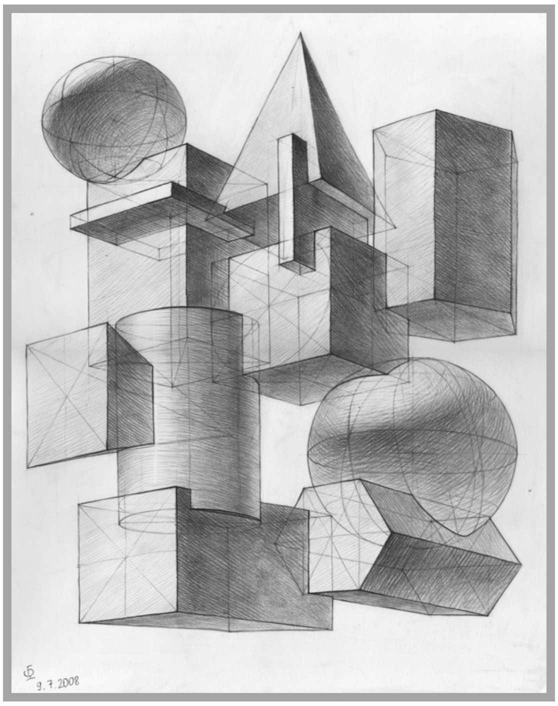
ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

I КУРС (МОДУЛЬ 1–2)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Санкт-Петербург

2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

для экономических специальностей

I КУРС (МОДУЛЬ 1–2)

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2010

С.Н. Кузнецова, М.В. Лукина, Е.В. Милованович. Типовые расчеты для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1–2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебно-методическое пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 48 с.

В пособии приведены типовые расчеты с методическими указаниями по теме «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей, обучающихся в НИУ ИТМО.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 23.03.2010., протокол № 4.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

Оглавление

Общие положения

Студенты, обучающиеся по специальностям экономического направления, изучают в первом семестре (модуль 1, модуль 2) следующие темы:

1. Матрицы и определители
2. Системы линейных алгебраических уравнений
3. Элементы линейной алгебры
4. Векторная алгебра
5. Аналитическая геометрия

Данный типовой расчет содержит задачи по этим темам, которые предлагаются студентам по выбору преподавателя. В типовом расчете даются краткие методические указания, задания для самостоятельного выполнения и вопросы для самопроверки.

Требования к оформлению:

1. Типовой расчет выполняется в отдельной тетради.
2. На обложке необходимо указать фамилию, номер группы, номер варианта и дату.
3. Каждое задание выполняется с новой страницы. Задания нумеруются. Условие задачи необходимо переписать, а для задач по аналитической геометрии сделать поясняющий рисунок.
4. Решение должно содержать все необходимые пояснения.

Тема 1. Матрицы и определители

Задание 1. *В этом задании даны две матрицы A и B. Требуется вычислить:*

1.1 *матрицу $2A-3B$;*

1.2 *произведение матриц AB и BA. Выяснить, являются ли данные матрицы перестановочными;*

1.3 *определитель матрицы A;*

1.4 *матрицу, обратную B. Выполнить проверку.*

Дано. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Вычисления выполняются в следующей последовательности

$$2A=2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 14 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$-3B=-3\begin{pmatrix}-2&0&5\\1&3&7\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&-15\\-3&-9&-21\\0&-3&-6\end{pmatrix}$$

$$2A-3B=2A+(-3B)=\begin{pmatrix}4&6&8\\0&2&4\\14&-4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0&-15\\-3&-9&-21\\0&-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6&-7\\-3&-7&-17\\14&-7&-12\end{pmatrix}$$

Ответ. $2A-3B=\begin{pmatrix}10&6&-7\\-3&-7&-17\\14&-7&-12\end{pmatrix}$.

2. При умножении матриц важно помнить, что данная операция выполняется не всегда. Необходимо, чтобы количество столбцов первого сомножителя равнялось числу строк второго сомножителя. Матрицы умножаются по принципу «строка на столбец». При этом размер матрицы произведения определяется по правилу $\underbrace{[m\times n]\cdot[n\times k]}_{[m\times k]}$

Далее приведена последовательность вычислений

$$C=AB=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&2\\7&-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&5\\1&3&7\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$C_{11}=2\cdot(-2)+3\cdot1+4\cdot0=-1$

$C_{12}=2\cdot0+3\cdot3+4\cdot1=13$

$C_{13}=2\cdot5+3\cdot7+4\cdot2=39$

$C_{21}=0\cdot(-2)+1\cdot1+2\cdot0=1$

$C_{22}=0\cdot0+1\cdot3+2\cdot1=5$

$C_{23}=0\cdot5+1\cdot7+2\cdot2=11$

$C_{31}=7\cdot(-2)+(-2)\cdot1+(-3)\cdot0=-16$

$C_{32}=7\cdot0+(-2)\cdot3+(-3)\cdot1=-9$

$C_{33}=7\cdot5+(-2)\cdot7+(-3)\cdot2=15$

$$C=AB=\begin{pmatrix}-1&13&39\\1&5&11\\-16&-9&15\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц BA выполняется аналогично.

$$D=BA=\begin{pmatrix}-2&0&5\\1&3&7\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&2\\7&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&-16&-23\\51&-8&-11\\14&-3&-4\end{pmatrix}$$

В общем случае умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Однако бывают случаи, когда $AB = BA$. Такие матрицы называются перестановочными или коммутирующими.

Так как в нашем случае результаты умножения AB и BA получились разными, то можно сделать вывод, что матрицы A и B не являются перестановочными.

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 39 \\ 1 & 5 & 11 \\ -16 & -9 & 15 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 31 & -16 & -23 \\ 51 & -8 & -11 \\ 14 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислим определитель матрицы A. Для этого выполним следующие операции

а) Воспользуемся свойством определителя: определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число. Умножим второй столбец на -2 и сложим с третьим столбцом для получения нуля в позиции $(2,3)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

б) разложим определитель по второй строке

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot M_{23}$$

в) выполним расчеты

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 7 \cdot (-2) = 16$$

Ответ. $\det A = 16$.

4. Обратной матрицей B^{-1} для матрицы B называется матрица, для которой справедливы равенства $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = E$, где $E-$ единичная матрица. Заметим, что обратная матрица B^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц ($\det B \neq 0$).

Обратную матрицу будем строить методом алгебраических дополнений. Для этого выполним следующие действия

а) вычислим определитель матрицы B (см. Задание 1.3)

$$\det B=\begin{vmatrix}-2&0&5\\1&3&7\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&6&19\\1&3&7\\0&1&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&19\\1&2\end{vmatrix}=7\neq 0$$

б) вычислим алгебраические дополнения для элементов матрицы

$$B_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&7\\1&2\end{vmatrix}=-1;B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&7\\0&2\end{vmatrix}=-2;B_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$B_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&5\\1&2\end{vmatrix}=5;B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-2&5\\0&2\end{vmatrix}=-4;B_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-2&0\\0&1\end{vmatrix}=2$$

$$B_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&5\\3&7\end{vmatrix}=-15;B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-2&5\\1&7\end{vmatrix}=19;B_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}=-6$$

в) составим союзную (присоединенную) матрицу и транспонируем ее

$$B^*=\begin{pmatrix}-1&5&-15\\-2&-4&19\\1&2&-6\end{pmatrix}$$

г) разделим каждый элемент полученной матрицы на определитель

$$B^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&5&-15\\-2&-4&19\\1&2&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{15}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{19}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

Проверка.

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&5\\1&3&7\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{15}{7}\\-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{19}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&0&5\\1&3&7\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&5&-15\\-2&-4&19\\1&2&-6\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2+5&-10+10&-2+2\\-1-6+7&5-12+14&-4+4\\-2+2&-15+57-42&19-12\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Аналогично проверяем, что $B^{-1}\cdot B=E$.

Обратная матрица может быть также построена с использованием метода Гаусса. Для этого запишем исходную матрицу и присоединим к ней единичную матрицу:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&5&1&0&0\\1&3&7&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right).$$

Теперь с помощью элементарных преобразований на месте исходной матрицы надо получить единичную матрицу. При этом на месте единичной матрицы получится матрица обратная данной.

Ответ. $B^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{15}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{19}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 1.

Вычислить:

1. матрицу $2A-3B$;
2. произведение матриц AB и BA. Выяснить, являются ли данные матрицы перестановочными;
3. определитель матрицы A;
4. матрицу, обратную B. Выполнить проверку.

1.1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1.2 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1.3 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.4 $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1.5 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.6 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.7 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.8 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.9 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

1.10 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1.11 $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1.12 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

1.13 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1.14 $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

1.15 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

1.16 $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

1.17 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1.18 $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

1.19 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

1.20 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

1.21 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1.22 $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.23 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1.24 $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

1.25 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.26 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.27 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1.28 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

1.29 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1.30 $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Вопросы для самопроверки

1. В каком месте матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ расположен элемент a_{52}?
2. Может ли матрица состоять из одного столбца?
3. Могут ли быть равными квадратные матрицы, одна из которых третьего, а вторая четвертого порядка?
4. Можно ли найти сумму двух матриц, одна из которых размера 3×4, а вторая – 4×3?
5. Существует ли произведение матриц $A_{3\times 4}\cdot B_{4\times 2}$? $A_{4\times 2}\cdot B_{3\times 4}$?
6. Если матрицы A и B можно умножить, следует ли из этого, что их можно сложить? А обратно?
7. Можно ли найти произведение двух матриц одна из которых квадратная, а другая – нет?

