

ГЛАВА 2. НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Условные обозначения, применяемые в курсе «Начертательная геометрия».

	горизонтальная плоскость проекций
π_1	
π_2	фронтальная плоскость проекций
π_3	профильная плоскость проекций
X, Y, Z	оси проекций
O	точка пересечения осей проекций (начало координат)
A, B, C, D,	точки пространства
$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$	горизонтальные проекции точек
$a_2, b_2, c_2, d_2, \dots$	фронтальные проекции точек
$a_3, b_3, c_3, d_3, \dots$	профильные проекции точек
ЕСКД	Единая система конструкторской документации
$h'_{0\alpha}, h'_{0\beta}, h'_{0\gamma}, \dots$	горизонтальный след плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
$f''_{0\alpha}, f''_{0\beta}, f''_{0\gamma}, \dots$	фронтальный след плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
$p'''_{0\alpha}, p'''_{0\beta}, p'''_{0\gamma}, \dots$	профильный след плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	углы наклона к плоскостям проекции

2.1. Метод начертательной геометрии

Начертательная геометрия – это раздел геометрии, в котором трехмерные пространственные объекты изучаются по их плоским изображениям – чертежам. Чертежом называют изображение предмета, построенное по особым правилам при помощи чертежных инструментов или средствами компьютерной графики, в точной зависимости от размеров и положения в пространстве соответствующих линий предмета. «Чертеж – это язык техники», – говорил один из создателей начертательной геометрии Гаспар Монж. «Начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками как элементами всякого изображения», – писал автор классического русского учебника начертательной геометрии В.И. Курдюмов.

2.1. 1. МЕТОДЫ ПРОЕКЦИРОВАНИЯ

В начертательной геометрии чертеж – это основной инструмент решения различных пространственных задач. К выполняемому чертежу предъявляется ряд особых требований, четыре из которых являются наиболее существенными. Чертеж должен быть: 1) наглядным; 2) обратимым; 3) достаточно простым; 4) точным.

Под свойством обратимости чертежа понимается возможность точного воспроизведения формы и размеров предмета по его изображению. Для всех видов технических чертежей это требование является особенно важным, так как по чертежу в машиностроении изготавливается деталь.

Основным методом получения изображений в начертательной геометрии является *проецирование*. Далее рассмотрим основные виды проецирования.

Центральное проецирование (рисунок 10).

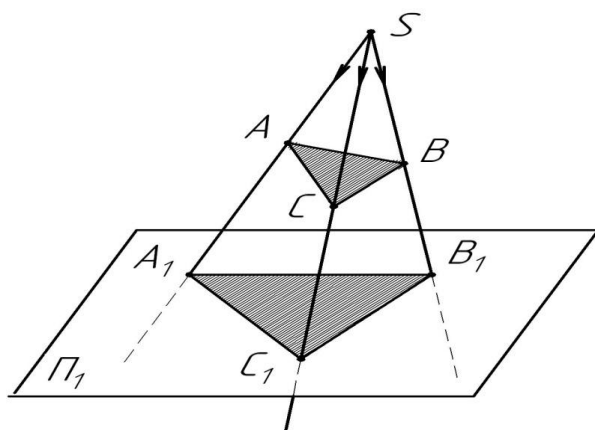


Рисунок 10 - **Центральное проецирование.**

Дано:

- плоскость Π плоскость проекций;
- точка S – центр проециций, причем $S \notin \pi_1$;
- точка A , находящаяся в пространстве, $A \notin \pi_1$.

Чтобы спроецировать некоторую точку A пространства на плоскость π_1 , необходимо через центр проецирования S провести *проецирующую прямую* SA до ее пересечения в точке A_1 с плоскостью π_1 .

При этом точка A_1 называется *проекцией* точки A на плоскости π_1 . Проекцией фигуры называется совокупность проекций всех ее точек на выбранную поверхность

проецирования (например, на рисунке 10 проекцией треугольника ABC на плоскости π_1 является треугольник $A_1B_1C_1$). Описанный метод проецирования путем проведения проецирующих прямых через точки заданной фигуры и центр проецирования называется *центральной*.

При заданном виде проецирования (плоскость проекций и центр проецирования) одна точка пространства имеет только одну центральную проекцию. Обратное утверждение не имеет смысла, т.е. одна центральная проекция не позволяет однозначно определить положение точки в пространстве, поэтому центральные проекции необратимы. Изображения предметов, построенные в центральных проекциях, очень близки к действительному зрительному восприятию (так устроен человеческий глаз), но для технического черчения неудобны, так как нарушается параллельность и возникает неудобство измерений расстояний и углов, т.е. не соблюдается метрика. Центральные проекции широко применяются в архитектуре (изображения предметов в перспективе – рис.11), аэрофотогеодезии [***].

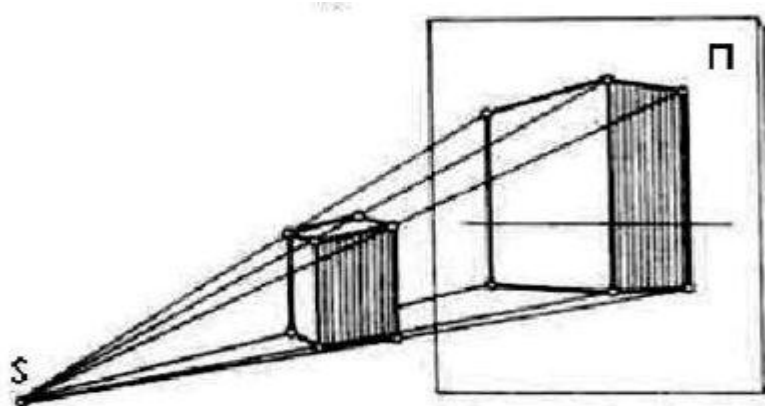


Рисунок 11 – Центральное проецирование (перспектива).

Параллельное (косоугольное) проецирование.

Параллельное проецирование является частным случаем центрального, у которого центр проекций S находится в несобственной точке S_∞ . Несобственными называются элементы, бесконечно удаленные в пространстве. При параллельном проецировании проецирующие лучи параллельны между собой и проведены в заданном направлении относительно плоскости проекций.

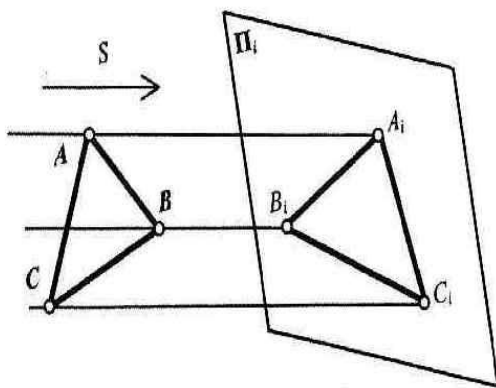


Рисунок 12 - Параллельное проецирование.

Основные свойства параллельного проецирования:

1. Проекция точки – точка.
2. Проекция прямой на плоскость есть прямая. В частном случае, если направление прямой совпадает с направлением проецирования, проекция прямой – точка.
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой.
4. Проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а длины их находятся в том же соотношении, что и длины самих отрезков.
5. Отношения отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых равны отношению проекций этих отрезков.
6. Любая фигура, расположенная в плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

Для того, чтобы получить параллельную проекцию точки на плоскости проекций, через нее проводят проецирующий луч, параллельный заданному направлению S_∞ и находят точку его пересечения с плоскостью проекций (рис. 12,13), $[AA_1] \parallel S_\infty$, $[AA_1] \cap \Pi_1 = A_1$. Стоит обратить внимание, что проецирующие лучи при параллельном проецировании располагаются под острым углом к плоскости проекции.

