МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

для экономических специальностей

I КУРС (1-2 модуль)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания и задачи для студентов

Санкт-Петербург

2013

Типовые расчеты для студентов экономических специальностей.1 курс (1-2 модуль). С.Н. Кузнецова, М.В. Лукина, Е.В. Милованович. Учебно-методическое пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. 44с.

В пособии приведены типовые расчеты с методическими указаниями по темам «Предел и непрерывность функции», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление», «Функция нескольких переменных»,«Ряды» и «Дифференциальные уравнения».

Пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей, обучающихся в НИУ ИТМО по специальностям 080100.62 –Экономика (Бакалавр экономики), 080200.62 – Менеджмент (Бакалавр техники и технологии).

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 25.06.2013, протокол № 5.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Оглавление

Общие положения

Студенты, обучающиеся по специальностям экономического направления, изучают в первом семестре следующие темы:

1 МОДУЛЬ

1. Пределы и непрерывность функций.
2. Производная и ее применение.

2 МОДУЛЬ

3. Интегралы.
4. Функция нескольких переменных.
5. Ряды.
6. Дифференциальные уравнения.

Данный типовой расчет содержит задачи по этим темам. В нем даются краткие методические указания, задания для самостоятельного выполнения и вопросы для самопроверки.

Требования к оформлению:

1. Типовой расчет выполняется в отдельной тетради.
2. На обложке необходимо указать фамилию, номер группы, номер варианта и дату сдачи типового расчета.
3. Каждое задание выполняется с новой страницы. Задания нумеруются. Условие задачи необходимо переписать.
4. Решение должно содержать все необходимые пояснения и рисунки.

Тема 1. Предел и непрерывность

Задание 1. *Вычислить предел функции:*

1.1 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}$;

1.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$ *или* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$;

1.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin \pi x}$;

1.4 $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$.

Решение.

1.1 Подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x=-2$ приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, т.е. $x=-2$ является корнем

обоих многочленов. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе будем использовать метод группировки
$x^3+2x^2-4x-8=x^2(x+2)-4(x+2)=(x+2)(x^2-4)=(x+2)^2(x-2)$, а в знаменателе формулу суммы кубов $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$. Теперь преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^{\cancel{2}}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-2x+4}.$$

Здесь мы сокращаем дробь на множитель, который обращает и числитель, и знаменатель в ноль. Т.е. мы избавляемся от неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Теперь еще раз подставляем предельное значение аргумента и получаем

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-2x+4}=\lim_{x\to-2}\frac{(-2+2)(-2-2)}{4-2\cdot(-2)+4}=\frac{0}{12}=0.$$ [1]

Ответ. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}=0$.

1.2 В первом примере раскрывается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Переведем иррациональность из числителя в знаменатель. Для этого умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$, и воспользовавшись формулой разности квадратов, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1+x}{\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt[7]{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}.$$

Сократив дробь на $\sqrt[7]{x}$, избавились от неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Подставляем предельное значение аргумента $x=0$ и окончательно имеем:

---

[1] **Замечание 1**. Если при второй подстановке снова получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, процедуру следует повторить.

Замечание 2. Если возникают трудности в разложении многочленов на множители, можно поделить числитель и знаменатель дроби «уголком» на двучлен вида $x-a$, где a – предельное значение аргумента.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}=0$.

Во втором примере имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Для ее раскрытия воспользуемся тем же приемом (перевод иррациональности из числителя в знаменатель).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+5x+4-\cancel{x^2}-x}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}}.$$

После выполненных преобразований получили неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для ее раскрытия можно использовать следующее правило: предел отношения двух многочленов одинаковой степени равен отношению коэффициентов при наивысшей степени. В данном случае числитель и знаменатель первой степени, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{4}{1+1}=2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)=2$.