8. Если $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, то можно ли утверждать, что это матрицы одного размера?
9. Может ли произведение двух ненулевых матриц быть нулевой матрицей?
10. Могут ли совпадать матрицы A и A^T ?
11. Чем отличается минор M_{54} от алгебраического дополнения A_{54} ?
12. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой матрицы быть равными соответствующим минорам?
13. Верно ли что если $\det A = 0$, то $\det A^{-1} = 0$? Если $\det A = 2$, то $\det A^{-1} = -2$? Если $\det A = 2$, то $\det A^{-1} = 0{,}5$?
14. Пусть матрица A содержит минор пятого порядка, отличный от нуля. Что можно сказать о ранге матрицы?
15. Чему равен определитель треугольной матрицы?
16. Может ли ранг матрицы быть равным 0? Меньше 0? Равен $2{,}5$?
17. Может ли ранг матрицы $A_{7\times3}$ равняться четырем?
18. Пусть A квадратная матрица 7-го порядка. Что можно сказать о ранге матрицы A, если $\det A = 0$?
19. Как может измениться ранг матрицы при добавлении к ней одной произвольной строки?
20. Какие еще методы построения обратной матрицы известны?

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Задание 2. *В этом задании надо решить систему трех линейных уравнений*

2.1 *по формулам Крамера;*
2.2 *матричным методом;*
2.3 *методом Гаусса.*

Дано. $$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}.$$

Решение.

1. Запишем матрицу системы и столбец свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель этой матрицы и проверим, что матрица не вырожденная (см. Задание 1.3), поскольку только в этом случае могут быть использованы формулы Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=60\neq 0.$$

Составим и вычислим определители неизвестных. Для этого в определителе системы столбец коэффициентов данного неизвестного заменим столбцом свободных членов.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=180,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=60,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=60.$$

Вычислим значения неизвестных по формулам $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$.

$$x=\frac{180}{60}=3,\ y=\frac{60}{60}=1,\ z=\frac{60}{60}=1.$$

2. Запишем систему уравнений в матричном виде $AX=B$, где $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ столбец неизвестных. Тогда решение системы находим по формуле $X=A^{-1}B$.

Для этого построим обратную матрицу A^{-1} (см. Задание 1.4).

$$A^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}12 & 6 & 6\\ -18 & 11 & 1\\ -18 & 1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60}\\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60}\end{pmatrix}$$ и умножим ее на матрицу-столбец свободных членов (см. задание 1.2).

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60}\\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 11\\ 11\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}12 & 6 & 6\\ -18 & 11 & 1\\ -18 & 1 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 11\\ 11\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}48+66+66\\-72+121+11\\-72+11+121\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}180\\60\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3. Расширенная матрицы системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&4\\3&4&-2&11\\3&-2&4&11\end{array}\right)$$

Выполним следующие элементарные преобразования, не меняющие ранг матрицы:

а) Вычтем из третьей строки первую

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&4\\3&4&-2&11\\3&-2&4&11\end{array}\right)\begin{array}{c}III-I\\I\\II\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&7\\2&-1&-1&4\\3&4&-2&11\end{array}\right)$$

б) Умножим первую строку на -2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на -3 и сложим с третьей. В этом случае в позициях $(2,1)$ и $(3,1)$ получим нули

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&7\\2&-1&-1&4\\3&4&-2&11\end{array}\right)\begin{array}{c}\\(-2)\cdot I+II\\(-3)\cdot I+III\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&7\\0&1&-11&-10\\0&7&-17&-10\end{array}\right)$$

в) Используя ту же процедуру, получим ноль в позиции $(3,2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&7\\0&1&-11&-10\\0&7&-17&-10\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\(-7)\cdot II+III\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&5&7\\0&1&-11&-10\\0&0&60&60\end{array}\right)$$

Основная матрица системы приведена к диагональному виду.

г) Запишем получившуюся систему уравнений

$$\begin{cases}x-y+5z=7\\ \quad y-11z=-10\\ \qquad 60z=60\end{cases}$$

д) Из последнего уравнения найдем $z=\frac{60}{60}=1$. Подставим его во второе уравнение и вычислим $y=-10+11\cdot1=1$, а затем и $x=7+1-5\cdot1=3$.

Проверка. $\begin{cases}2\cdot3-1-1=4\\3\cdot3+4\cdot1-2\cdot1=11\\3\cdot3-2\cdot1+4\cdot1=11\end{cases}$

Ответ. $x=3,\ y=1,\ z=1$.

Задание 3. *В этом задании необходимо построить фундаментальную систему решений и общее решение однородной линейной системы алгебраических уравнений.*

Дано. $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$.

Решение.

Выпишем матрицу системы (столбец свободных членов состоит из нулей, поэтому его можно не рассматривать) и преобразуем ее по методу Гаусса (см. Задание 2.3).

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)\cdot I+II \\ III-I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы $r(A)=2$. Поскольку число неизвестных $n=4<r(A)$, система имеет бесконечное множество решений.

Выберем базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, соответствующие ему неизвестные будем считать главными (базисными) – x_1, x_4, а остальные неизвестные x_2, x_3 – свободными. Обозначим $x_2=c_1,\ x_3=c_2$

Запишем систему, соответствующую преобразованной матрице, и выразим главные неизвестные через свободные.

$$\begin{cases} x_1-3c_1-c_2+x_4=0 \\ \quad 5c_1 \qquad +x_4=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=8c_1+c_2 \\ x_4=-5c_1 \end{cases}.$$

Запишем решение системы в виде вектора

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8c_1+c_2 \\ c_1+0\cdot c_2 \\ 0\cdot c_1+c_2 \\ -5c_1+0\cdot c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Это общее решение системы. Векторы $X_1=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

$$Ответ.\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_2 = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи для типовых расчетов

Задание 2.

Решить систему линейных уравнений

1. по формулам Крамера;
2. матричным методом;
3. методом Гаусса.

2.1 $\begin{cases} x+4y-z=-9 \\ 4x-y+5z=-2 \\ 3y-7z=-6 \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-5y+2z=-7 \end{cases}$ 2.3 $\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x+4y-z=6 \\ 5y+4z=-20 \\ 3x-2y+5z=-22 \end{cases}$ 2.5 $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$ 2.6 $\begin{cases} 4x+y+4z=19 \\ 2x-y+2z=11 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$ 2.8 $\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$ 2.9 $\begin{cases} 3x-y+z=9 \\ 5x+y+2z=11 \\ x+2y+4z=19 \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 2x+y+3z=16 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$ 2.11 $\begin{cases} 2x+y+3z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$ 2.12 $\begin{cases} 2x-y+2z=3 \\ x+y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-3 \end{cases}$

2.13 $\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$ 2.14 $\begin{cases} 2x-y+3z=-4 \\ x+3y-z=11 \\ x-2y+2z=-7 \end{cases}$ 2.15 $\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$

2.16 $\begin{cases} 8x+3y-6z=12 \\ x+y-z=-2 \\ 4x+y-3z=9 \end{cases}$ 2.17 $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 2x+3y-4z=12 \\ 3x-2y-5z=5 \end{cases}$ 2.18 $\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ x+y+2z=4 \\ 4x+y+4z=6 \end{cases}$

2.19 $\begin{cases} x+5y+z=-3 \\ 2x-y-3z=0 \\ 3x+4y+2z=1 \end{cases}$ 2.20 $\begin{cases} -3x+5y+6z=-8 \\ 3x+y+z=-4 \\ x-4y-2z=-9 \end{cases}$ 2.21 $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$

2.22 $\begin{cases} 4x-y=-6 \\ 3x+2y+5z=-14 \\ x-3y+4z=-19 \end{cases}$ 2.23 $\begin{cases} 5x+2y-4z=-16 \\ x+3z=-6 \\ 2x-3y+z=9 \end{cases}$ 2.24 $\begin{cases} x+4y-z=-9 \\ 4x-y+5z=-2 \\ 3y-7z=-6 \end{cases}$

2.25 $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$ 2.26 $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y-3z=13 \\ 3x-2y+4z=-15 \end{cases}$ 2.27 $\begin{cases} 2x \qquad +z=6 \\ 3x-4y \qquad =-2 \\ 2y-z=2 \end{cases}$

2.28 $\begin{cases} 2x-3y+3z=-10 \\ x+3y-3z=13 \\ x \qquad +z=1 \end{cases}$ 2.29 $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x+3y-2z=8 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ 2.30 $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x-2y+z=9 \\ x-4y-2z=3 \end{cases}$

Задание 3.

Построить фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы алгебраических уравнений.

3.1 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=0 \\ -x_1-x_2+6x_3-11x_4=0 \\ 3x_1 \qquad -3x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 3.2 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \\ -2x_1+5x_2+6x_3-12x_4=0 \\ 5x_1+9x_2+13x_3+9x_4=0 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+4x_4=0 \\ -3x_1-10x_2+7x_3-7x_4=0 \\ -2x_1-6x_2+4x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 3.4 $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1 \qquad -x_3+3x_4=0 \\ -x_1-5x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1 \qquad +5x_3+x_4=0 \\ 3x_2+4x_3-x_4=0 \end{cases}$ 3.6 $\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_2+5x_3-8x_4=0 \\ 2x_1 \qquad +3x_3-5x_4=0 \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+3x_3-5x_4=0 \\ -3x_1-5x_2+7x_3-7x_4=0 \end{cases}$ 3.8 $\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1-4x_2+2x_3-x_4=0 \\ 7x_1+6x_2+4x_3+3x_4=0 \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} 9x_1+8x_2+7x_3+6x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3 \qquad =0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$ 3.10 $\begin{cases} -2x_1+4x_2-2x_3-6x_4=0 \\ x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+5x_3+4x_4=0 \end{cases}$

3.11 $\begin{cases} 2x_1+8x_2+3x_3+2x_4=0 \\ -x_1+x_2+2x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+7x_2+x_3+5x_4=0 \end{cases}$ 3.12 $\begin{cases} 9x_2-7x_3+13x_4=0 \\ x_1-4x_2+3x_3-5x_4=0 \\ 3x_1-3x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases}$

3.13 $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3-5x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 3.14 $\begin{cases} 5x_1 \qquad +x_3 \qquad =0 \\ -2x_1-x_2 \qquad +2x_4=0 \\ 8x_1-x_2+2x_3+2x_4=0 \end{cases}$

3.15 $\begin{cases} -5x_1-2x_2-4x_3+6x_4=0 \\ -3x_1+2x_2-x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$ 3.16 $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3+5x_4=0 \\ -x_1+x_2+x_3+4x_4=0 \\ -3x_1+2x_2+4x_3-x_4=0 \end{cases}$