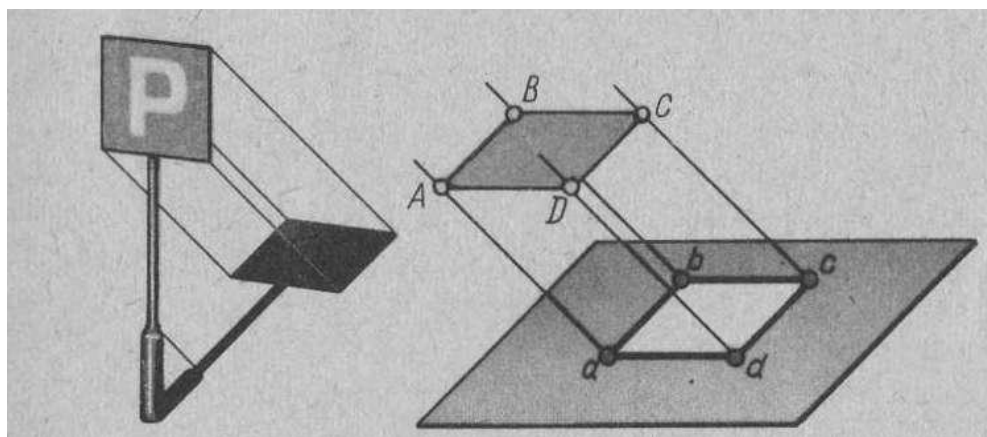


Рисунок 13 – Параллельное проецирование

Параллельные проекции так же не обеспечивают обратимости чертежа. Так как при заданном аппарате проецирования каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций, а одна проекция точки не определяет положения этой точки в пространстве.

Параллельное проецирование часто применяют для построения аксонометрических проекций. Аксонометрические изображения получают параллельным проецированием предмета вместе с осями прямоугольных координат, к которым он

отнесен (рис.12). Они являются достаточно наглядным изображением предмета с наименьшим искажением размеров по сравнению с центральными.

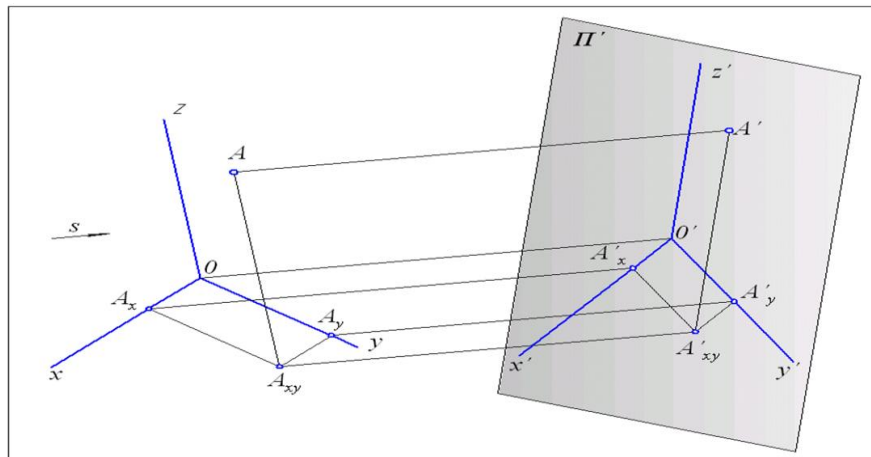


Рисунок 14 - Параллельного проецирования для аксонометрического изображения

Прямоугольное (ортогональное) проецирование

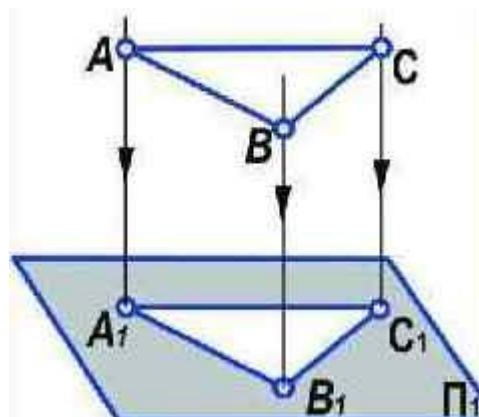


Рисунок 12 - Прямоугольное (ортогональное) проецирование

Если направление параллельного проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то такое проецирование называется *прямоугольным* или *ортогональным* (рисунок 12). Во всех остальных случаях параллельное проецирование называется *косоугольным*.

Изображения, полученные при помощи центрального проецирования, отличаются хорошей наглядностью, что объясняется устройством зрительного аппарата человеческого глаза. Однако этот метод имеет существенные недостатки. Во-первых, сложно построить изображение

Несмотря на то, что параллельное проецирование, по сравнению с центральным, имеет меньшую наглядность, параллельные проекции, особенно ортогональные, обладают лучшей измеримостью и простотой построения.

Задачи, решаемые методами начертательной геометрии, принято делить на метрические и позиционные.

Метрические задачи имеют целью определение размеров различных предметов по их изображению. К таким задачам относится определение натуральной величины геометрических фигур, расстояний и углов между ними;

Позиционные задачи позволяют определить взаимное расположение различных объектов: точек, прямых линий, плоскостей, пространственных фигур.

2.1.2. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ЧЕРТЕЖ. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

Любой предмет пространства можно рассматривать как определенную совокупность отдельных точек этого пространства, поэтому для изображения различных предметов необходимо научиться строить изображения отдельной точки пространства.

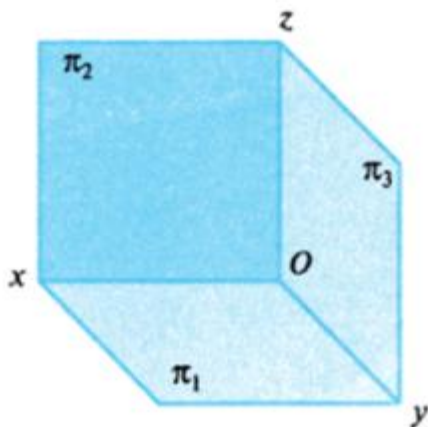


Рисунок 13

Три взаимно-перпендикулярные плоскости в пространстве (рисунке 13):

π_1 - горизонтальная плоскость проекций;

π_2 - фронтальная плоскость проекций;

π_3 - профильная плоскость проекций.

Плоскости проекций пересекаются по прямым, которые называются *осями проекций* и обозначаются x, y и z ;

Точка O – точка пересечения всех трех осей проекций – называется *началом координат*.

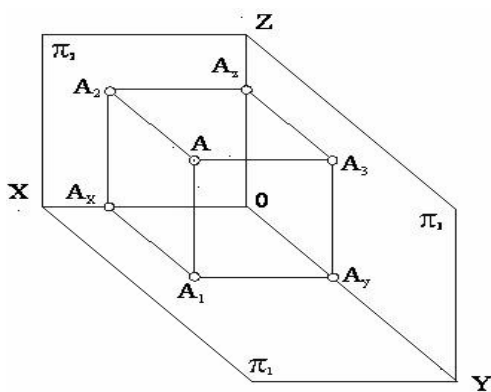


Рисунок 14

Чтобы получить проекцию точки A на горизонтальной плоскости проекций, необходимо провести через данную точку проецирующую прямую, перпендикулярную плоскости π_1 , и найти точку пересечения A_1 этой прямой с плоскостью π_1 . Точка A_1 называется *горизонтальной проекцией* точки A (рисунке 14).

Путем ортогонального проецирования точки A на фронтальную и профильную плоскости проекций образуются ее фронтальная и профильная проекции (соответственно точки A_2 и A_3).

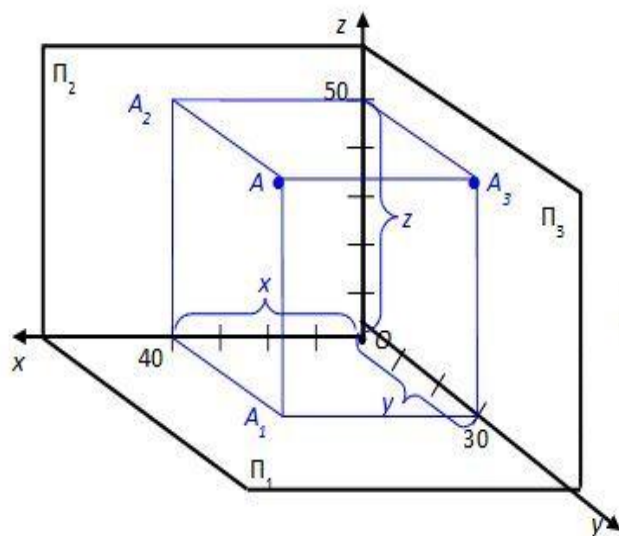


Рисунок - 15

Длины отрезков, измеряемые некоторой установленной единицей длины и равные расстояниям от точки A до горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостей проекций, называются *прямоугольными (декартовыми) координатами*:

по оси x – *абсцисса*, равная длине отрезка x_A ;

по оси y – *ордината*, равная длине отрезка y_A ;

по оси z – *апplikата*, равная длине отрезка z_A

Три координаты точки определяют ее положение в пространстве.

