	2	3	4	5
$l_3, \text{ м}$	5	6	2	3	4	5	6	3	5	6
$A, \text{ см}^2$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Технические условия. Стержень, жестко закреплённый верхним концом, состоит из трёх соединённых между собой частей, верхняя и нижняя части которого стальные, средняя – медная.

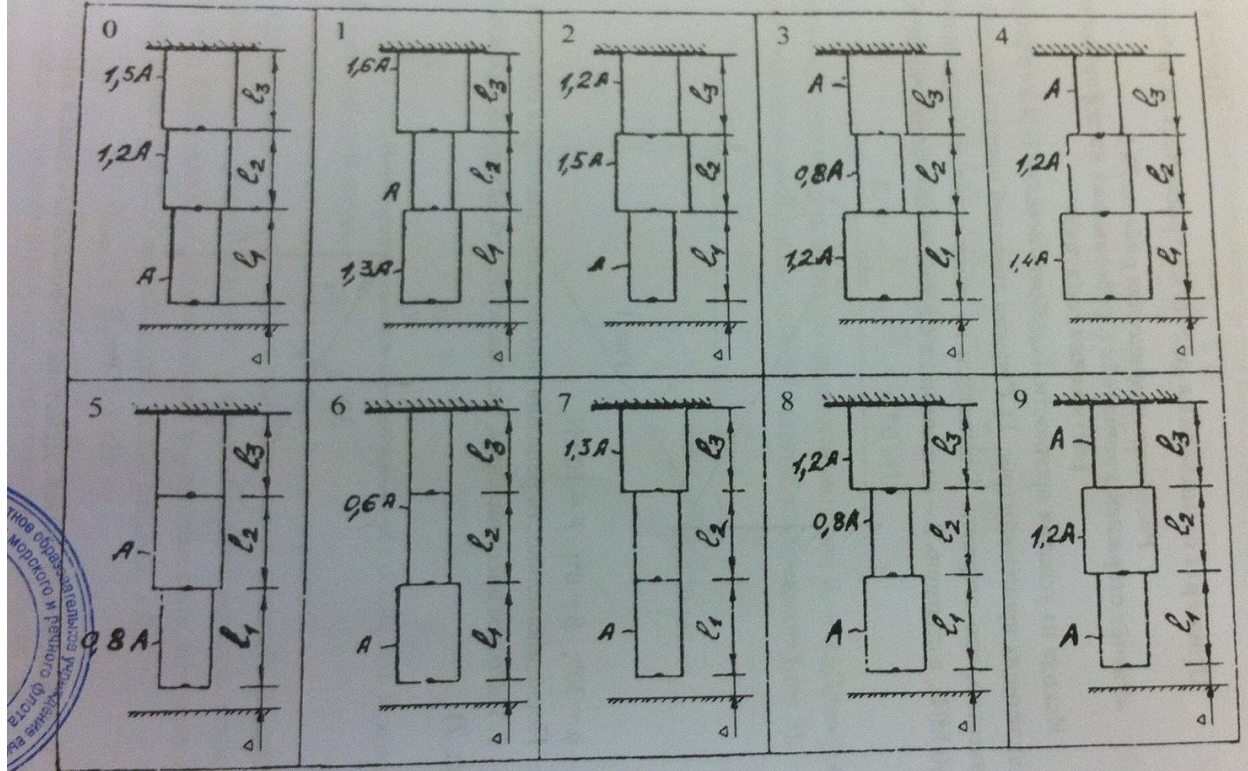
Модуль упругости первого рода: стали – $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$ МПа, меди – $E_{\text{мед}} = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Коэффициент теплового расширения

$$\alpha_{\text{ст}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град.}; \alpha_{\text{мед}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град.}$$

Требуется найти напряжения во всех трёх частях стержня при повышении температуры на $50 \text{ }^\circ\text{C}$, если нижняя часть стержня имеет зазор до жёсткой опоры, равный $0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Статически неопределимые системы
(к расчётно-графической работе № 8)



Расчётно-графическая работа № 8
«Статически неопределимые системы»

Стержень, жестко закрепленный верхним концом, состоит из трёх соединенных между собой частей: верхняя и нижняя части стальные, средняя – медная (рис. 13).

Модуль упругости первого рода:

$$\text{стали} - E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \text{ меди} - E_{\text{мед}} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты теплового расширения, соответственно, равны
 $\alpha_{ст} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град.}; \alpha_{мед} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град.}$

Найти напряжения во всех трёх частях стержня при повышении температуры на 50°C , если нижняя часть стержня имеет зазор до жёсткой опоры Δl , равный $0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Длины участков стержня и соответствующие площади поперечных сечений необходимо принять из таблицы согласно номеру шифра:

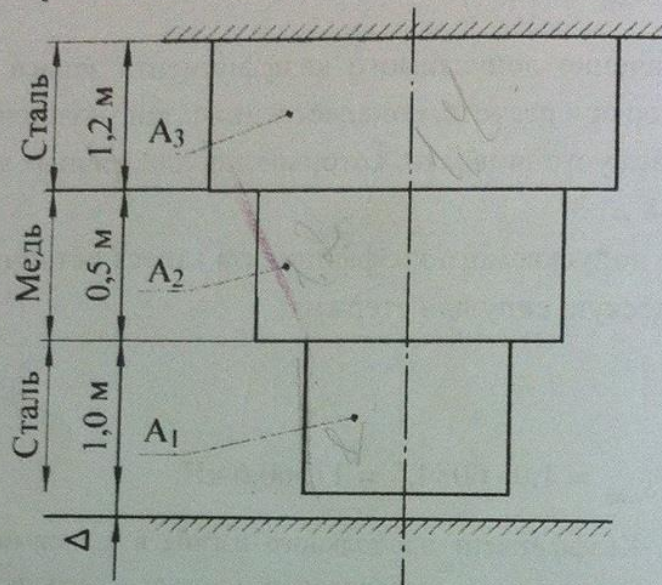


Рис. 13

Численные значения:

$A_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; A_2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; A_3 = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$ Зазор $\Delta l = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

1. При расчете статически неопределимых стержневых систем температурные напряжения определяются с помощью формулы полного удлинения стержня:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + \alpha \Delta t l.$$

В статически неопределимых стержневых системах изменение температуры сопровождается появлением внутренних усилий, т.е. появлением напряжений $\sigma_t = E\alpha\Delta t$, при этом $\alpha = \text{const}$.

$$\Delta l_N = \Delta l_t - \Delta l,$$

где Δl_N – изменение длины стержневой системы, обусловленное возникновением внутренней силы N , которая будет одинакова по всей длине стержня:

$$\Delta l_N = \sum_{i=1}^n \frac{Nl_i}{E_i A_i} = \frac{Nl_1}{E_{ст} A_1} + \frac{Nl_2}{E_{мед} A_2} + \frac{Nl_3}{E_{ст} A_3};$$

Δl_T – изменение длины стержневой системы, обусловленное изменением температуры:

$$\Delta l_T = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta t l_i = \alpha_{ст} \Delta t l_1 + \alpha_{мед} \Delta t l_2 + \alpha_{ст} \Delta t l_3;$$

Δl – конструктивный зазор, равный $0,25 \cdot 10^{-3}$ м.

Таким образом, из уравнения перемещения (из уравнения полного удлинения стержня) найдем продольную силу, возникающую в поперечных сечениях ступенчатого стержня:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Delta l (\alpha_{мед} l_2 + \alpha_{ст} (l_1 + l_3)) - \Delta l}{\left(\frac{l_1}{E_{ст} A_1} + \frac{l_2}{E_{мед} A_2} + \frac{l_3}{E_{ст} A_3} \right)} = \\ &= \frac{50 (16 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2,2) - 0,25 \cdot 10^{-3}}{\left(\frac{1,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,5}{1 \cdot 10^{11} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}} \right)} = \\ &= \frac{1,72 \cdot 10^{-3} - 0,25 \cdot 10^{-3}}{1,35 \cdot 10^{-6}} = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Н} = 109 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рассчитаем максимальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях ступенчатого стержня:

$$\sigma_{1_{max}} = \frac{N}{A_1} = \frac{109 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{2_{max}} = \frac{N}{A_2} = \frac{109 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 91 \cdot 10^6 \text{ Па} = 91 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3_{max}} = \frac{N}{A_3} = \frac{109 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 10^{-3}} = 78 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78 \text{ МПа}.$$

Определим температуру, при которой зазор окажется закрытым и стержневая система станет статически неопределимой:

$$\Delta l_T = \alpha_{ст} \Delta t' l_1 + \alpha_{мед} \Delta t' l_2 + \alpha_{ст} \Delta t' l_3;$$

$$0,25 \cdot 10^{-3} = \Delta t' (12 \cdot 10^{-6} \cdot 2,2 + 16 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5);$$

$$0,25 \cdot 10^{-3} = \Delta t' \cdot 34,4 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{откуда } \Delta l' = \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{34,4 \cdot 10^{-6}} \approx 0,00727 \cdot 10^3 \approx 7,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Таким образом, при изменении температуры системы на $7,3 \text{ } ^\circ\text{C}$ зазор закроется, и система станет статически неопределимой.

2. Если бы в стержневой системе зазор изначально отсутствовал, то она была бы изначально статически неопределима, и для нее нужно было бы использовать уравнение $\Delta l_N = \Delta l_t$, решение которого дает значение внутренней продольной силы N' при отсутствии конструктивного зазора:

$$\begin{aligned} N' &= \frac{\Delta t (\alpha_{\text{мед}} l_2 + \alpha_{\text{ст}} (l_1 + l_3))}{\left(\frac{l_1}{E_{\text{ст}} A_1} + \frac{l_2}{E_{\text{мед}} A_2} + \frac{l_3}{E_{\text{ст}} A_3} \right)} = \\ &= \frac{50 (16 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2,2)}{\left(\frac{1,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,5}{1 \cdot 10^{11} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}} \right)} = \\ &= \frac{1,72 \cdot 10^{-3}}{1,35 \cdot 10^{-8}} = 1,274 \cdot 10^5 \text{ Н} = 127,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

При этом максимальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях ступенчатого стержня, соответственно, равны:

$$\sigma'_{1\text{max}} = \frac{N'}{A_1} = \frac{127,4 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 127,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 127,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma'_{2\text{max}} = \frac{N'}{A_2} = \frac{127,4 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 106,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 106,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma'_{3\text{max}} = \frac{N'}{A_3} = \frac{127,4 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 10^{-3}} = 91,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 91 \text{ МПа}.$$

Вывод. В результате выполненных расчетов доказано что конструктивный зазор, используемый в стержневой системе, равный $0,25 \cdot 10^{-3}$ м, позволил снизить максимальные напряжения стержня со значения, равного 127,4 МПа, до значения, равного 109 МПа, т.е. на 14,4 %.