3.17 $\begin{cases} -x_1-x_2+x_3+8x_4=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-6x_3-7x_4=0 \end{cases}$ 3.18 $\begin{cases} 5x_1-2x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-6x_4=0 \\ 3x_1+x_2-5x_3+4x_4=0 \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} 6x_1+4x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1 \quad +3x_3-2x_4=0 \\ 5x_1+4x_2-x_3+3x_4=0 \end{cases}$

3.20 $\begin{cases} 7x_1-6x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 2x_1 \quad +3x_3+6x_4=0 \\ 5x_1+6x_2 \quad +8x_4=0 \end{cases}$

3.21 $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3+5x_4=0 \\ -2x_1+6x_2 \quad -x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+4x_4=0 \end{cases}$

3.22 $\begin{cases} 5x_1-8x_2+3x_3-2x_4=0 \\ -x_1+7x_2 \quad -x_3+8x_4=0 \\ 4x_1-x_2+2x_3+6x_4=0 \end{cases}$

3.23 $\begin{cases} 2x_1-x_2 \quad +4x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3+6x_4=0 \\ x_1+3x_2-5x_3+2x_4=0 \end{cases}$

3.24 $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1 \quad -3x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3-6x_4=0 \end{cases}$

3.25 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-6x_4=0 \\ 4x_1-x_2 \quad -x_3-4x_4=0 \\ x_1+4x_2+3x_3-2x_4=0 \end{cases}$

3.26 $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2 \quad +4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$

3.27 $\begin{cases} 3x_1+5x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+4x_2 \quad -6x_3+3x_4=0 \\ 11x_1+17x_2-8x_3+4x_4=0 \end{cases}$

3.28 $\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ \quad x_2+5x_3-8x_4=0 \\ 2x_1 \quad +3x_3-5x_4=0 \end{cases}$

3.29 $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3-5x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$

3.30 $\begin{cases} -5x_1-2x_2-4x_3+6x_4=0 \\ -3x_1+2x_2-x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. К какой системе линейных уравнений применимо правило Крамера?
2. Применим ли метод обратной матрицы к неопределенной системе линейных уравнений?
3. Может ли неопределенная система линейных уравнений быть несовместной?
4. Что называется общим решением системы линейных уравнений?
5. Может ли система, содержащая семь уравнений с пятью неизвестными, быть эквивалентной системе четырех уравнений с пятью неизвестными?
6. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной?
7. Что называется фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений?
8. Сколько решений содержит фундаментальная система решений однородной системы уравнений с шестью неизвестными, имеющая ранг 4?
9. Какова структура общего решения системы линейных неоднородных уравнений?
10. К системе уравнений дописали произвольное уравнение. Как при этом изменится множество решений?

11. Из несовместной системы линейных уравнений удалили одно уравнение. Будет ли полученная система совместной?
12. Могут ли быть эквивалентными две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестным, но разным числом уравнений?
13. Может ли частное решение системы линейных уравнений совпадать с ее общим решением?
14. Может ли однородная система линейных уравнений иметь ровно одно решение? Ровно два?

Тема 3. Элементы линейной алгебры

Задание 4. *В этом задании даны векторы* $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ *и вектор* $\vec{x}$. *Необходимо:*

4.1 *выяснить, образуют ли векторы* $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ *базис;*

4.2 *если образуют, то разложить вектор* $\vec{x}$ *по этому базису.*

Дано. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-15\\5\\6\end{pmatrix}$.

Решение.

1. Любые три линейно независимых вектора пространства образуют базис. Для линейной независимости векторов $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\lambda_1\vec{p}+\lambda_2\vec{q}+\lambda_3\vec{r}=\vec{0}$ выполнялось только при $\lambda_i=0, i=1,2,3$. Запишем это равенство в виде

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Оно эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases}3\lambda_2-\lambda_3=0\\5\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0.\\\lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}$$

Преобразуем матрицу системы (см. Задание 2.3)

$\begin{pmatrix}0&3&-1\\5&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&7&1\\0&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&7&1\\0&10&0\end{pmatrix}$. Ранг $r(A)=3$ и совпадает с числом неизвестных, значит, система имеет единственное решение. Поскольку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ является решением системы, то других решений нет.

Таким образом, векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ линейно независимы, а значит, образуют базис.

2. Разложить вектор по базису, значит найти числовые коэффициенты в выражении $\vec{x}=\lambda_1\vec{p}+\lambda_2\vec{q}+\lambda_3\vec{r}$. Как и ранее это выражение можно представить в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3\lambda_2-\lambda_3=-15 \\ 5\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=5 \\ \lambda_1-\lambda_2 \qquad =6 \end{cases}$$

, которая решается одним из выше рассмотреных методов (см. Задание 2). Выполнив вычисления, находим $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=3$ т.е. $\vec{x}=2\vec{p}-4\vec{q}+3\vec{r}$.

Ответ. Векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис и $\vec{x}=2\vec{p}-4\vec{q}+3\vec{r}$.

Задание 5. *В этом задании дана матрица A линейного оператора. Необходимо:*

5.1 *найти собственные числа матрицы A;*

5.2 *собственные векторы соответствующие эти числам.*

Дано. $A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$

Решение.

1. Для нахождения собственных чисел составим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Для его упрощения выполним ряд действий:

а) ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на 2

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2-2\lambda & 6 \\ 10 & 1-\lambda & 10 \\ 12 & 0 & 13-\lambda \end{vmatrix}=0$$

б) из второго столбца вынесем общий множитель $1-\lambda$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & 6 \\ 10 & 1 & 10 \\ 12 & 0 & 13-\lambda \end{vmatrix}=0$$

в) прибавим к первой строке вторую, умноженную на -2

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-13 & 0 & -14 \\ 10 & 1 & 10 \\ 12 & 0 & 13-\lambda \end{vmatrix}=0$$

г) разложим определитель по второму столбцу

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-13 & -14 \\ 12 & 13-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } (1-\lambda)\big((13-\lambda)(-13-\lambda)+168\big)=0.$$

В результате преобразований получим уравнение $(1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)=0$. Его корни $\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=-1$ являются собственными числами матрицы A.

2. Найдем собственные векторы, соответствующие собственным числам из условия $(A-\lambda_i E)\vec{x}_i=0$

а) $\lambda_{1,2}=1$. В этом случае матрица однородной системы принимает вид

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}\begin{matrix} :6 \\ :10 \\ :12 \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг $r(A-\lambda E)=1<n=3$. Решаем систему (см. Задание 3) и получаем собственный вектор:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} 2c_1-c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) $\lambda_3=-1$. Аналогично, решаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} II-I \\ III-II \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$r(A-\lambda E)=2<n=3$. После соответствующих преобразований получим вектор $\vec{x}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ -\frac{5}{6}c \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 1$: $\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а числу $\lambda = -1$: $\vec{x} = c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 6. *В этом задании надо привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием, указать линейное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.*

Пример 1. Квадратичная форма $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Решение.

Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов матрицы квадратичной формы. Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и найдем ее собственные числа (см. Задание 5.1) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам ортогональны. Найдем эти векторы (см. Задание 5.2).

$$\lambda_1 = -2: \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = 6: \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}, \ \lambda_3 = 3: \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ c \end{pmatrix}.$$

Нормируем собственные векторы.

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{c^2 + c^2} = c\sqrt{2}, \ \vec{e}_1' = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$|\vec{e}_2| = \sqrt{c^2 + 4c^2 + c^2} = c\sqrt{6}, \ \vec{e}_2' = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$$|\vec{e}_3| = \sqrt{c^2 + c^2 + c^2} = c\sqrt{3}, \ \vec{e}_3' = \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы квадратичная форма будет иметь вид $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, а сама квадратичная форма канонический вид $-2\left(x_1'\right)^2 + 6\left(x_2'\right)^2 + 3\left(x_3'\right)^2$.

Линейное преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду, задается матрицей перехода к ортонормированному базису из собственных векторов $A' = T^T A T$. В нашем случае $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Для «правой» системы координат $\det T = 1$.

Ответ. $-2\left(x_1'\right)^2 + 6\left(x_2'\right)^2 + 3\left(x_3'\right)^2$.

Пример 2. Квадратичная форма
$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Решение.

Матрица этой квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$.

Как и в предыдущем примере найдем ее собственные числа и собственные векторы (см. Задание 5.1, 5.2).

$$\lambda_1 = 9:\ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 2c \end{pmatrix},\ \text{нормируем } \left|\vec{e}_1\right| = \sqrt{c^2 + 4c^2 + 4c^2} = 3c,\ \vec{e}_1'' = \frac{\vec{e}_1}{\left|\vec{e}_1\right|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Если среди собственных чисел матрицы квадратичной формы есть равные, то среди собственных векторов, соответствующих этому числу, нужно выбрать набор линейно независимых векторов, составляющих фундаментальную систему решений. А затем провести их ортогонализацию.

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ матрица однородной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ \text{поэтому } \vec{e} = \begin{pmatrix} -2c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Подберем два линейно независимых вектора. Положим $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$, тогда $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Проведем их ортогонализацию. Пусть $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3 - \vec{e}\,'_2 \cdot \dfrac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}\,'_2}{\vec{e}\,'_2 \cdot \vec{e}\,'_2}$. Нетрудно проверить, что для них выполняется условие ортогональности векторов $\vec{e}\,'_2 \cdot \vec{e}\,'_3 = 0$.

Итак $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3 - \frac{4}{5} \cdot \vec{e}\,'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируем полученные векторы $\left|\vec{e}\,'_2\right| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$, $\vec{e}\,''_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{e}\,'_3\right| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\vec{e}\,''_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

В базисе из собственных векторов матрицы квадратичная форма принимает вид $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, а сама квадратичная форма канонический вид $9\left(x''_1\right)^2 + 18\left(x''_2\right)^2 + 18\left(x''_3\right)^2$.

Ответ. $9\left(x''_1\right)^2 + 18\left(x''_2\right)^2 + 18\left(x''_3\right)^2$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 4.

Выяснить, образуют ли векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ базис.