Взаимно перпендикулярные плоскости, изображенные на рисунке 15, дают нам пространственный чертеж.

В тоже время для более удобного построения целесообразно использовать плоский чертеж. Для этого плоскости проекций π_1 , π_2 и π_3 условно совмещают с плоскостью чертежа. Это совмещение выполняется следующим образом.

Фронтальная плоскость проекций π_2 принимается за плоскость чертежа, горизонтальная плоскость проекций π_1 совмещается с плоскостью чертежа вращением вокруг оси x , а профильная плоскость проекций π_3 – вращением вокруг оси z . Направление вращения на рисунке 16 показано стрелками.

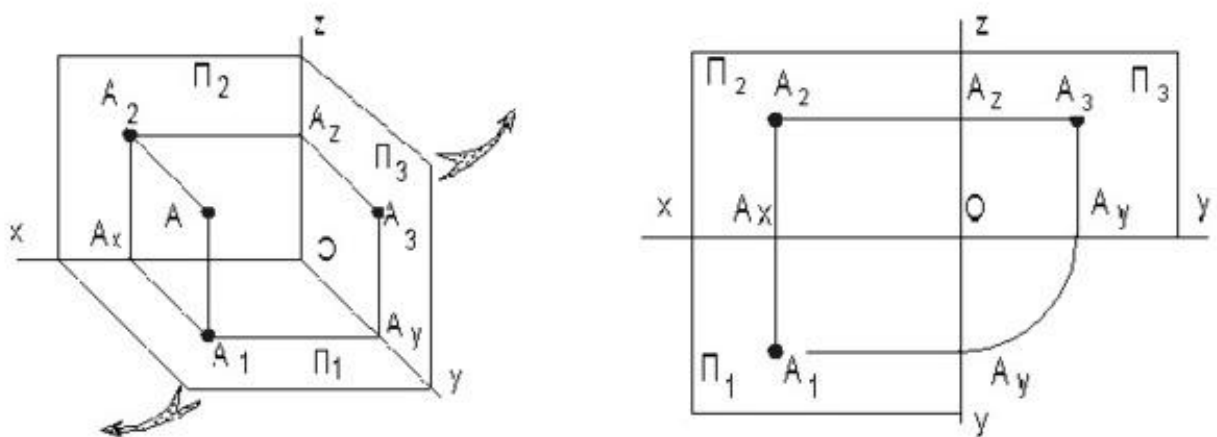


Рисунок - 16

В результате образуется *ортогональный чертеж*, или *эпюр* (от франц. *epure* – чертеж, проект). На эпюре изображают только проекции геометрических объектов, а не сами объекты.

По двум проекциям заданной точки можно построить третью, и притом только одну.

Любые две проекции точки, изображенные на эпюре, связаны между собой *линией проекционной связи*, перпендикулярной оси проекций (на чертеже ее обозначают штриховой линией):

- горизонтальная и фронтальная проекции (точки A_1 и A_2) расположены на линии проекционной связи, перпендикулярной оси x ;
- фронтальная и профильная проекции (точки A_2 и A_3) – на линии проекционной связи, перпендикулярной оси z ;
- горизонтальная и профильная проекции (точки A_1 и A_3) – на линии проекционной связи, перпендикулярной оси y .

В зависимости от расположения точки относительно плоскостей проекций различают:

- 1) *точки общего положения*, не принадлежащие плоскостям проекций (к ним относится, например, точка A с координатами $(10,20,50)$;
- 2) *точки частного положения*, лежащие в плоскостях проекций π_1, π_2, π_3 , на осях проекций x, y, z или в начале координат.

У точки общего положения все три координаты отличны от нуля.

Если точка лежит в плоскости проекций, то ее координата по оси, перпендикулярной этой плоскости проекций, равна нулю.

Например:

A с координатами $(0,20,50)$. В данном случае точка A принадлежит плоскости π_1 ;

$A(10,0,50)$. В данном случае точка A принадлежит плоскости π_2 ;

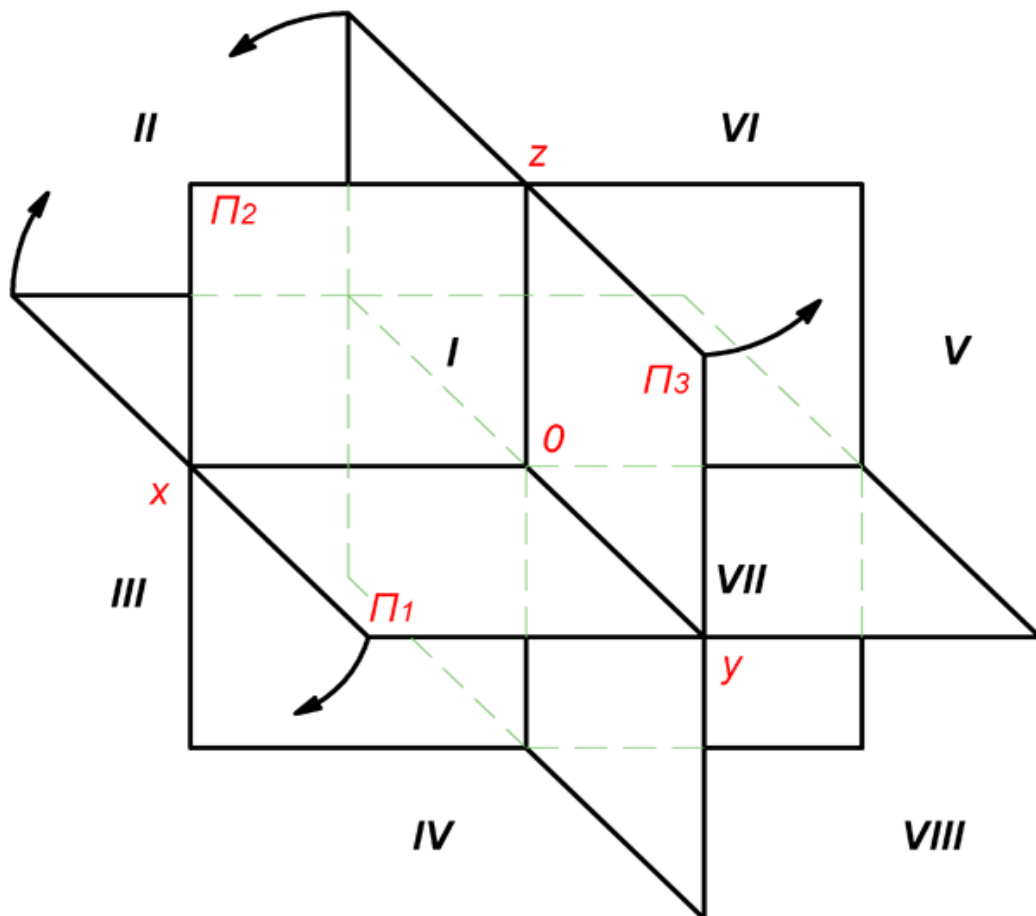
$A(10,20,0)$. В данном случае точка A принадлежит плоскости π_3 ;

3. Если точка лежит на оси проекций, то две другие ее координаты равны нулю.
4. Если все три координаты точки равны нулю, то точка лежит в начале координат (рисунок 34)

2.1.3. Октанты

Плоскости π_1 , π_2 , π_3 , пересекаясь между собой, делят пространство на восемь одинаковых частей, называемых октантами, как это показано на рисунке 17.

В зависимости от положения точки относительно плоскостей проекций, ее координаты могут иметь положительные и отрицательные знаки. Например, в первом октанте все координаты имеют положительные значения, а в седьмом – отрицательные знаки.



Коорд и- наты	Октант							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	-	-	+	+	-	-	+
z	+	+	-	-	+	+	-	-

Рисунок 17

При совмещении плоскости π_1 с плоскостью чертежа положительное направление оси y совмещается с отрицательным направлением оси z , а отрицательное направление – с положительным направлением оси z . При совмещении плоскости π_3 с плоскостью чертежа положительное направление оси y совмещается с отрицательным направлением оси x , а отрицательное направление – с положительным направлением оси x .

Пример выполнения задачи 1.1. по теме «Проекция точки»

Задача 1.1. По заданным координатам точек $A(20,30,30)$ и $B(-20,-20,30)$ построить их три проекции. Определить их положение в пространстве.