1.3 В этом задании имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия будем использовать эквивалентные бесконечно малые (Приложение 1). Сначала выполним замену переменной $y=x-3$, тогда $x=y+3$. Очевидно, что если $x\to 3$, то $y\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+3+2)-\ln(2(y+3)-1)}{\sin\pi(y+3)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+5)-\ln(2y+5)}{\sin(\pi y+3\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\dfrac{y+5}{2y+5}}{\sin(\pi y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{-y}{2y+5}\right)}{-\sin\pi y}.$$

При этих преобразованиях были использованы свойства логарифмической и тригонометрической функций.

Заменяем бесконечно малые на эквивалентные. При $y\to 0$ $\ln\left(1+\dfrac{-y}{2y+5}\right)\sim\dfrac{-y}{2y+5}$, а $\sin\pi y\sim\pi y$, поэтому окончательно получим

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{-y}{2y+5}\right)}{-\sin\pi y}=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{-y}{2y+5}}{-\pi y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\cancel{y}}{-\pi\cancel{y}(2y+5)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi(2y+5)}=\frac{1}{5\pi}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2x-1)}{\sin\pi x}=\dfrac{1}{5\pi}.$

1.4 Подставляя в данное выражение предельное значение аргумента $x=2\pi$ получим неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Предварительно, как и в предыдущем примере, выполним замену переменной

$$\lim_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}=\left[y=x-2\pi,\ x=y+2\pi\right]=\lim_{y\to 0}\left(\cos(y+2\pi)\right)^{\frac{\operatorname{ctg}2(y+2\pi)}{\sin 3(y+2\pi)}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{\operatorname{ctg}2y}{\sin 3y}}=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}.$$

Теперь в пределе приведем основание степени к виду $1+\alpha$, а в показателе выделим множитель $\frac{1}{\alpha}$.

$$\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}=\lim_{y\to 0}\left(\left(1+(\cos y-1)\right)^{\frac{1}{\cos y-1}}\right)^{(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}.$$

По второму замечательному пределу выражение, стоящее в основании степени равно e, поэтому

$$\lim_{y\to 0}\left(\left(1+(\cos y-1)\right)^{\frac{1}{\cos y-1}}\right)^{(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}}.$$

При вычислении предела в показателе степени будем использовать эквивалентные бесконечно малые.

$$\lim_{y\to 0}(\cos y-1)\cdot\frac{1}{\sin 3y\cdot\operatorname{tg}2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\dfrac{y^2}{2}}{3y\cdot 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\cancel{y^2}}{12\cancel{y^2}}=-\frac{1}{12}.$$

Тогда окончательно имеем $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}=e^{-\frac{1}{12}}$.

Ответ. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}=e^{-\frac{1}{12}}$.

Задание 2. *Исследовать функцию на непрерывность. Установить тип точек разрыва и изобразить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва:*

$$f\left(x\right)=\frac{\left|x+2\right|}{x+2}+x.$$

Решение.

Функция $f\left(x\right)$ является непрерывной в точке x_0 если,

- $f\left(x\right)$ определена в некоторой окрестности этой точки;
- существуют конечные односторонние пределы $a=\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)$ и $b=\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)$;
- эти пределы равны значению функции в точке x_0: $a=b=f\left(x_0\right)$.

Воспользуемся этим критерием для исследования функций на непрерывность, сформулировав предварительно определения типов разрыва:

- Если в точке x_0 функция не существует, а $a=b$, то точка x_0 называется точкой <u>устранимого разрыва первого рода</u>.
- Если в точке x_0 функция не существует и $a\neq b$, то точка x_0 называется точкой <u>неустранимого разрыва первого рода</u>.
- Точка разрыва, называется точкой <u>разрыва второго рода</u>, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности

Будем исследовать функцию в точке $x=-2$, в которой функция не существует. Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x\to -2-0}f\left(x\right)=\lim_{x\to -2-0}\frac{\left|x+2\right|}{x+2}+x=\lim_{x\to -2-0}\frac{-\cancel{\left(x+2\right)}}{\cancel{x+2}}+x=-1-2=-3 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to -2+0}f\left(x\right)=\lim_{x\to -2+0}\frac{\left|x+2\right|}{x+2}+x=\lim_{x\to -2+0}\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}}+x=1-2=-1.$$

Здесь мы использовали определение модуля.