Если образуют, то разложить вектор $\vec{x}$ по этому базису.

4.1	$\vec{p}(0;1;2)$	4.2	$\vec{p}(1;3;0)$	4.3	$\vec{p}(2;1;-1)$
	$\vec{q}(1;0;1)$		$\vec{q}(2;-1;1)$		$\vec{q}(0;3;2)$
	$\vec{r}(-1;2;4)$		$\vec{r}(0;-1;2)$		$\vec{r}(1;-1;1)$
	$\vec{x}(-2;4;7)$		$\vec{x}(6;12;-1)$		$\vec{x}(1;-4;4)$

4.4 $\vec{p}(-2;0;1)$ $\vec{q}(1;3;-1)$ $\vec{r}(0;4;1)$ $\vec{x}(-5;-5;5)$

4.5 $\vec{p}(5;1;0)$ $\vec{q}(2;-1;3)$ $\vec{r}(1;0;-1)$ $\vec{x}(13;2;7)$

4.6 $\vec{p}(0;1;1)$ $\vec{q}(-2;0;1)$ $\vec{r}(3;1;0)$ $\vec{x}(-19;-1;7)$

4.7 $\vec{p}(3;1;0)$ $\vec{q}(-1;2;1)$ $\vec{r}(-1;0;2)$ $\vec{x}(3;3;-1)$

4.8 $\vec{p}(-1;2;1)$ $\vec{q}(2;0;3)$ $\vec{r}(1;1;-1)$ $\vec{x}(-1;7;-4)$

4.9 $\vec{p}(1;1;4)$ $\vec{q}(0;-3;2)$ $\vec{r}(2;1;-1)$ $\vec{x}(6;5;-14)$

4.10 $\vec{p}(1;0;5)$ $\vec{q}(-1;3;2)$ $\vec{r}(0;-1;1)$ $\vec{x}(5;15;0)$

4.11 $\vec{p}(1;1;0)$ $\vec{q}(0;1;-2)$ $\vec{r}(1;0;3)$ $\vec{x}(2;-1;11)$

4.12 $\vec{p}(1;0;2)$ $\vec{q}(-1;0;1)$ $\vec{r}(2;5;-3)$ $\vec{x}(11;5;-3)$

4.13 $\vec{p}(0;1;3)$ $\vec{q}(1;2;-1)$ $\vec{r}(2;0;-1)$ $\vec{x}(3;1;8)$

4.14 $\vec{p}(1;2;-1)$ $\vec{q}(3;0;2)$ $\vec{r}(-1;1;1)$ $\vec{x}(8;1;12)$

4.15 $\vec{p}(1;4;1)$ $\vec{q}(-3;2;0)$ $\vec{r}(1;-1;2)$ $\vec{x}(-9;-8;-3)$

4.16 $\vec{p}(0;5;1)$ $\vec{q}(3;2;-1)$ $\vec{r}(-1;1;0)$ $\vec{x}(-15;5;6)$

4.17 $\vec{p}(1;0;1)$ $\vec{q}(0;-2;1)$ $\vec{r}(1;3;0)$ $\vec{x}(8;9;4)$

4.18 $\vec{p}(2;1;0)$ $\vec{q}(1;-1;0)$ $\vec{r}(-3;2;5)$ $\vec{x}(23;-14;-30)$

4.19 $\vec{p}(0;3;1)$ $\vec{q}(1;-1;2)$ $\vec{r}(2;-1;0)$ $\vec{x}(-1;7;0)$

4.20 $\vec{p}(1;-1;2)$ $\vec{q}(3;2;0)$ $\vec{r}(-1;1;1)$ $\vec{x}(11;-1;4)$

4.21 $\vec{p}(1;1;4)$ $\vec{q}(-3;0;2)$ $\vec{r}(1;2;-1)$ $\vec{x}(-13;2;18)$

4.22 $\vec{p}(0;1;5)$ $\vec{q}(3;-1;2)$ $\vec{r}(-1;0;1)$ $\vec{x}(8;-7;-13)$

4.23 $\vec{p}(1;0;1)$ $\vec{q}(1;-2;0)$ $\vec{r}(0;3;1)$ $\vec{x}(2;7;5)$

4.24 $\vec{p}(4;1;1)$ $\vec{q}(2;0;-3)$ $\vec{r}(-1;2;1)$ $\vec{x}(-9;5;5)$

4.25 $\vec{p}(1;-2;0)$ $\vec{q}(-1;1;3)$ $\vec{r}(1;0;4)$ $\vec{x}(6;-1;7)$

4.26 $\vec{p}(2;0;1)$ $\vec{q}(1;1;0)$ $\vec{r}(4;1;2)$ $\vec{x}(8;0;5)$

4.27 $\vec{p}(0;1;-2)$ $\vec{q}(3;-1;1)$ $\vec{r}(4;1;0)$ $\vec{x}(-5;9;-13)$

4.28 $\vec{p}(2;1;0)$, $\vec{q}(1;0;1)$, $\vec{r}(4;2;1)$, $\vec{x}(3;1;3)$

4.29 $\vec{p}(0;-2;1)$, $\vec{q}(3;1;-1)$, $\vec{r}(4;0;1)$, $\vec{x}(0;-8;9)$

4.30 $\vec{p}(1;0;2)$, $\vec{q}(0;1;1)$, $\vec{r}(2;-1;4)$, $\vec{x}(3;-3;4)$

Задание 5.

Найти собственные числа матрицы A и собственные векторы, соответствующие эти числам.

5.1 $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$

5.2 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$

5.3 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$

5.4 $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

5.5 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$

5.6 $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$

5.7 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$

5.8 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

5.9 $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$

5.10 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

5.11 $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 15 & 12\end{pmatrix}$

5.12 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

5.13 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$

5.14 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

5.15 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5.16 $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$

5.17 $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

5.18 $A=\begin{pmatrix}6 & -2 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$

5.19 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

5.20 $A=\begin{pmatrix}7 & -4 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$

5.21 $A=\begin{pmatrix}7 & -6 & 6\\ 4 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$

5.22 $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$

5.23 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$

5.24 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

5.25 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5.26 $A=\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$

5.27 $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

5.28 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 5.29 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 5.30 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 6.

Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием, указать линейное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.

6.1 $x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

6.2 $x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

6.3 $x_1x_2+x_2x_3$

6.4 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

6.5 $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

6.6 $x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3$

6.7 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

6.8 $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$

6.9 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

6.10 $x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3$

6.11 $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$

6.12 $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$

6.13 $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$

6.14 $4x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

6.15 $4x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$

6.16 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

6.17 $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$

6.18 $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$

6.19 $8x_1x_3+2x_2x_3$

6.20 $x_1^2+7x_2^2+x_3^2-8x_1x_2-16x_1x_3-8x_2x_3$

6.21 $x_1^2+3x_3^2-4x_2x_3$

6.22 $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$

6.23 $-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

6.24 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

6.25 $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$

6.26 $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2+6x_2x_3$

6.27 $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_2x_3$

6.28 $-4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

6.29 $2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

6.30 $x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Могут ли быть равными два вектора, один из которых – четырехмерный, а другой – пятимерный?
2. Какие векторы получаются из вектора $\vec{a}$ умножением на 0 и -1?
3. Какие векторы называются линейно независимыми?
4. Какие числа называются координатами вектора в данном базисе?
5. Доказать, что система векторов будет линейно зависима, если она содержит два пропорциональных вектора.
6. Чем задается линейный оператор в базисе пространства $\mathbf{R}^{n}$?
7. Всякая ли квадратная матрица n-го порядка задает в $\mathbf{R}^{n}$ линейный оператор?
8. Какой линейный оператор называется нулевым?
9. Сколько различных собственных значений может иметь матрица третьего порядка?
10. Чему равен ранг фундаментальной системы решений линейной однородной системы уравнений?

Тема 4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Задание 7. *В этом задании дан тетраэдр с вершинами в точках* A_1, A_2, A_3, A_4. *Надо найти:*

7.1 *объем тетраэдра;*
7.2 *высоту тетраэдра, опущенную из вершины* A_4.

Дано. $A_1(1;-3;-5)$, $A_2(0;0;-2)$, $A_3(-6;-1;-2)$, $A_4(-1;2;-4)$.

Решение.

1. Тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ построен на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Найдем координаты этих векторов (для этого из координат конца вычитаются координаты начала): $\overrightarrow{A_1A_2}=(-1;3;3)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-7;2;3)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(-2;5;1)$.

Объем тетраэдра находим по формуле $V_т=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$.

Вычислим

$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\begin{vmatrix}-1&3&3\\-7&2&3\\-2&5&1\end{vmatrix}=-2-105-18+12+15+21=-77$ и найдем

объем тетраэдра $V_т=\dfrac{1}{6}\left|-77\right|=\dfrac{77}{6}$.

Ответ. $V_{\text{т}} = \dfrac{77}{6}$.

2. Чтобы найти высоту тетраэдра, воспользуемся формулой объема пирамиды $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} H$. Здесь $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, т.е. площадь треугольника $A_1A_2A_3$, а H – высота пирамиды, проведенная из вершины A_4 на основание $A_1A_2A_3$.

Площадь треугольника вычислим, используя формулу $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \right|$.

Для этого найдем вектор

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 3 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} - 18\vec{j} + 19\vec{k}$$

и посчитаем его длину $\left| \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \right| = \sqrt{3^2 + 18^2 + 19^2} = \sqrt{694}$. Тогда $S_{\Delta} = \dfrac{\sqrt{694}}{2}$

Из формулы объема пирамиды выразим высоту $H = \dfrac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}$, и подставив ранее найденные значения, получим $H = \dfrac{77}{\sqrt{694}}$.

Ответ. $H = \dfrac{77}{\sqrt{694}}$.

Задание 8. *В этом задании необходимо решить задачу по теме «Векторная алгебра»*

Пример 1. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

Решение.

Запишем координаты векторов $\vec{a}(m;3;4)$ и $\vec{b}(4;m;-7)$.

Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является условие равенства нулю их скалярного произведения. Поскольку $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28$, найдем m, решая уравнение $4m + 3m - 28 = 0$. Получим $m = 4$.