1 часть . Построение трех проекций точки A на эюре.

Решение:

Вычертить координационные оси. Указать название осей (рисунок 18);

1. Указать координаты точки на осях;

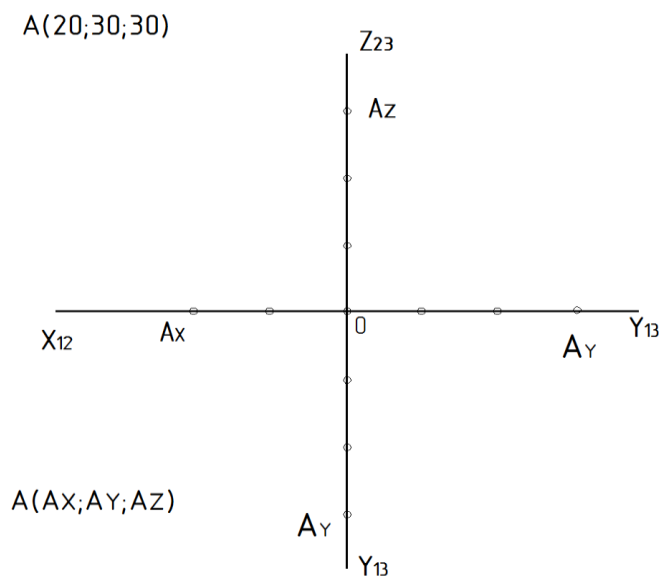


Рисунок 18 - Вычерчивание координационных осей

2. Через указанные координаты точки провести перпендикулярно осям линии проекционной связи (рисунок 19) ;

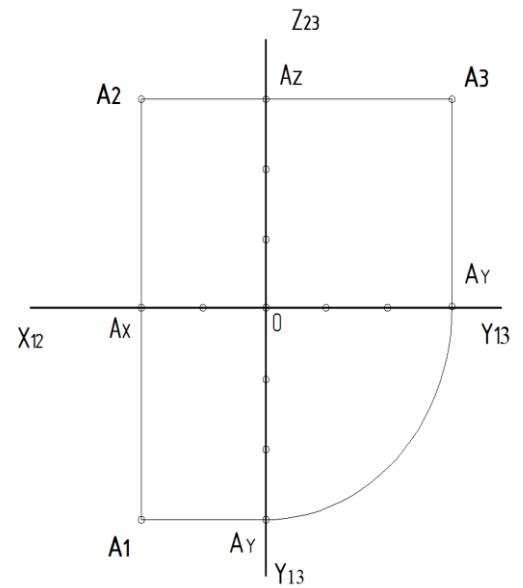
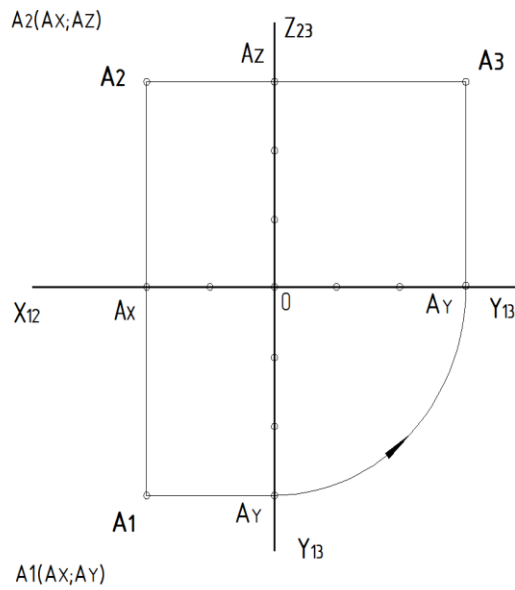


Рисунок 19 – Проекционные связи координат точки А с указанием ее проекций

Рисунок 20 - Построенный эпюр точки А

Проверяем правильность построения:

1. Горизонтальная A_1 и фронтальная A_2 проекции точки A должны находиться на одном перпендикуляре к оси X_{12} ;
2. Фронтальная A_2 и профильная A_3 проекции точки A должны находиться на одном перпендикуляре к оси Z .

2 часть. Построение аксонометрических проекций точки А.

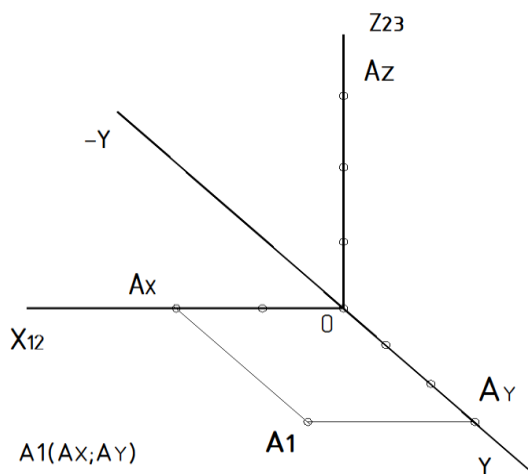


Рисунок 21

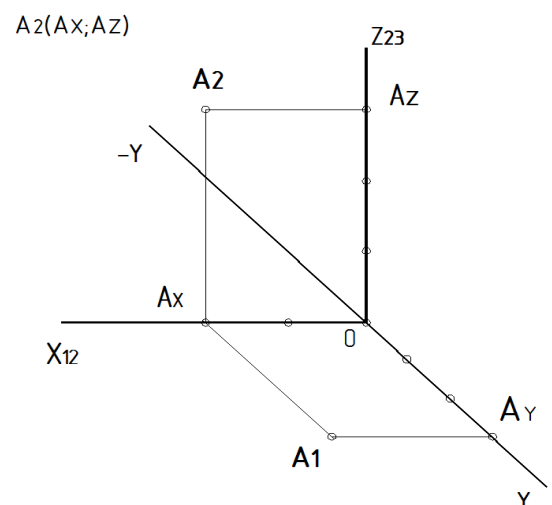


Рисунок 22

Решение:

1. Вычерчиваем аксонометрические оси в косоугольной диметрической фронтальной проекции с коэффициентом искажения $K_X = 1$; $K_Y = 0,5$; $K_Z = 1$

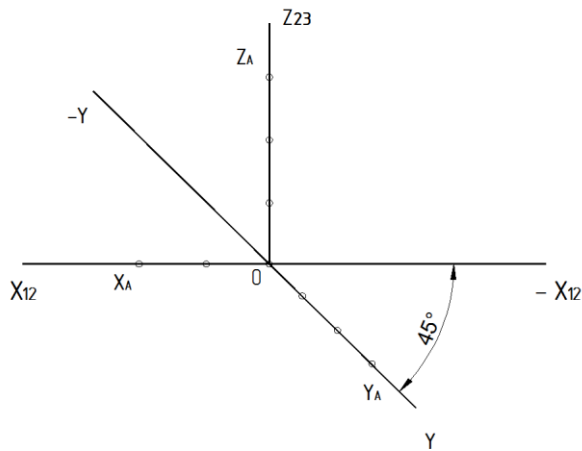


Рисунок 23

Угол между осью отрицательным значением ($-X_{12}$) и $Y - 45^\circ$

При дальнейшем построении отрицательную ось ($-X_{12}$) можно не указывать, если при построении все значения по оси X положительные.

2. На аксонометрических осях откладываем координатные отрезки точки A : OA_X ; OA_Y ; OA_Z (рисунок 24);
3. Строим проекции A_1 , A_2 , A_3 :
 Для построения первой проекции A_1 , необходимо знать ее координаты A_X и A_Y ;
 Для построения второй проекции A_2 , необходимо знать ее координаты A_X и A_Z ;
 Для построения третьей проекции A_3 , необходимо знать ее координаты A_Y и A_Z .

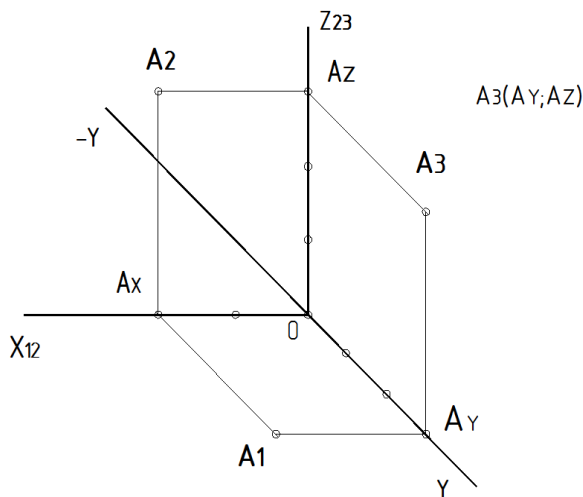


Рисунок 24

Линии проекционной связи от координат точки проводятся параллельно осям.