Поскольку $\lim\limits_{x\to -2-0}f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to -2+0}f\left(x\right)$, то в точке $x=-2$ разрыв первого рода (неустранимый). (Рисунок 1)

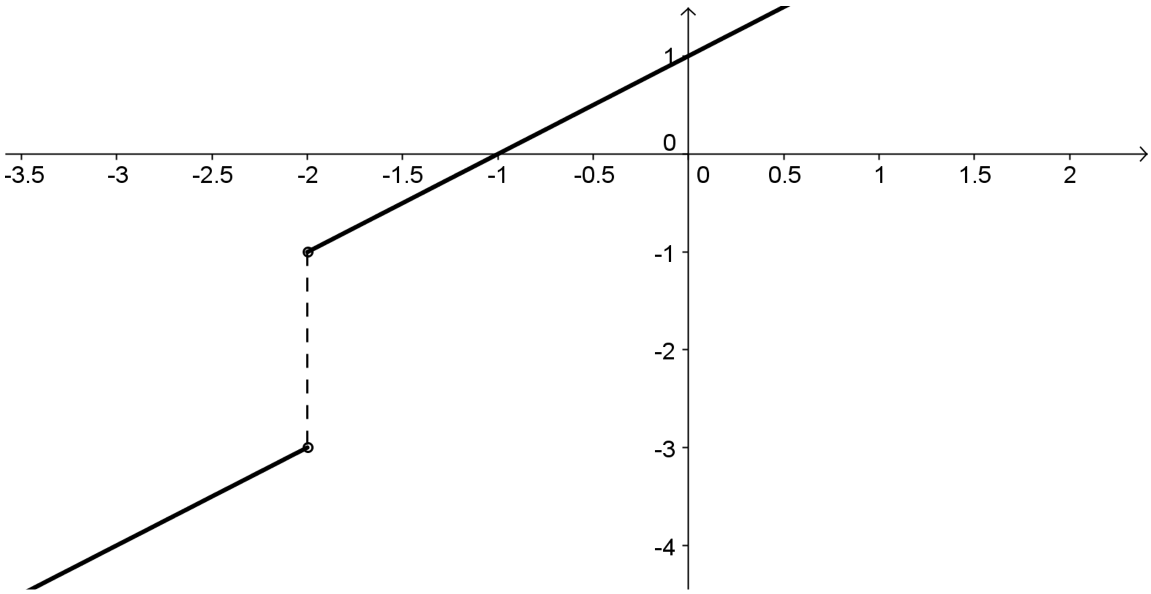


Рисунок 1

Ответ. В точке $x=-2$ разрыв первого рода.

Задачи для типовых расчетов

Задание 1. *Вычислить предел функции:*

1.1 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 3x}-1}{1-\cos 8x}$

1.2 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 2x}}$

1.3 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3-3x-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

1.4 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

1.5 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$

$\lim\limits_{x\to1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$

1.16 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^3+2x^2-4x-8}$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln\left(x^2-2x+1\right)}$

1.17 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+3}\right)$

1.18 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x+1}{x^2-x-2}$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\operatorname{tg}\left(x+1\right)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e^2}$

1.19 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}$

$\lim\limits_{x\to2\pi}\left(4-\dfrac{3}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$

1.20 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-4x^2}{5x^3+8x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+\pi x^3\right)}}$

1.6 $$\lim_{x\to -3}\frac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2-9}$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

1.7 $$\lim_{x\to \pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$
$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+9}\right)$$

1.8 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x-1}{2x^2-x-1}$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$$

1.9 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$$

1.10 $$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sin\left(x^2-1\right)}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

1.11 $$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2}{\sin\ln(x-1)}$$
$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$$

1.12 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$$
$$\lim_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$$