Ответ. $m = 4$.

Пример 2. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$ и $\left(\overrightarrow{3a}+\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$, а угол между векторами $\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right) = 30^\circ$

Решение.

Из определения векторного произведения следует, что длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Запишем векторное произведение данных векторов $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\overrightarrow{3a}+\vec{b}\right)$ и выполним преобразования

$$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\overrightarrow{3a}+\vec{b}\right) = 3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}.$$

Учитывая свойства векторного произведения $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ и $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, получим $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\overrightarrow{3a}+\vec{b}\right) = 8\vec{b}\times\vec{a}$.

На основании определения векторного произведения, окончательно имеем $S_{\text{пар}} = \left|\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\overrightarrow{3a}+\vec{b}\right)\right| = 8\left|\vec{b}\times\vec{a}\right| = 8|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right) = 8\cdot1\cdot1\cdot\sin30^\circ = 4$

Ответ. $S_{\text{пар}} = 4$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 7.

Найти:

1. объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$;
2. высоту тетраэдра, опущенную из вершины A_4.

7.1 $A_1(1,3,6), A_2(2,2,1), A_3(-1,0,1), A_4(-4,6,-3)$

7.2 $A_1(-4,2,6), A_2(2,-3,0), A_3(-10,5,8), A_4(-5,2,-4)$

7.3 $A_1(7,2,4), A_2(7,-1,-2), A_3(3,3,1), A_4(-4,2,1)$

7.4 $A_1(2,1,4), A_2(-1,5,-2), A_3(-7,-3,2), A_4(-6,-3,6)$

7.5 $A_1(-1,-5,2), A_2(-6,0,-3), A_3(3,6,-3), A_4(-10,6,7)$

7.6 $A_1(0,-1,-1), A_2(-2,3,5), A_3(1,-5,-9), A_4(-1,-6,3)$

7.7 $A_1(5,2,0), A_2(2,5,0), A_3(1,2,4), A_4(-1,1,1)$

7.8 $A_1(2,-1,-2), A_2(1,2,1), A_3(5,0,-6), A_4(-10,9,-7)$

7.9 $A_1(-2,0,-4), A_2(-1,7,1), A_3(4,-8,-4), A_4(1,-4,6)$

7.10 $A_1(14,4,5), A_2(-5,-3,2), A_3(-2,-6,-3), A_4(-2,2,-1)$

7.11 $A_1(1,2,0), A_2(3,0,-3), A_3(5,2,6), A_4(8,4,-9)$

7.12 $A_1(2,-1,2), A_2(1,2,-1), A_3(3,2,1), A_4(-4,2,5)$

7.13 $A_1(1,1,2), A_2(-1,1,3), A_3(2,-2,4), A_4(-1,0,-2)$

7.14 $A_1(2,3,1), A_2(4,1,-2), A_3(6,3,7), A_4(7,5,-3)$

7.15 $A_1(1,1,-1), A_2(2,3,1), A_3(3,2,1), A_4(5,9,-8)$

7.16 $A_1(1,5,-7), A_2(-3,6,3), A_3(-2,7,3), A_4(-4,8,-12)$

7.17 $A_1(-3,4,-7), A_2(1,5,-4), A_3(-5,-2,0), A_4(2,5,4)$

7.18 $A_1(-1,2,-3), A_2(4,-1,0), A_3(2,1,-2), A_4(3,4,5)$

7.19 $A_1(4,-1,3), A_2(-2,1,0), A_3(0,-5,1), A_4(3,2,-6)$

7.20 $A_1(1,-1,1), A_2(-2,0,3), A_3(2,1,-1), A_4(2,-2,-4)$

7.21 $A_1(1,2,0), A_2(1,-1,2), A_3(0,1,-1), A_4(-3,0,1)$

7.22 $A_1(1,0,2), A_2(1,2,-1), A_3(2,-2,1), A_4(2,1,0)$

7.23 $A_1(1,2,-3), A_2(1,0,1), A_3(-2,-1,6), A_4(0,-5,-4)$

7.24 $A_1(3,10,-1), A_2(-2,3,-5), A_3(-6,0,-3), A_4(1,-1,2)$

7.25 $A_1(-1,2,4), A_2(-1,-2,-4), A_3(3,0,-1), A_4(7,-3,1)$

7.26 $A_1(0,-3,1), A_2(-4,1,2), A_3(2,-1,5), A_4(3,1,-4)$

7.27 $A_1(1,3,0), A_2(4,-1,2), A_3(3,0,1), A_4(-4,3,5)$

7.28 $A_1(-2,-1,-1), A_2(0,3,2), A_3(3,1,-4), A_4(-4,7,3)$

7.29 $A_1(-3,-5,6), A_2(2,1,-4), A_3(0,-3,-1), A_4(-5,2,-8)$

7.30 $A_1(2,-4,-3), A_2(5,-6,0), A_3(-1,3,-3), A_4(-10,-8,7)$

Задание 8.

Решить задачу:

8.1. Докажите что точки $A(1;-1;1), B(1;3;1), C(4;3;1), D(4;-1;1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислите длину его диагоналей.

8.2. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}(-3;1;3)$ на направление вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(7;3;-2), B(8;2;-2)$.

8.3. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

8.4. Лежат ли точки $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(5;1;0)$ в одной плоскости?

8.5. В прямоугольном треугольнике угол при вершине A равен 60°, а длина гипотенузы равна 2.вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

8.6. Найдите координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q}=(3;-4;0)$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует с осью Ox тупой угол и $|\vec{p}|=10$.

8.7. Найдите вектор $\vec{p}$, если он коллинеарен вектору $\vec{a}=(-4;3;2)$ и скалярное произведение его на вектор $\vec{b}=(-2;-3;3)$ равно 3.

8.8. При каком значении m векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+(m+1)\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ компланарны?

8.9. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(6;3;4)$, $\vec{b}=(-1;-2;-1)$ и $\vec{c}=(2;1;2)$.

8.10. Найдите вектор $\vec{d}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(0;-1;2)$ и $\vec{b}=(1;3;3)$, а его скалярное произведение на вектор $p=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ равно 8.

8.11. Вычислите координаты вектора $\vec{c}$, ортогонального векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, образующего тупой угол с осью Oy, если $|\vec{c}|=\sqrt{7}$.

8.12. Найдите орт $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(1;-1;0)$ и $\vec{b}=(2;1;-1)$.

8.13. Заданы точки $A(0;2;0), B(3;0;-4), C(2;1;1), D(-1;-1;-1)$. Вычислить векторное произведение векторов $\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$ и $\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\right)$.

8.14. Какую тройку образуют векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, если $A(1;1;-1), B(2;3;1), C(3;2;1), D(5;9;8)$?

8.15. Даны точки $A(0;-3;4), B(2;5;-1), C(-4;2;-2)$. Вычислить скалярное произведение векторов $\left(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}\right)$ и $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)$.

8.16. Даны координаты вершин треугольника $A(1;1;-1), B(2;4;-1), C(8;3;-1)$. Выяснить, какого он вида (по углам, по сторонам).

8.17. При каком значении m векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=m\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+m^2\vec{j}+4\vec{k}$ компланарны?

8.18. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Найдите длину вектора $\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$.

8.19. При каком значении t векторы $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-t\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{k}$?

8.20. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$, где $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ взаимно перпендикулярные орты.

8.21. Вычислите проекцию вектора $\vec{p}=(2;-1;2)$ на ось, образующую равные острые углы с координатными осями.

8.22. Найдите скалярное произведение векторов $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$ и $\left(5\vec{a}-6\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

8.23. Найдите единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(3;-1;-1)$ и $\vec{b}=(0;2;1)$.

8.24. Упростить выражение $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

8.25. Лежат ли точки $A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1), D(-5;-5;3)$ в одной плоскости?

8.26. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)$ и $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}|=6$, $\left|\vec{b}\right|=5$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

8.27. При каких значениях α и β векторы $2\vec{i}-\alpha\vec{j}+4\vec{k}$ и $\beta\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ коллинеарны?

8.28. При каком значении k точки $A(1;k;3), B(-1;3;4), C(1;2;1), D(k;2;5)$ лежат в одной плоскости?

8.29. Найдите вектор $\vec{d}$, если известно, что он ортогонален векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, а его скалярное произведение на вектор $p=-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ равно 3.

8.30. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Вопросы для самопроверки

1. Как задается алгебраический вектор? Геометрический вектор?
2. Что означают числа, которые являются координатами геометрического вектора?
3. Как следует направить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы длина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ была наибольшей? Наименьшей?
4. При каком условии для ненулевых векторов верно $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$? А $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?
5. Условие коллинеарности двух векторов? Условие перпендикулярности двух векторов? Условие компланарности трех векторов?
6. Какова длина отрезка MN, если $\overrightarrow{MN}^2=16$?
7. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha=45^{\circ}$, $\beta=60^{\circ}$ и $\gamma=120^{\circ}$?
8. Можно ли говорить о скалярном произведении трех векторов? О скалярном кубе вектора?
9. Чему равно векторное произведение противоположных векторов?
10. Существуют ли такие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$?
11. Чему равно $\vec{j}\times\vec{i}$?
12. Чему равно произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{a}$?

Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости

Задание 9. *В этом задании даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется написать уравнения:*

9.1 *стороны BC;*

9.2 *высоты, опущенной из вершины A на сторону BC;*

9.3 *медианы, проведенной из вершины C.*

Дано. $A(-1;-5)$, $B(3;-1)$ *и* $C(1;-2)$.

Решение.

1. Уравнение стороны BC напишем, используя уравнение прямой, проходящей через две точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

В нашем случае получим $\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y+1}{-2+1}$ или $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}$. Выполнив преобразования, окончательно имеем $x-2y-5=0$.

Ответ. $BC: x-2y-5=0$.