Например, для построения A_1 нужно провести одну линию проекционной связи из точки A_X параллельно оси Y , и другую из точки A_Y параллельно оси X . На пересечении построенных линий проекционной связи строим точку A_1

Две другие проекции точки A строятся по аналогии построения первой проекции (рисунок 24)

4. По построенным проекциям точки A строим ее аксонометрическую проекцию и определяем ее положение в пространстве. В данном примере все три координаты точки A положительные - $A(20,30,30)$. Поэтому точка принадлежит I окт. Рисунок 25.

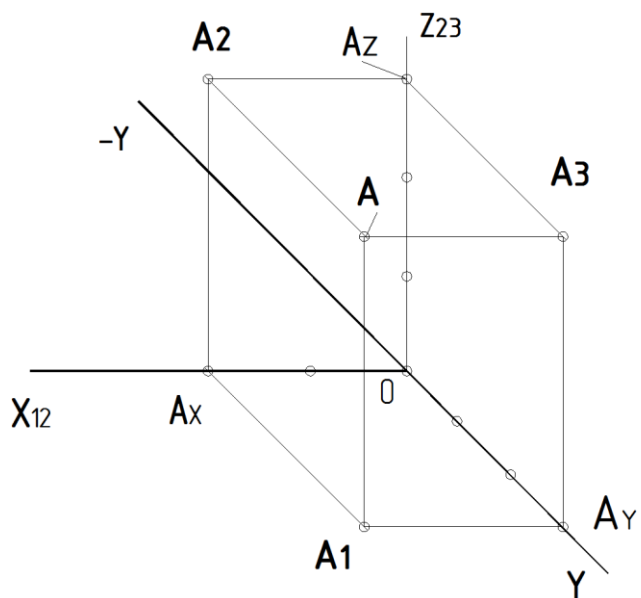


Рисунок 25

По аналогии построения точки А строим точку В.

Обращаем внимание на отрицательные значения по оси Y (B_Y) (рисунок 26) !!!!!!!

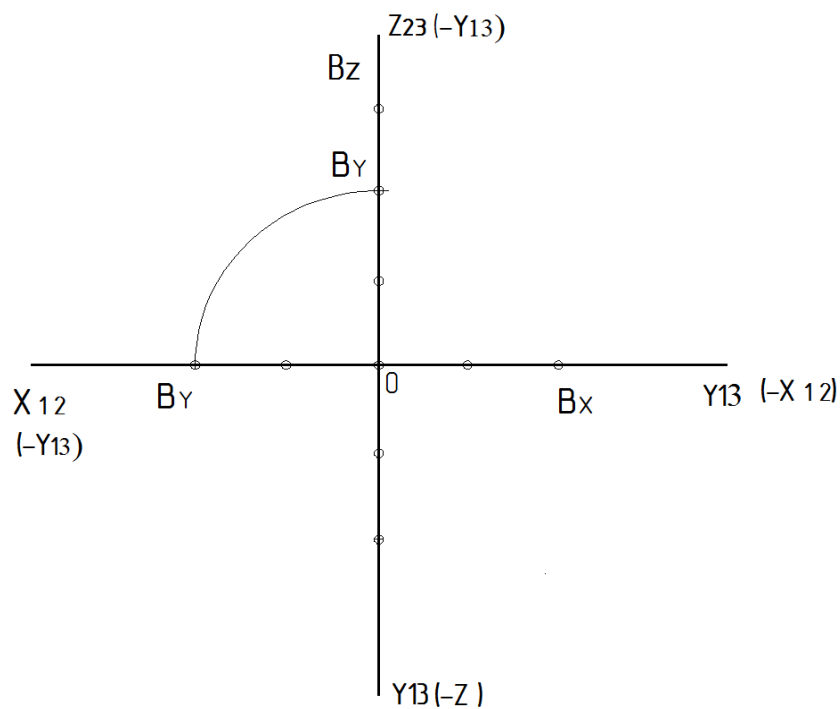
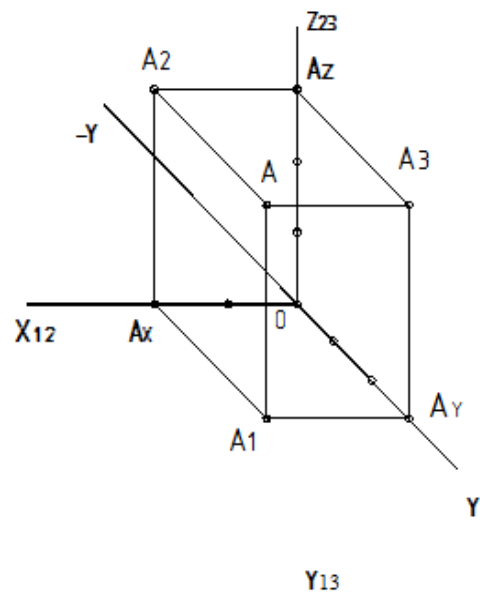
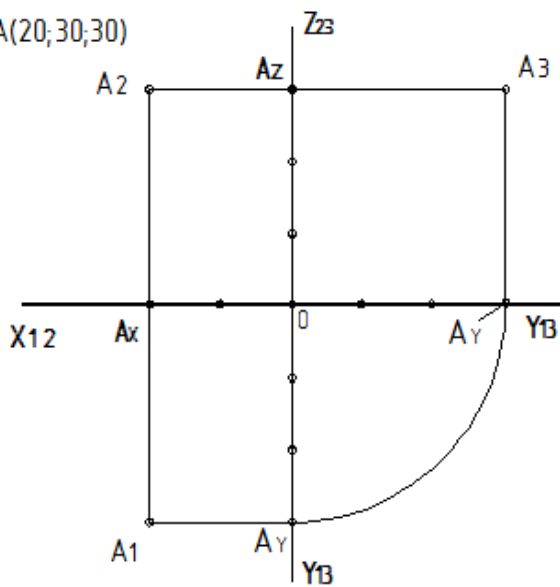


Рисунок 26

Пример оформления задачи 1.1. представлен на рисунках 27 и 28.
Задание выполняется на листе формата А4.

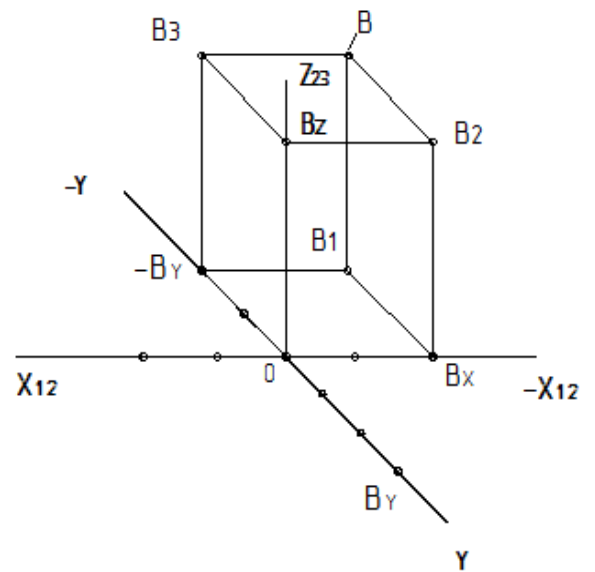
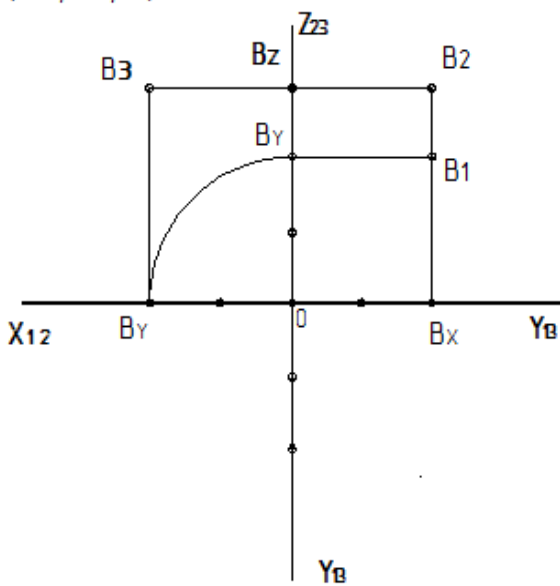
По заданным координатам точек A и B построить их три проекции.
 Определить положение точек A и B в пространстве.
 Построить аксонометрические проекции данных точек.