1.13 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4\operatorname{tg} x}-e^{-2\sin x}}{2\operatorname{arctg} x-\sin x}$$

1.14 $$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$$

1.15 $$\lim_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$$

1.21 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}$$
$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin\frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$$

1.22 $$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-5x-6}{3x^3-7x^2+2x}$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\ln\left(4x-1\right)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$$

1.23 $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$$
$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{\left(x+3\right)\left(x-2\right)}-x\right)$$

1.24 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-3x-2}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin\frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$$

1.25 $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x}$$
$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$$

1.26 $$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+2x}{4x^2-5x-6}$$
$$\lim_{x\to 2\pi}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

1.27 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{e^{\operatorname{tg} 2x}-e^{\sin 2x}}$$

1.28 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$
$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{25-2x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$$

1.29 $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$$
$$\lim_{x\to 2\pi}\left(\cos x\right)^{\frac{\operatorname{ctg} 3x}{\sin 5x}}$$

1.30 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2-3x}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3^{x^2-9}-1}{\operatorname{tg}\ln\frac{x}{3}}$$

Задание 2. *Исследовать функцию на непрерывность. Установить тип точки разрыва и изобразить эскиз графика функции в окрестности точки разрыва:*

2.1 $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$

2.2 $f(x)=x+2\dfrac{|x-2|}{x-2}$

2.3 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

2.4 $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$

2.5 $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

2.6 $f(x)=\dfrac{1}{5+2^{\frac{1}{x}}}$

2.7 $f(x)=\dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$

2.8 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$

2.9 $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$

2.10 $f(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}$

2.11 $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$

2.12 $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$

2.13 $f(x)=\dfrac{e^{4x}-1}{x}$

2.14 $f(x)=2^{x-\frac{1}{x}}$

2.15 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+3}$

2.16 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

2.17 $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$

2.18 $f(x)=\dfrac{2x}{\sin x}$

2.19 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

2.20 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

2.21 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}$

2.22 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(x-1)}{|x-1|}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$

2.23 $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{|x|}$

2.24 $f(x)=\dfrac{1}{1+6^{\frac{1}{x}}}$

2.25 $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$

2.26 $f(x)=\dfrac{1}{2+3^{-\frac{1}{x}}}$

2.27 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$

2.28 $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$

2.29 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

2.30 $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

Вопросы для самопроверки

1. Пусть для всех x выполняется неравенство $f(x) \geq 5{,}001$. Может ли в этом случае быть $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$?
2. Что такое число e?
3. Показать на примерах, что частное двух бесконечно малых функций при $x \to x_0$ может не быть бесконечно малой функцией.
4. Показать на примерах, что сумма бесконечно больших функций при $x \to x_0$ может быть даже бесконечно малой при $x \to x_0$.
5. На чем основано сравнение бесконечно малых?
6. Являются ли эквивалентные бесконечно малые бесконечно малыми одного порядка?
7. Пусть α и β – две бесконечно малые разных порядков. Какая их них быстрее стремится к нулю – та, что более высокого порядка, или та, что более низкого порядка?
8. Любые ли две бесконечно малые величины сравнимы между собой?

Тема 2. Производная и ее применение

Задание 3. *Вычислить производную:*

$$y = \ln\left(\sqrt{x} - 2^{\mathrm{ctg}^3 x}\right) - 3^{\sqrt{1-\sin x}} \cdot x;$$

Решение.

Для вычисления производной будем использовать правила вычисления производной суммы, произведения и сложной функции (Приложение 2).

Первое слагаемое представляет собой сложную функцию. Дифференцируя внешнюю функцию (натуральный логарифм), нельзя менять ее сложный аргумент. Эту производную необходимо умножить на производную от аргумента, который в свою очередь представляет собой разность элементарной и сложной функций. Ее производную вычисляем тем же способом.