2. Для высоты AH будем использовать уравнение прямой с нормальным вектором $\vec{n}=(A,B)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Поскольку высота AH перпендикулярна стороне BC, в качестве нормального вектора $\vec{n}$ возьмем вектор $\overrightarrow{BC}=(-2;-1)$. Так как точка $A(-1;-5)$ лежит на высоте AH, то уравнение высоты будет иметь вид $-2(x+1)-1(y+5)=0$ или после преобразований $2x+y+7=0$.

Ответ. $AH: 2x+y+7=0$.

3. Для медианы CM будем использовать каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ с направляющим вектором $\vec{S}=(m,n)$. В качестве последнего используем вектор $\overrightarrow{CM}$, где точка M – середина отрезка AB.

Координаты точки M найдем по формулам $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}, y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$. В нашем случае, получим $M\left(\frac{-1+3}{2};\frac{-5-1}{2}\right)=(1;-3)$. Теперь можно вычислить координаты вектора $\overrightarrow{CM}=(0;-1)$. Подставляя его координаты и координаты точки $C(1;-2)$ в каноническое уравнение, получим уравнение медианы CM: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{-1}$. Заметим, что знаменатель какой-либо дроби может являться нулем, это означает лишь символическую запись. Поэтому из пропорции уравнение медианы имеет вид $x=1$.

Ответ. $CM: x=1$.

Задание 10. *В этом задании необходимо привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить пара-*

метры кривой и сделать рисунок

10.1 *с помощью преобразования координат;*

10.2 *с помощью теории квадратичных форм.*

Дано. Уравнение кривой $2x^2+2xy+2y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-5=0$.

Решение.

1. Для приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, выполним поворот и параллельный перенос координатных осей.

Поворот координатных осей выполняется по формулам $\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$.

Подставив выражения для x и y в исходное уравнение, выделим коэффициент при произведении x_1y_1 и приравняем его к нулю:

$$2\left(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha\right)^2 +$$
$$+2\left(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha\right)\left(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha\right)+$$
$$+2\left(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha\right)^2 +$$
$$+\sqrt{2}\left(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha\right)-\sqrt{2}\left(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha\right)-5=0.$$

Коэффициент при произведении x_1y_1 имеет вид $2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=0$. Решая уравнение, получим угол поворота координатных осей $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Подставим эти значения в уравнение и после преобразований получим $3x_1^2+y_1^2-2y_1-5=0$.

Теперь выполним параллельный перенос координатных осей по формулам $\begin{cases} x_1 = X+a \\ y_1 = Y+b \end{cases}$.

Подставим их в уравнение $3\left(X+a\right)^2+\left(Y+b\right)^2-2\left(Y+b\right)-5=0$ и приравняем к нулю коэффициенты при X и Y:

$\begin{cases} 6a=0 \\ 2b-2=0 \end{cases}$, отсюда получаем, что $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$. Таким образом начало координат надо переместить в точку $O'\left(0;1\right)$. Подставляя найденные значения a и b в уравнение кривой, получим $3X^2+Y^2-6=0$. Приведем его к виду $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{6}=1$. Это уравнение эллипса с полуосями $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{6}$, но т.к. $a>b$, то фокусы этого эллипса лежат на оси ординат и имеют координаты $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{6})$.

2. Рассмотрим квадратичную форму $2x^2+2xy+2y^2$. Запишем ее матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Определим собственные числа матрицы (см. Задание 5.1) из характеристического уравнения $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$ или $(2-\lambda)^2-1=0$. Решая уравнение, получим собственные числа $\lambda_1=3$ и $\lambda_2=1$.

Найдем соответствующие единичные собственные векторы (см. Задание 5.2). Для этого решим системы уравнений:

Если $\lambda_1=3$, то $\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=c \\ y=c \end{cases}$. Получим собственный вектор $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$. Модуль этого вектора $|\vec{e}_1|=\sqrt{c^2+c^2}=c\sqrt{2}$. Нормируя, получаем первый единичный собственный вектор $\vec{e}_1^{\,o}=\frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_2=1$, то $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-c \\ y=c \end{cases}$. Получим собственный вектор $\vec{e}_2=\begin{pmatrix} -c \\ c \end{pmatrix}$. Модуль этого вектора $|\vec{e}_2|=\sqrt{c^2+c^2}=c\sqrt{2}$. Нормируя, получаем второй единичный собственный вектор $\vec{e}_2^{\,o}=\frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Перейдем к базису векторов $\vec{e}_1^{\,o}$ и $\vec{e}_2^{\,o}$. Составим матрицу перехода $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Тогда преобразования координат задаются системой $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$. Это преобразование задает в плоскости xOy поворот координатных осей на угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

В базисе $\vec{e}_1^{\,o}$ и $\vec{e}_2^{\,o}$ квадратичная форма $2x^2+2xy+2y^2$ будет иметь вид $\lambda_1\left(x'\right)^2+\lambda_2\left(y'\right)^2=3\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2$. Подставив в линейную часть уравнения заданной кривой выражения для x и y из последней системы, получим:

$$3\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)-5=0,$$

$$3\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2-2y'=5,$$

$$3\left(x'\right)^2+\left(y'-1\right)^2=6 \text{ или } \frac{\left(x'\right)^2}{2}+\frac{\left(y'-1\right)^2}{6}=1.$$

Последнее уравнение является уравнением эллипса с полуосями $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{6}$ и центром симметрии в точке $O'(0;1)$ в системе координат $x'Oy'$, определяемой ортонормированным базисом $\vec{e}_1^{\,o}$ и $\vec{e}_2^{\,o}$.

Ответ. В обоих случаях получили эллипс с полуосями $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{6}$ и центром симметрии в точке $O'(0;1)$.

Построение рисунка.

Строить эллипс будем по следующей схеме: (см. рисунок 1)

а) Зададим произвольную систему координат xOy.

б) Повернем координатные оси против часовой стрелки на угол $\dfrac{\pi}{4}$. Получим новую систему координат $x'Oy'$.

в) В системе координат $x'Oy'$ отметим центр симметрии эллипса $O'(0;1)$ и проведем через него оси симметрии эллипса.

г) Построим эллипс с центром в точке $O'(0;1)$ и полуосями $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{6}$.

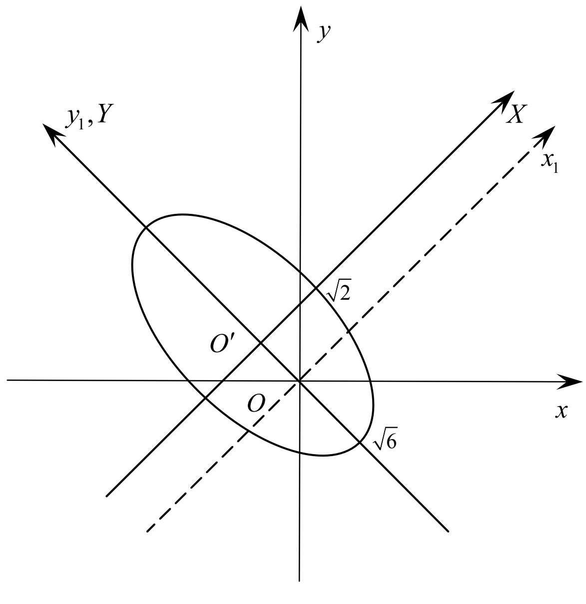


Рисунок 1 – Построение эллипса

Задачи для типовых расчетов

Задание 9.

Написать уравнения:

1. стороны BC;
2. высоты, опущенной из вершины A на сторону BC;
3. медианы, проведенной из вершины C.

9.1	$A(-3;3), B(5;1), C(6;-2)$	9.2	$A(3;2), B(-1;3), C(1;-2)$
9.3	$A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$	9.4	$A(3;4), B(2;1), C(5;2)$
9.5	$A(2;0), B(5;3), C(3;7)$	9.6	$A(5;4), B(4;1), C(7;2)$
9.7	$A(-3;3), B(5;1), C(6;-2)$	9.8	$A(2;2), B(1;-1), C(4;0)$
9.9	$A(2;1), B(-1;-1), C(3;2)$	9.10	$A(2;1), B(1;-2), C(4;-1)$
9.11	$A(0;1), B(-2;2), C(3;-2)$	9.12	$A(2;7), B(1;4), C(4;5)$
9.13	$A(-2;-1), B(1;1), C(4;0)$	9.14	$A(2;0), B(1;-3), C(4;-2)$
9.15	$A(3;-1), B(-3;1), C(1;4)$	9.16	$A(2;6), B(1;3), C(4;4)$
9.17	$A(4;-2), B(1;6), C(-3;1)$	9.18	$A(-1;0), B(1;5), C(4;-3)$
9.19	$A(4;2), B(-1;3), C(1;-2)$	9.20	$A(2;5), B(1;2), C(4;3)$
9.21	$A(0;4), B(-3;-2), C(0;1)$	9.22	$A(-3;-2), B(2;2), C(4;-1)$
9.23	$A(2;0), B(-2;1), C(1;-1)$	9.24	$A(-2;2), B(1;-1), C(4;1)$
9.25	$A(-1;1), B(1;-2), C(3;1)$	9.26	$A(2;7), B(-3;-3), C(3;-1)$
9.27	$A(1;1), B(-2;-3), C(2;0)$	9.28	$A(1;-4), B(3;2), C(-3;1)$
9.29	$A(2;4), B(1;1), C(4;2)$	9.30	$A(2;5), B(1;2), C(4;3)$

Задание 10.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду

1. с помощью преобразования координат;
2. с помощью теории квадратичных форм.