A(20;30;30)



т. A принадлежит I окт.

B(-20;-20;30)

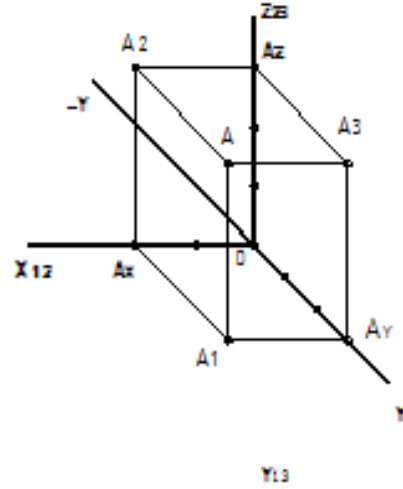
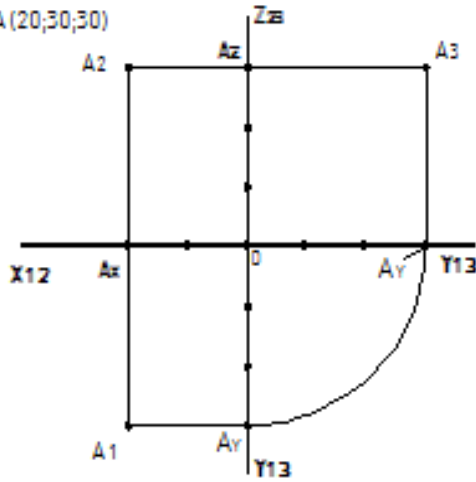


т. B принадлежит VI окт.

Рисунок 27

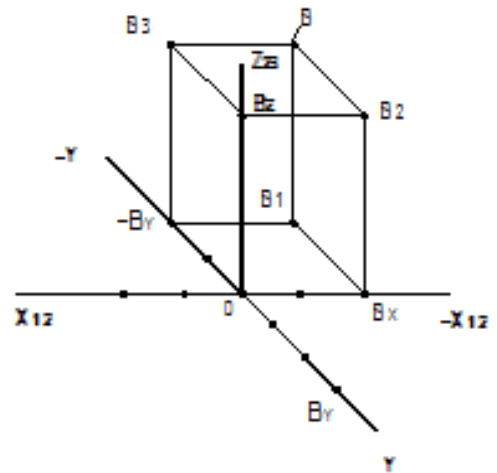
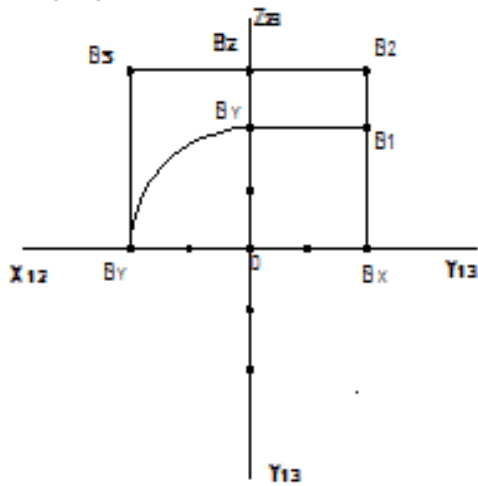
По заданным координатам точек A и B построить их три проекции.
 Определить положение точек A и B в пространстве.
 Построить аксонометрические проекции данных точек.

A(20;30;30)



т. А принадлежит I окт.

B(-20;-20;30)



т. В принадлежит VI окт.

НГ.01.01.XX

Задача №1.1.

Иж.	Лист	ИЗДАЮЩ.	Подп.	Дата
Разраб.				
Проб.				
Т.контр.				
И.контр.				
Чтб.				

Лист	Масса	Масштаб
		1:1
Лист	Листов	
ГЭАП гр.ХХХХ		

Рисунок 28 – Пример оформления задачи 1.1.

Задача 1.2 . По заданным координатам точки $A(20,30,30)$ построить три ее проекции. Определить положение точки A в пространстве. Построить три проекции точки K , симметричной точке A

Построение симметричной точки K относительно точки A . Элемент симметрии указан в задании.

Определяем координаты точки K . По абсолютной величине координаты точки K равны координатам точки A , но отличаются знаком:

1. Если элементом симметрии является начало координат (точка O), то у точки K меняется знак координат по всем трем осям;
2. Если элементом симметрии является ось проекции (ось X, Y или Z), то меняется знак координат по двум другим осям;
3. Если элементом симметрии является плоскость проекций π_1, π_2 или π_3 , то меняется знак координаты по оси, перпендикулярной этой плоскости проекций.

Далее на рисунках 29 и 30 представлен пример построения точек A и K . Элементом симметрии является плоскость π_1 . Поэтому меняется знак координат по **оси z** .