Второе слагаемое является произведением двух функций, первая из которых сложная. Сначала вычисляем производную первого сомножителя (по правилу нахождения производной сложной функции) и умножаем ее на второй сомножитель, а затем производную второго сомножителя умножаем на первый сомножитель.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x} - 2^{\mathrm{ctg}^3 x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2^{\mathrm{ctg}^3 x} \cdot \ln 2 \cdot 3\mathrm{ctg}^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right) -$$

$$-3^{\sqrt{1-\sin x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}} \cdot (-\cos x) \cdot x - 3^{\sqrt{1-\sin x}}.$$

Задание 4. *Провести полное исследование функции* $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$ *и построить ее график.*

Решение.

Исследование функции будем вести по следующему плану:

1. Область определения функции.

Поскольку в знаменателе дроби стоит выражение $x-3$, то $D(y): x\neq 3$

.

2. Четность, нечетность функции. Периодичность.

Область определения функции несимметричный относительно нуля интервал, поэтому функция не может быть ни четной, ни нечетной. Т.о. имеем функцию общего вида.(2)

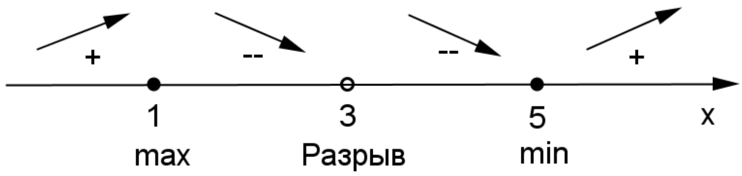
Периодичность функции устанавливают проверкой условия $y(x+T)=y(x)$. Как правило, это необходимо делать в случае тригонометрических функций. В нашем случае функция непериодическая.

3. Исследование с помощью первой производной (монотонность и экстремумы).

Вычислим первую производную функции

$$y'=\frac{(2x-6)(x-3)-\left(x^2-6x+13\right)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}.$$

Критическими точками функции являются стационарные точки (производная равна нулю) $x_1=1$, $x_2=5$ и точка разрыва $x_3=3$. Отметим их на числовой оси и определим знак производной на каждом из полученных интервалов.



При переходе через точку $x=3$ знак производной не меняется, поскольку корень знаменателя дроби имеет кратность равную двум.

Из рисунка видно, что на интервалах $(-\infty;1)$ и $(5;+\infty)$ функция возрастает, а на $(1;3)$ и $(3;5)$ – убывает. В точке $x=1$ максимум функции равный $y_{\max}=y(1)=-4$, а в точке $x=5$ – минимум, равный $y_{\min}=y(5)=4$.

4. Исследование функции с помощью второй производной (выпуклость, вогнутость, точки перегиба).

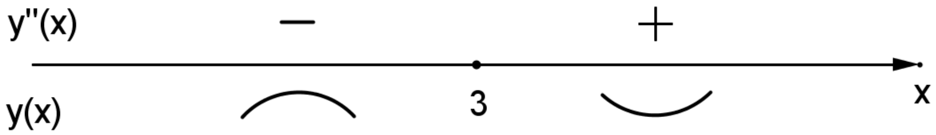
Вычислим вторую производную функции

---

(2) **Замечание.** В случае симметричной ООФ проверяем выполнение одного из условий $y(-x)=y(x)$ (четная) или $y(-x)=-y(x)$ (нечетная).

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2\left(x^2-6x+5\right)(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

На числовой прямой отметим точки, в которых эта производная равна нулю или не существует, определим знаки второй производной и соответствующие свойства функции.



Т.о., на интервале $(-\infty;3)$ функция выпукла вверх, на $(3;+\infty)$ – выпукла вниз. Точка $x=3$ не является точкой перегиба, поскольку в этой точке функция не существует.

5. Асимптоты графика функции

а) Вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции. Вычислим пределы $\lim\limits_{x\to 3-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 3-0} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \infty$. Значит $x=3$ вертикальная асимптота.

б) Наклонная асимптота вида $y=kx+b$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(y(x)-kx\right) = b$.