10.1 $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+7=0$

10.2 $5x^2-6xy+5y^2-24x-32=0$

10.3 $7x^2+60xy+32y^2-14x+60y+7=0$

10.4 $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$

10.5 $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$

10.6 $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$

10.7 $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

10.8 $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$

10.9 $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$

10.10 $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$

10.11	$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$
10.12	$5x^2+12xy-22x-12y-19=0$
10.13	$14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$
10.14	$3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$
10.15	$4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$
10.16	$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$
10.17	$9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$
10.18	$4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$
10.19	$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$
10.20	$8x^2+6xy-26x-12y+11=0$
10.21	$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$
10.22	$2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$
10.23	$x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$
10.24	$x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$
10.25	$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$
10.26	$5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$
10.27	$2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$
10.28	$12xy+5y^2-12x-22y-19=0$
10.29	$5x^2+24xy-5y^2=0$
10.30	$41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется уравнением линии на плоскости? Приведите примеры уравнений линий.
2. Что такое порядок алгебраической линии?
3. Что называется угловым коэффициентом прямой линии на плоскости? определен ли угловой коэффициент прямой, параллельной оси Oy?
4. Что называется нормальным вектором прямой на плоскости? Как по общему уравнению прямой на плоскости определить один из ее нормальных векторов?
5. Как определить острый угол между прямыми, заданными общими уравнениями?
6. Каково взаимное положение двух прямых с угловыми коэффициентами $-2,5$ и $0,4$?
7. Что такое полуоси эллипса?
8. Что называется эксцентриситетом эллипса? Что характеризует эксцентриситет эллипса, и в каких пределах находится его значение?
9. Сколько осей симметрии имеет эллипс?
10. Чему равен эксцентриситет эллипса, у которого малая ось равна расстоянию между фокусами?

11. Какая кривая называется гиперболой?
12. Сколько осей симметрии имеет гипербола?
13. Что называется эксцентриситетом гиперболы? Что характеризует эксцентриситет гиперболы, и в каких пределах находится его значение?
14. Что такое асимптоты гиперболы? Сколько асимптот имеет гипербола?
15. Чему равен угол между асимптотами гиперболы $y^2 = 100 + x^2$?
16. Что называется параметром параболы? Можно ли, зная параметр параболы, найти расстояние от ее фокуса до вершины?
17. Сколько осей симметрии имеет парабола?
18. Чему равна длина хорды, проходящей через фокус параболы $x^2 = 8y$ и перпендикулярной к ее оси симметрии?
19. Сколько существует различных видов кривых второго порядка?

Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве

Задание 11. *Дано общее уравнение прямой (пересечение двух плоскостей). Составить:*

11.1 *каноническое уравнение этой прямой;*

11.2 *параметрическое уравнение этой прямой.*

Дано. $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Решение.

Можем воспользоваться одним из трех способов:

1. *Первый способ.* Каноническое уравнение прямой имеет вид $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, где $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ – какая-либо точка, принадлежащая прямой, а $\vec{S} = \left(m, n, p\right)$ – направляющий вектор.

Выберем точку на прямой. Ее координаты должны удовлетворять системе уравнений $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$. Эта система неопределенная, поскольку ранг ее матрицы равен двум, а число неизвестных – трем. Найдем частное решение системы при $z = 0$. Получим $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$. Решая ее, найдем одну из бесконечного числа точек $M_0\left(1; -\tfrac{3}{2}; 0\right)$.

Построим направляющий вектор прямой. Заметим, что общее уравнение прямой представляет собой пересечение двух плоскостей. Первая плоскость $x + 2y - 3z + 2 = 0$ имеет нормальный вектор $\vec{n}_1 = \left(1; 2; -3\right)$, а вторая плоскость $2x-2y+z-5=0$ – вектор $\vec{n}_2=(2;-2;1)$.

Направляющий вектор $\vec{S}$ перпендикулярен $\vec{n}_1$, поскольку прямая принадлежит первой плоскости и $\vec{S}$ перпендикулярен $\vec{n}_2$, так как прямая принадлежит второй плоскости. Поэтому

$$\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=-4\vec{i}-7\vec{j}-6\vec{k}.$$

Запишем каноническое уравнение прямой $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-7}=\frac{z}{-6}$ или $\frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}$.

Второй способ. Сложим два уравнения системы и получим $3x-2z-3=0$. Выразим из этого равенства $z=\frac{3(x-1)}{2}$. Теперь первое уравнение системы умножим на -2 и сложим со вторым уравнением, получим $-6y+7z-9=0$. И снова выразим $z=\frac{6\left(y+\frac{3}{2}\right)}{7}$.

Первое и второе выражения для z приравняем $\frac{3(x-1)}{2}=\frac{6\left(y+\frac{3}{2}\right)}{7}=z$. Делим равенства на 6 и получаем $\frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}$ то же каноническое уравнение прямой.

Третий способ. Найдем две точки на заданной прямой: $M_0\left(1;-\frac{3}{2};0\right)$, она найдена выше и, например, при $x=0$ $M_1\left(0;-\frac{13}{4};-\frac{3}{2}\right)$. Тогда направляющий вектор $\vec{S}=\overrightarrow{M_0M_1}\left(-1;-\frac{7}{4};-\frac{3}{2}\right)$. Искомая прямая $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-\frac{7}{4}}=\frac{z}{-\frac{3}{2}}$, что эквивалентно $\frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}$.

Ответ. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}$.

2. Параметрическое уравнение прямой легко получить, имея каноническое уравнение $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, т.к. оно эквивалентно

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}. \text{ В нашем случае } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 6t \end{cases}.$$

Ответ. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -\frac{3}{2} + 7t \\ z = 6t \end{cases}.$

Задание 12. *В этом задании даны уравнения прямой и плоскости. Надо найти точку их пересечения.*

Дано. Прямая $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ и плоскость $x + 3y + 5z - 42 = 0$.

Решение.

Координаты точки пересечения прямой и плоскости должны удовлетворять объединенным в систему уравнениям прямой и плоскости.

Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$\dfrac{x-2}{2} = t \Rightarrow x = 2t + 2$,

$\dfrac{y-2}{-1} = t \Rightarrow y = -t + 2$,

$\dfrac{z-4}{3} = t \Rightarrow z = 3t + 4$.

Тогда будем иметь систему четырех уравнений с четырьмя (x, y, z, t) неизвестными.

Подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости

$2t + 2 + 3(-t + 2) + 5(3t + 4) - 42 = 0$.

После преобразований получим $14t - 14 = 0$, $t = 1$. Это значение параметра подставляем в параметрическое уравнение прямой:

$x = 2 \cdot 1 + 2 = 4$, $y = -1 + 2 = 1$, $z = 3 \cdot 1 + 4 = 7$.

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости $(4;1;7)$.

Ответ. Точка $(4;1;7)$.

Задание 13. *В этом задании необходимо решить задачу по теме «Прямая и плоскость в пространстве».*

Пример 1. Выяснить взаимное положение прямых $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t+2, \\ z=-2t-3 \end{cases}$, и написать уравнение плоскости, содержащей эти прямые, если такая существует.

Решение.

Выпишем направляющие векторы данных прямых $\vec{S}_1=(3;2;-2)$ и $\vec{S}_2=(3;2;-2)$. Поскольку направляющие векторы совпадают, прямые параллельные. Как известно, через две параллельные прямые проходит единственная плоскость. Составим ее уравнение. Для этого нам нужна точка, лежащая в этой плоскости – можно взять одну из точек, принадлежащих прямым $M_1(2;-1;3)$, $M_2(1;2;-3)$, и вектор, перпендикулярный плоскости $\vec{n}$ (нормаль).

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;3;-6)$ лежит в плоскости, значит перпендикулярен вектору $\vec{n}$, вектор $\vec{S}=(3;2;-2)$ лежит в плоскости, поэтому тоже перпендикулярен $\vec{n}$. На основании определения векторного произведения, можем считать, что $\vec{n}=\vec{S}\times\overrightarrow{M_1M_2}$. Вычисляем

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}+20\vec{j}+11\vec{k}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B;C)$, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Подставим в него найденные значения $-6(x-2)+20(y+1)+11(z-3)=0$, после преобразований получим $-6x+20y+11z-1=0$.

Ответ. Прямые параллельны и лежат в плоскости $-6x+20y+11z-1=0$.

Пример 2. Установить взаимное расположение прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$ и плоскости $3x+y-4z-15=0$.

Решение.

Направляющий вектор прямой $\vec{S}(3;-1;2)$ и нормаль к плоскости

$\vec{n}(3;1;-4)$ не пропорциональны, поэтому прямая и плоскость не перпендикулярны.

Вычислим значение выражения $Am+Bn+Cp$:

$Am+Bn+Cp=3\cdot 3+1\cdot(-1)+(-4)\cdot 2=0$, значит, прямая параллельна плоскости или лежит в ней.

Проверим, принадлежит ли плоскости точка $M(-1;2;-4)$, лежащая на прямой. $Ax_0+By_0+Cz_0+D=3\cdot(-1)+1\cdot 2-4\cdot(-4)-15=0$. Координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости, поэтому прямая лежит в плоскости.

Ответ. Прямая лежит в плоскости.

Задачи для типовых расчетов

Задание 11.

Прямая задана общим уравнением. Написать ее каноническое и параметрическое уравнение.