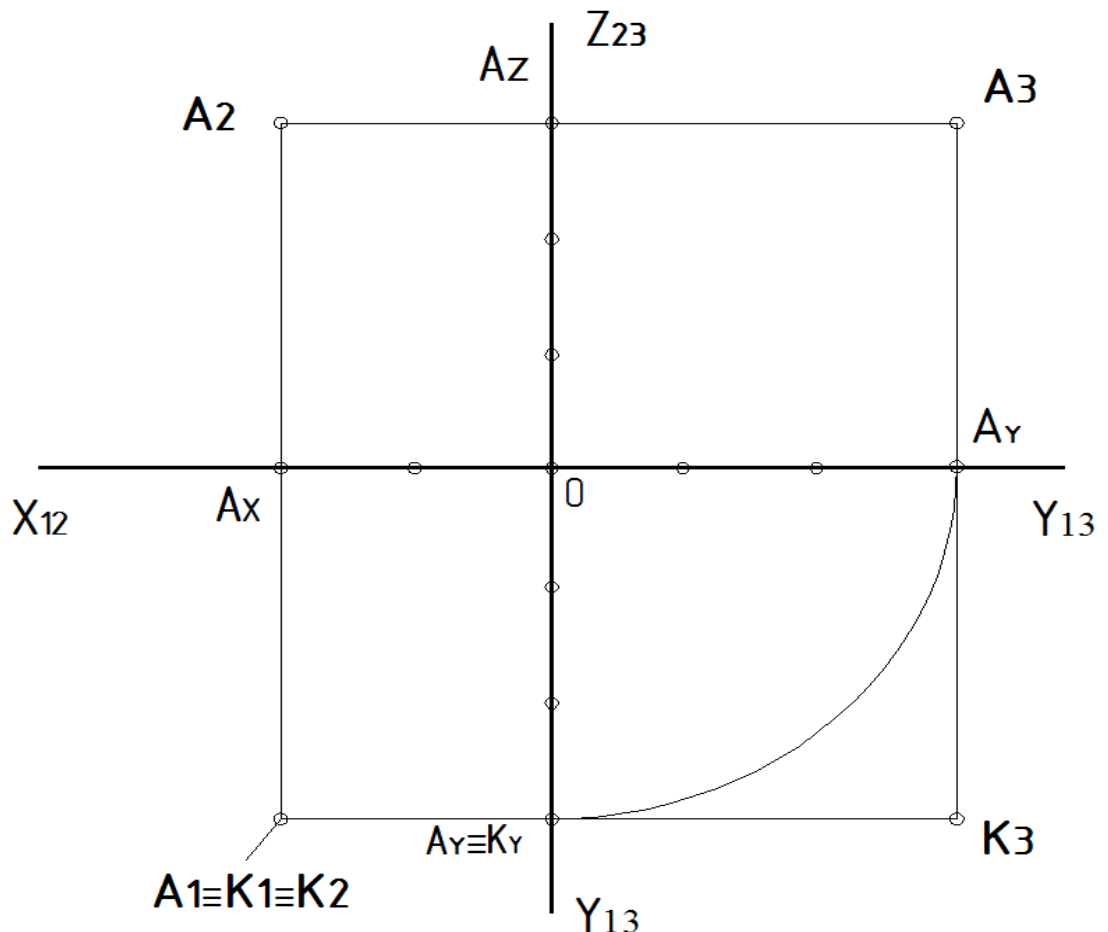


Рисунок 29 – Построение точек A и симметричной точки K на эпюре

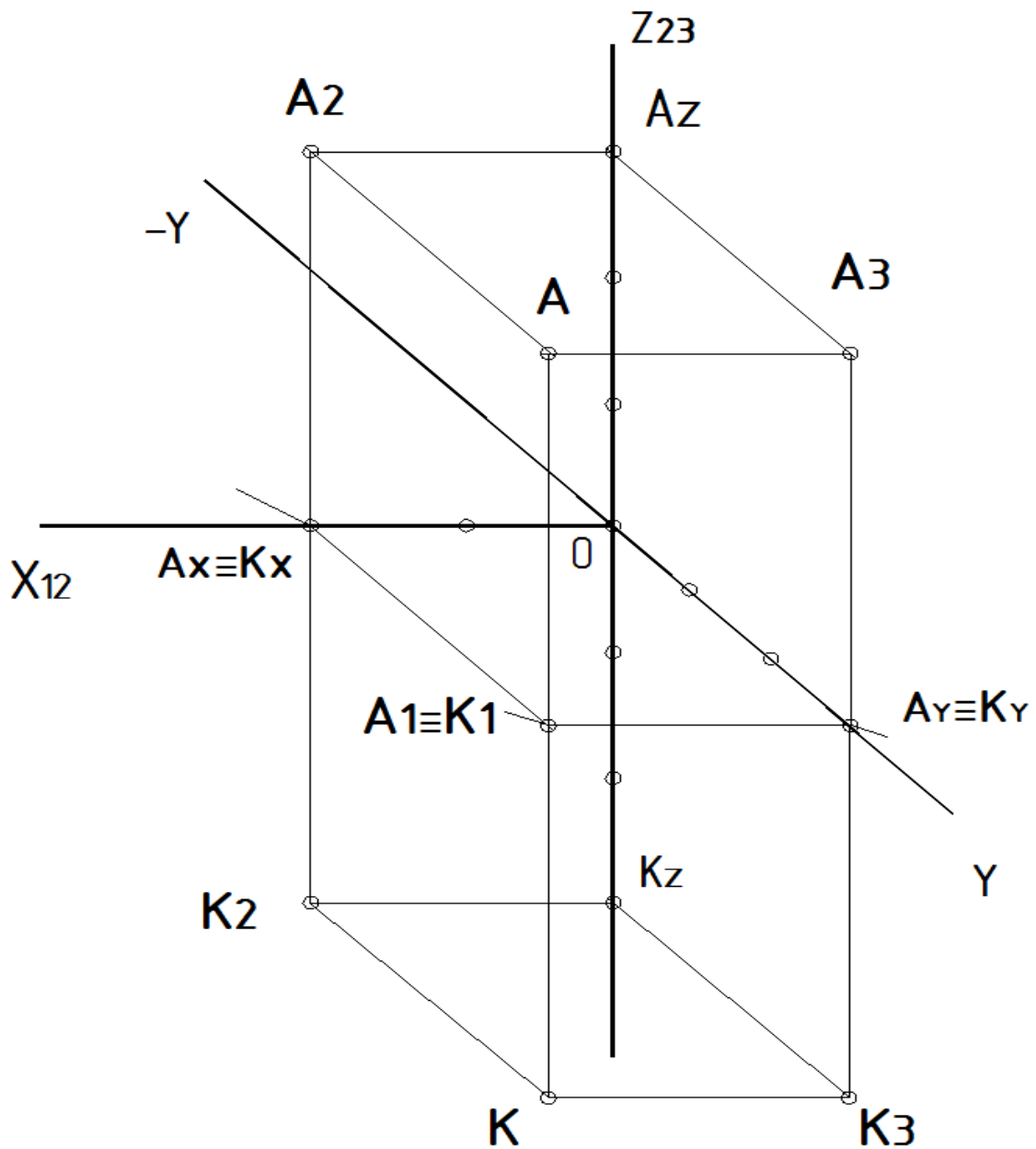


Рисунок 30 - Построение точек A и симметричной точки K на аксонометрии

Далее на рисунках 31 и 32 представлен пример построения точек A и K. Элементом симметрии является плоскость π_3 . Поэтому меняется знак координат по оси x.