Вычислим пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+13}{(x-3)x} = 1 = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+13}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+13}{x-3} = -3 = b,$$

тогда прямая $y=x-3$ является наклонной асимптотой.(3)

6. Точки пересечения с осями координат.

Пересечение с осью Oy найдем, если подставим в функцию $x=0$, тогда $y = y(0) = -\frac{13}{3}$.

Пересечение с осью Ox найдем, решив уравнение $y=0$, т.е. $\frac{x^2-6x+13}{x-3} = 0$. В нашем случае уравнение корней не имеет.

7. Рисунок. Отметим на координатной плоскости все найденные точки, проведем асимптоты и построим эскиз графика (Рисунок 2).

---

(3) **Замечание 1.** В случае если $k=0$, имеем горизонтальную асимптоту вида $y=b$.

Замечание 2. Если пределы при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ различны, получим уравнения двух асимптот (при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$).

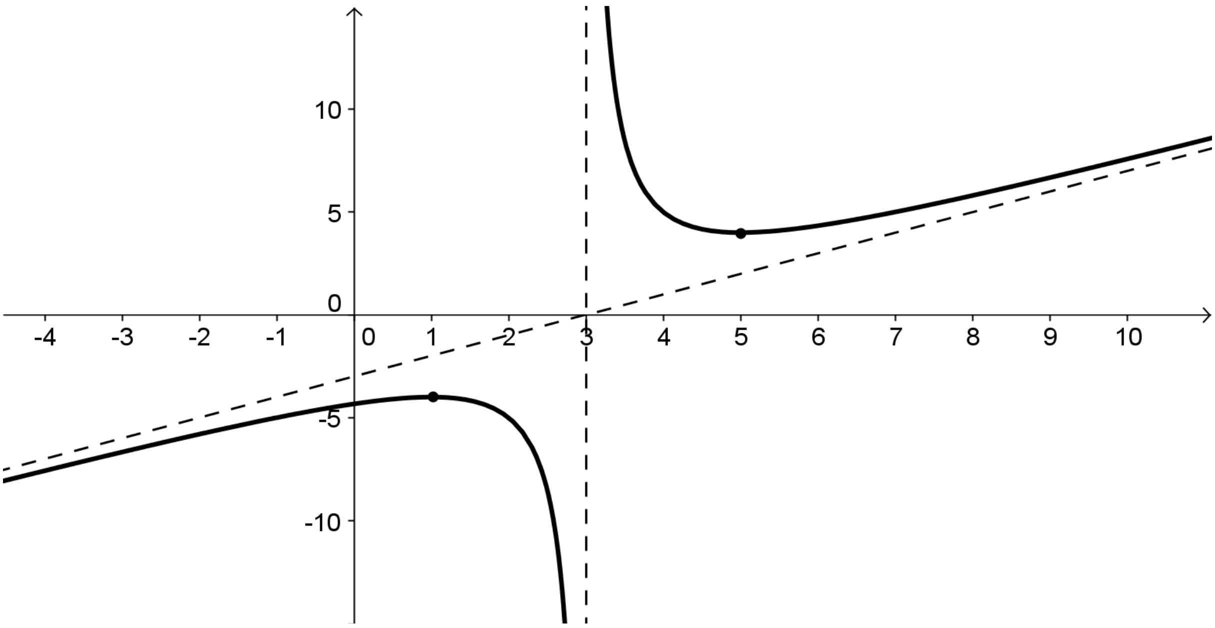


Рисунок 2

Задание 5. *Вычислить предел функции* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$ *по правилу Лопиталя.*

Решение.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 и если выполняется условие $f(x_0)=g(x_0)=0$, причем $f'(x_0)\neq 0$ и $g'(x_0)\neq 0$ одновременно, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Правило Лопиталя можно применять несколько раз.