11.1 $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ 11.2 $\begin{cases} x-4y+3z-4=0 \\ 2x+4y-5z+1=0 \end{cases}$ 11.3 $\begin{cases} 3x-y-5=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$

11.4 $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y-3z+1=0 \end{cases}$ 11.5 $\begin{cases} -x-y+3z-5=0 \\ 3x+2y-5z+3=0 \end{cases}$ 11.6 $\begin{cases} x+y-35=0 \\ x+2y-2z-7=0 \end{cases}$

11.7 $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ x+2y-2z-4=0 \end{cases}$ 11.8 $\begin{cases} 4x+y+z-10=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ 11.9 $\begin{cases} 2x+2y+z-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$

11.10 $\begin{cases} 3x-y+z-4=0 \\ -2x+2y-5z=0 \end{cases}$ 11.11 $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+4y-z+10=0 \end{cases}$ 11.12 $\begin{cases} 2x+2y+z+9=0 \\ x-y+3z-1=0 \end{cases}$

11.13 $\begin{cases} 3x-y+4z-6=0 \\ x+y-5z-4=0 \end{cases}$ 11.14 $\begin{cases} 6x-3y+z-3=0 \\ x+y+5z-5=0 \end{cases}$ 11.15 $\begin{cases} x-3y-2z-8=0 \\ x+y-z+3=0 \end{cases}$

11.16 $\begin{cases} -x-2y+2z-2=0 \\ x+5y+3z-1=0 \end{cases}$ 11.17 $\begin{cases} 2x+y+2z+4=0 \\ -x-3y-z+3=0 \end{cases}$ 11.18 $\begin{cases} 6x+3y-2z=0 \\ x+2y+6z-12=0 \end{cases}$

11.19 $\begin{cases} 2x-y+z-2=0 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases}$ 11.20 $\begin{cases} -2x-y+z-1=0 \\ x+4y+z+3=0 \end{cases}$ 11.21 $\begin{cases} 3x+2y-3z-1=0 \\ x+y+z-7=0 \end{cases}$

11.22 $\begin{cases} 4x-2y+3z+4=0 \\ x+2y-5z+6=0 \end{cases}$ 11.23 $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y+z+4=0 \end{cases}$ 11.24 $\begin{cases} 3x-2y+2z-2=0 \\ 5x+2y-2z+4=0 \end{cases}$

11.25 $\begin{cases} x-4y+z+4=0 \\ 2x+3y+4z+7=0 \end{cases}$ 11.26 $\begin{cases} x+4y-z+1=0 \\ 2x+y+4z-3=0 \end{cases}$ 11.27 $\begin{cases} 5x-y+z-1=0 \\ 5x+2y-z+5=0 \end{cases}$

11.28 $\begin{cases} 5x-3y+z-1=0 \\ x+3y-2z-5=0 \end{cases}$ 11.29 $\begin{cases} 5x+3y+z-18=0 \\ 2y+z-9=0 \end{cases}$ 11.30 $\begin{cases} 3x+2y-z+5=0 \\ x+y+5z-1=0 \end{cases}$

Задание 12.

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

12.1	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ $x+3y+5z-42=0$	12.2	$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$ $2x-y+4z=0$	12.3	$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-6}{-3}$ $5x+3y+2z-28=0$
12.4	$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{2}$ $7x+y+4z-47=0$	12.5	$\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+4}{-3}$ $17x-4y-z+6=0$	12.6	$\frac{x}{-4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-7}{3}$ $x+2y+2z-6=0$
12.7	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{3}$ $x-2y+z-8=0$	12.8	$\frac{x-7}{5}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+4}{3}$ $3x-9y+z+1=0$	12.9	$\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-8}{-2}$ $x+3y+5z-32=0$
12.10	$\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{2}$ $3x+y-z+13=0$	12.11	$\frac{x-4}{4}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{4}$ $2x+2y-z+7=0$	12.12	$\frac{x-5}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-7}{3}$ $2x+5y+6z+24=0$
12.13	$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{0}$ $2x-2y+3z+21=0$	12.14	$\frac{x-5}{0}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{3}$ $2x+y+3z-20=0$	12.15	$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+4}{-3}$ $4x+5y+6z+4=0$
12.16	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-3}$ $3x-y-z-3=0$	12.17	$\frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{-3}$ $x+y+z-7=0$	12.18	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-7}{7}=\frac{z-4}{7}$ $-6x+3y+35z=0$
12.19	$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-4}$ $x+y+z-10=0$	12.20	$\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-6}{-2}$ $x+y+13z-26=0$	12.21	$\frac{x-2}{5}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{5}$ $x+4y+z-2=0$
12.22	$\frac{x+1}{-4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{5}$ $2x+3y-2z-11=0$	12.23	$\frac{x+3}{7}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{2}$ $2x+11y-2z+1=0$	12.24	$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{0}$ $5x+4y+5z-4=0$
12.25	$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-6}{-3}$ $7x+2y+2z+2=0$	12.26	$\frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+1}{2}$ $2x+3y+2z+11=0$	12.27	$\frac{x}{6}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z}{-4}$ $2x+3y+2z+23=0$
12.28	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ $5x+3y+4z+23=0$	12.29	$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-3}{7}$ $2x+2y+z-26=0$	12.30	$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-6}{-3}$ $5x+3y+2z-28=0$

Задание 13.

Решить задачу:

13.1. Составить уравнения проекции прямой $\begin{cases} 5x-4y-2z=2 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$ на плоскость $2x-y+z=1$.

13.2. Вычислить расстояние между двумя прямыми: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$ и $\begin{cases} 2x-y=2 \\ y+2z=-2 \end{cases}$, предварительно убедившись в их параллельности.

13.3. Проверить, лежат ли в одной плоскости прямые: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $x=3t+7, y=2t+2, z=-2t+1$. Если "да", то составить уравнение этой плоскости.

13.4. Найти расстояние от точки $\boldsymbol{M}\ (1;2;-2)$ до плоскости, проходящей через две прямые $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+4}{1}$ и $x=2t, y=5+2t, z=-5+t$.

13.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$ и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом 6 ед^3.

13.6. Убедившись, что прямые параллельны, найти расстояние между ними: $x=t+5, y=2t-1, z=3t-2$ и $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x-2y+z=-11 \end{cases}$.

13.7. Принадлежат ли две прямые $\begin{cases} 2x+y-2z=4 \\ x-2y+z=-5 \end{cases}$, $\begin{cases} x=t \\ y=2t+2 \\ z=3t-1 \end{cases}$ одной плоскости? Если "да", то написать уравнение этой плоскости.

13.8. Через две точки $A(2;3;-1)$ и $B(1;1;1)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $2x+4y-3z=3$.

13.9. Найти проекцию точки $M(3;4;-5)$ на прямую $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{8-z}{4}$.

13.10. Проверить, лежат ли прямые $\begin{cases} 8x+y-8z=0 \\ y-4z=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=t-11 \\ y=8t+16 \\ z=2t-19 \end{cases}$ в одной плоскости? Если "да", то составить уравнение этой плоскости.

13.11. Даны вершины треугольника $A(3;6;2)$, $B(-1;3;2)$, $C(9;6;-6)$. Найти канонические уравнения его биссектрисы, проведенной из угла A. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника ABC и содержащей указанную биссектрису.

13.12. Убедившись, что данная плоскость $x+y-3z=10$ параллельна плоскости, проходящей через три точки $A(5;4;3)$, $B(1;2;1)$, $C(3;6;3)$, найти расстояние между ними.

13.13. Составить уравнение проекции прямой $x=-t+4, y=t-3, z=3t-1$ на плоскость $2x+4y-3z=-1$.

13.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x+y-3z=-19 \\ 2y-3z=-26 \end{cases}$ перпендикулярно к плоскости $4x-3y+5z=46$.

13.15. Даны вершины треугольника: $A(3;0;1), B(1;3;-2), C(7;-1;-2)$. Найти параметрическое уравнение медианы, проведенной из вершины A. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC и содержащей указанную медиану.

13.16. Доказать, что данная плоскость $3x-2y+z=8$ параллельна плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{1}$ и точку $M(1;-1;-1)$. Найти расстояние между этими плоскостями.

13.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$ и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом 4 ед^3.

13.18. Найти проекцию точки $M(-2;1;0)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A(1;0;-1)$, ($B\left(3;1;-2\right)$), $C(2;4;-5)$.

13.19. Доказать перпендикулярность прямых: $l_1:\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$, $l_2:\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}$. Написать уравнение плоскости, содержащей l_1 и перпендикулярной к l_2.

13.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;-3;1)$ и отсекающей от координатных осей равные отрезки. Написать канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

13.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

13.22. Найти расстояние от точки $N(-3;4;-5)$ до плоскости, содержащей в себе прямую $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$ и точку $M(1;2;0)$.

13.23. Найти уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{3}$ и $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

13.24. Проверить, являются ли две прямые $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{x-1}{5}$ и $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ скрещивающимися. Если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые.

13.25. Найти проекцию точки $M\left(-3;1;2\right)$ на прямую $\begin{cases} 2x+4y-2z=1 \\ x-3y+z=2. \end{cases}$

13.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x+8y-4z=5 \\ x-8y+3z=5 \end{cases}$ перпендикулярно к плоскости $x+5y-z=1$.

13.27. Составить уравнения проекции прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ на плоскость $x+4y=8$.

13.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=1+t, y=-1+2t, z=2+4t$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

13.29. Найти проекцию точки $M\left(1;2;0\right)$ на прямую $x=2t-1, y=t-4, z=-3t+1$.

13.30. Проверить, будут ли прямые $x=t-1, y=-t+3, z=4t-5$ и $\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ x+y-5z=4 \end{cases}$ скрещивающимися. Если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется нормальным вектором плоскости в пространстве?
2. Будет ли прямым угол между плоскостями $3x+y-z=0$ и $x-y+2z+5=0$?
3. Будут ли параллельны плоскости $3x-2y+z=0$ и $6x-3y+2z+12=0$?
4. Принадлежит ли точка $M_0(1;2;3)$ плоскости $2x-3y+z+1=0$?
5. Чему равно расстояние от начала координат до плоскости $2x-y+2z+9=0$?
6. Найти точки пересечения плоскости $x+2y-3z+6=0$ с осями координат.
7. Какие координаты имеет точка прямой $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$, соответствующая значению параметра $t=-1$? $t=2$?
8. Принадлежит ли точка $M_0(1;3;2)$ прямой $\begin{cases} x=3-t \\ y=1+t \\ z=-4+3t \end{cases}$. Если принадлежит, то чему равно соответствующее значение параметра t?
9. Будет ли вектор $\vec{a}=(2;-1;3)$ параллелен прямой $\begin{cases} x=3-4t \\ y=1+2t \\ z=5-6t \end{cases}$?
10. Параллельна ли прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ плоскости $3x+2y+2z-7=0$?
11. Как определить координаты направляющего вектора прямой, заданной парой плоскостей?
12. Как найти расстояние между параллельными плоскостями?

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф.

И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 8 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом. Область научных интересов профессора Качалова А.П. – современные методы теории дифракции.

Светлана Николаевна Кузнецова
Марина Владимировна Лукина
Екатерина Воиславовна Милованович

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ
для экономических специальностей
I курс (модуль 1–2)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Дизайн М.В.Лукина
Верстка М.В.Лукина
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 21.04.10
Заказ № 2221
Тираж 200
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного вер-
ситета информационных технологий, механики и
оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49