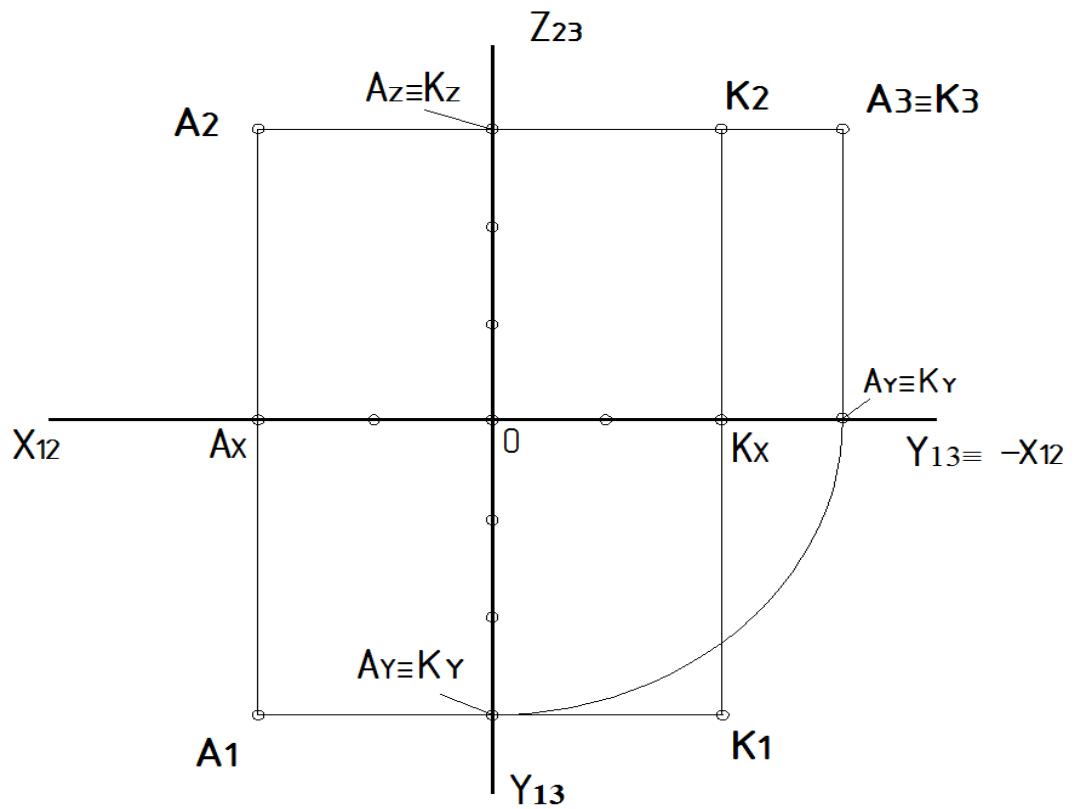


Рисунок 31- Построение точек A и симметричной точки K на эпюре

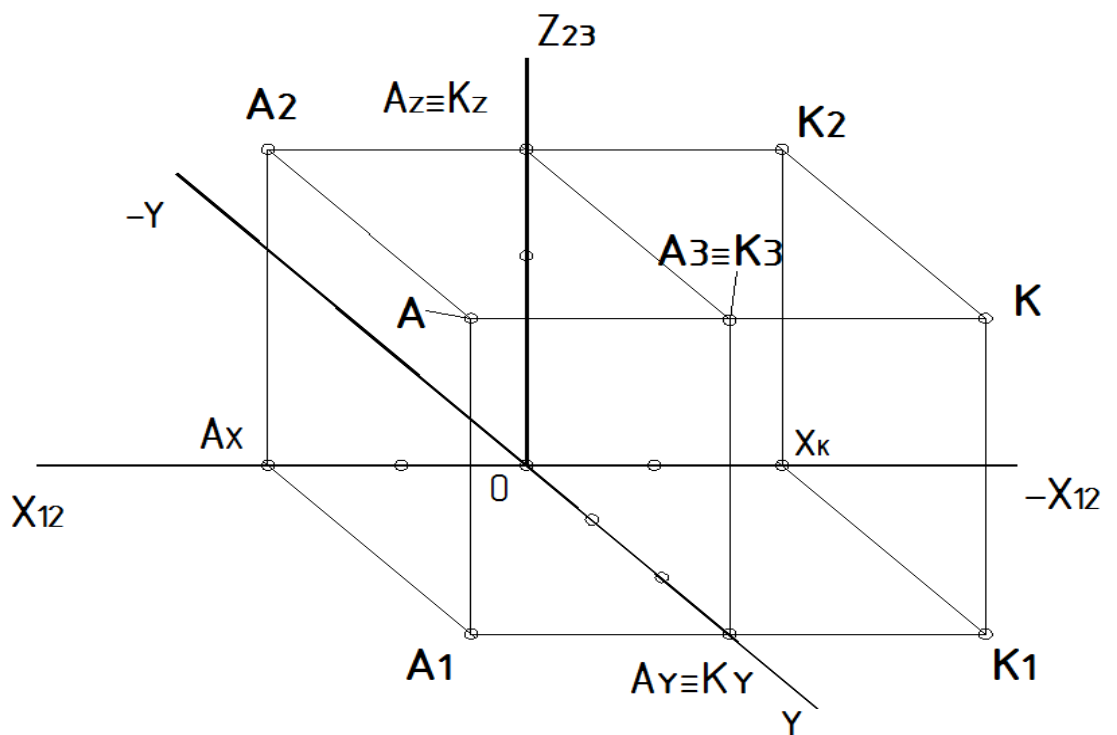
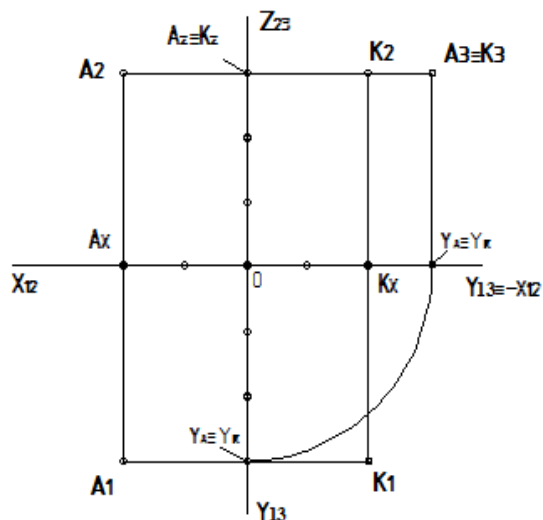


Рисунок 32 - Построение точек A и симметричной точки K на аксонометрическом чертеже

По заданным координатам точки A построить три ее проекции.
 Определить положение точки A в пространстве.
 Построить три проекции точки K, симметричной точке A

Элемент симметрии ПЗ.

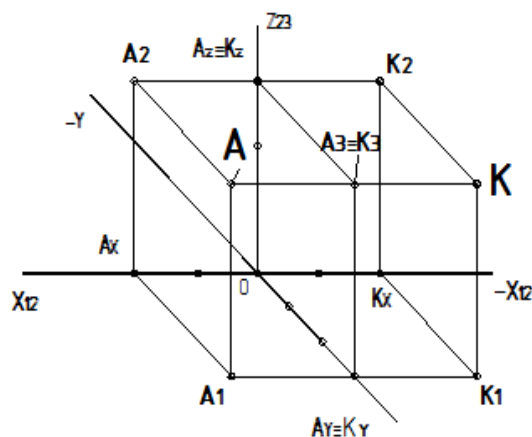


$A(20;30;30)$

т. А принадлежит I окт.

$K(-20;30;30)$

т. К принадлежит V окт.



				НГ.01.02.XX			
				Задача №1.2.			
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лит.	Масса	Масштаб
Разраб.							1:1
Пров.							
Т.контр.					Лист	Листов	
Н.контр.					ГЧАП зр.XXXX		
Чтв.							

Рисунок 33 – Пример оформления задачи 1.2.

Задача 1.3 . По заданным координатам точек C и D построить их три проекции.

Определить положение точек С и D в пространстве. Построить аксонометрические проекции данных точек (рисунок 34).

По заданным координатам точек С и D построить их три проекции. Определить положение точек С и D в пространстве. Построить аксонометрические проекции данных точек.

$C(-30;0;30)$

$D(0;20;0)$

т. С принадлежит Π_2

т. D принадлежит оси OY

					НГ.01.03.XX			
Изм.	Лист	№докум.	Подп.	Дата	Задача №1.3.	Лит.	Масса	Масштаб
Разраб.								1:1
Пров.								
Т.контр.								
Н.контр.								
Чтв.						Лист		Листов
						ГУАП зр.XXXX		

Рисунок 34 – Пример оформления задачи 1.3.

**Варианты заданий по начертательной геометрии к
теме «Проецирование точки».**

К задачам 1.1. и 1.2.

Таблица ***

№ Вар.	А			Элемент симметрии для т. К	В		
	A _X	A _Y	A _Z		B _X	B _Y	B _Z
1	20	-40	30	π_1	-20	-40	30
2	10	-20	30	π_2	-10	-20	30
3	10	50	-40	π_3	-10	50	-40
4	5	-20	60	о	-5	-20	60
5	10	20	-30	π_1	-10	20	-30
6	20	-30	-50	π_2	-20	-30	-50
7	50	-20	30	π_3	-50	-20	30
8	20	40	-30	оx	-20	40	-30
9	10	-20	30	оy	-10	-20	30
10	10	-20	50	оz	-10	-20	50
11	20	30	-50	о	-20	30	-50
12	30	-20	-40	π_1	-30	-20	-40
13	40	-20	30	π_2	-40	-20	30
14	30	20	-30	π_3	-30	20	-30
15	30	-20	30	оx	-30	-20	30
16	40	20	-50	оy	-40	20	-50
17	10	-40	30	оz	-10	-40	30
18	20	-30	-50	о	-20	-30	-50
19	40	-20	-30	π_1	-40	-20	-30
20	10	-20	50	π_2	-10	-20	50
21	10	50	-30	π_3	-10	50	-30
22	20	-30	50	оx	-20	-30	50
23	40	20	-30	оy	-40	20	-30
24	50	-20	30	оz	-50	-20	30
25	10	20	-50	о	-10	20	-50

К задаче 1.3.

№ Вар.	C			D		
	C_X	C_Y	C_Z	D_X	D_Y	D_Z
1	20	0	30	-20	0	0
2	0	-20	30	0	0	30
3	10	50	0	-10	0	0
4	5	0	60	0	0	60
5	10	40	0	0	30	0
6	20	0	-50	-20	0	0
7	0	-20	30	0	0	30
8	20	0	-30	0	40	0
9	10	-20	0	-10	0	0
10	10	0	50	0	0	50
11	0	30	-50	-20	0	0
12	30	0	-40	0	0	-40
13	40	-20	0	0	0	30
14	30	0	-30	0	60	0
15	0	-20	30	0	0	30
16	40	0	-50	0	40	0
17	10	-40	0	0	40	0
18	20	0	-50	0	0	-50
19	0	-20	-30	-40	0	0
20	10	0	50	0	60	0
21	10	50	0	0	50	0
22	20	0	50	0	0	50
23	0	20	-30	0	40	0
24	50	0	30	0	60	0
25	10	20	-50	-20	0	0

Вопросы по разделу «Проецирование точки»:

1. В чем сущность центрального проецирования?
2. В чем сущность параллельного проецирования?
3. В чем сущность ортогонального проецирования?
4. Как обозначаются три плоскости проекции? Как они располагаются относительно друг друга?
5. Как называется проекция точки на третьей плоскости проекций, как она обозначается?
6. Что называется линией проекционной связи?
7. Что называется октантами пространства, как они обозначаются?
8. Как осуществляется переход от пространственной модели к плоскому чертежу в случае проецирования на три плоскости проекций?
9. Как располагаются проекции точек на трехпроекционном чертеже?
10. Как связаны между собой фронтальная и профильная проекции точки?
11. Как называется отрезок прямой между фронтальной и профильной проекциями точки?
12. Как связаны между собой горизонтальная и профильная проекции точки?
13. Как построить профильную проекцию точки, если заданы ее горизонтальная и фронтальная проекции?