В нашем случае вычисляем производные числителя и знаменателя дроби по ранее рассмотренным правилам.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{\cos x}=\frac{16}{1}=16.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}=16$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 3. *Вычислить производную:*

3.1 $$y=\sqrt[3]{\frac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}+9^{7x-\ln 8x}$$

3.2 $$y=\frac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}+\cos^3 6x$$

3.3 $$y=\frac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}+\arccos\left(x-\ln 7x\right)^4$$

3.4 $$y=\frac{1}{\left(x+2\right)\sqrt{x^2+4x+5}}+\ln^{-3}\left(3-5x\right)$$

3.5 $$y=\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}-2\,\mathrm{arctg}\, e^{\frac{x}{2}}$$

3.6 $$y=\sqrt{\sin x+\cos x}+\frac{\sqrt{1-x^2}-3x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

3.7 $$y=\sqrt{1-\sqrt{2x}}+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2x-5}}\right)$$

3.8 $$y=\sqrt{1+\mathrm{tg}\,2x}+\arcsin^2\left(\frac{x}{e^{-2x}}\right)$$

3.9 $$y=\sqrt{1+3x}\ln^2\left(1-\cos 4x\right)-\frac{3^{4x}}{\mathrm{arctg}\,3\sqrt{x}}$$

3.10 $$y=-2\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{-6x}}+7}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)+2\,\mathrm{arctg}\,4x$$

3.11 $$y=\frac{3+x}{2}\sqrt{x\left(2-x\right)}+3\arccos\sqrt{\frac{3x}{2}}$$

3.12 $$y=\frac{-7\,\mathrm{arctg}\sqrt{\cos 4x}}{x^2}+\frac{1}{3x\sqrt{x}}$$

3.13 $$y=e^{-\mathrm{tg}\,3x}\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}+\ln^2 x$$

3.14 $$y=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-\ln\frac{1-x^3}{\sqrt{2x+\cos^3 x}}$$

3.15 $$y=-\ln\left(1+e^{3x}\right)+\frac{\sqrt[3]{3x^5-2x}}{x+7}$$

3.16 $$y=\ln\frac{\sqrt{1+e^{6x}+\ln 3x}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[2]{x}+2}+2\,\mathrm{arctg}\left(1-x^4\right)$$

3.17 $$y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}+\arccos\left(2^{-x^2}\right)$$

3.18 $$y=\log_{16}\log_5 \operatorname{tg} x+\frac{18e^{2x}+11}{6(e^x+1)^3}$$

3.19 $$y=\frac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{\sqrt[4]{x+2}}$$

3.20 $$y=e^{\operatorname{ctg}^2 x}\frac{\sqrt{x}}{3}+2\sin^2\left(x+\ln 7x^{-3}\right)$$

3.21 $$y=\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}+e^{-x}}$$

3.22 $$y=\arcsin\sqrt{\frac{7\cos x}{x+1}}+\ln\frac{(x+6)^5}{x+8}$$

3.23 $$y=\sqrt{x}\sin\left(xe^{\cos x}\right)-\frac{\ln(1+3x)}{2-x}$$

3.24 $$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-5^{-x}}-\frac{\arccos x}{2x^2}$$

3.25 $$y=\log_6 \operatorname{arctg}\frac{1}{-x}+\frac{7\operatorname{ctg}3x}{1+e^{\frac{x}{4}}}$$

3.26 $$y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}+\frac{\sqrt[6]{5x^4-x}}{-x+8}$$

3.27 $$y=\frac{\left(x^2-3\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{\cos\frac{\pi}{4}+x}-\cos^2 x$$

3.28 $$y=3\sqrt[7]{\frac{(2x-\ln 1)}{(x+9)^3}}+8^{4x+5}$$

3.29 $$y=\operatorname{arctg}\left(e^{3\cos^2 x}\right)+\frac{(3x-7)^{-8}}{\ln(8-x)}$$

3.30 $$y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-4}\right)+\frac{\operatorname{arcctg}^2 3x}{(5x+2)^3}$$

Задание 4. *Провести полное исследование функции и построить ее график.*

4.1 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+3}$ 4.2 $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ 4.3 $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$

4.4 $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$ 4.5 $y=\dfrac{x^2-6x+4}{3x+2}$ 4.6 $y=\dfrac{4x^2-3x}{4x^2-1}$

4.7 $y=\dfrac{21-x^2}{7x+9}$ 4.8 $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}$ 4.9 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

4.10	$y=\frac{x^3}{x^2-1}$	4.11	$y=\frac{x}{x^2-4}$	4.12	$y=\frac{x^2}{x-2}$
4.13	$y=\frac{x^2}{1-x^2}$	4.14	$y=\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$	4.15	$y=\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2$
4.16	$y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$	4.17	$y=\frac{x}{16-x^2}$	4.18	$y=\frac{3x}{1+x^2}$
4.19	$y=\frac{3x^2}{x^2+9}$	4.20	$y=\frac{x^3+4}{2x^2}$	4.21	$y=\frac{x+1}{x(x+2)}$
4.22	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	4.23	$y=\frac{x^3}{3-x^2}$	4.24	$y=\frac{x^2+4}{x}$
4.25	$y=\frac{x^3}{x^2-4}$	4.26	$y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$	4.27	$y=\frac{x^2}{x-1}$
4.28	$y=\frac{x^2-3}{x+2}$	4.29	$y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$	4.30	$y=\frac{x^2-2x}{x-1}$

Задание 5. *Вычислить предел функции по правилу Лопиталя.*

5.1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$	5.2	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos 3x}$	5.3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x-x}{\ln(1+x)-x}$
5.4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$	5.5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln\left(1-x^2\right)}{x\cos x-\sin x}$	5.6	$\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln\sin 2x}$
5.7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x-1{,}5x^2}{\sin x-x}$	5.8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{\ln\left(1+x^2\right)-x^2}$	5.9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$
5.10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$	5.11	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	5.12	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\ln(1+2x)}$
5.13	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} 3x}{2x^3}$	5.14	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\sin 3x}{x-\sin 5x}$	5.15	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$
5.16	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{x-\operatorname{tg} 4x}$	5.17	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos 4x-1}$	5.18	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cos x}$
5.19	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{x}}{\operatorname{tg} x-x}$	5.20	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^3 x}$	5.21	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$
5.22	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln\left(e^{x}-e^{3}\right)}$	5.23	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}$	5.24	$\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln\left(x^2-x\right)}{\ln\left(3^{x}-3\right)}$
5.25	$\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}$	5.26	$\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{\ln\sin 2\pi x}{\ln \operatorname{tg}\pi x}$	5.27	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$
5.28	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$	5.29	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$	5.30	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x-x}$

Вопросы для самопроверки

1. Пусть для функции $y = f(x)$ производная $f'(3) = \sqrt{3}$. Под каким углом к оси Ox расположена касательная к графику функции при $x = 3$?
2. Будет ли функция, дифференцируемая в точке $x = 2$, непрерывной в этой точке?
3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 5$. Можно ли утверждать, что эта функция имеет производную в указанной точке?
4. Доказать, что производная четной функции – нечетная функция.
5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на X, $x_0 \in X$, $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, а в точке $x = x_0$ производной $f'(x)$ не существует. Имеется ли в точке x_0 экстремум, и если имеется, то какой?
6. Пусть производная функции $y = f(x)$ равна единице на интервале $(-1,3)$. Будет ли функция возрастающей на этом интервале?
7. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b) и в шести точках этого интервала $f'(x) = 0$. Может ли $f(x)$ иметь на (a,b) четыре минимума?
8. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, то будет ли иметь максимум функция $y = \left(f(x)\right)^2$ в этой точке?
9. Может ли функция $y = f(x)$ в некоторой точке $x \in (a,b)$ иметь значение меньшее, чем любой из минимумов этой функции на (a,b)?
10. Может ли наименьшее значение функции $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ находиться в точке $x = b$?
11. Пусть функция $y = f(x)$ имеет на $[a,b]$ локальный максимум и локальный минимум. Может ли ее наибольшее значение не совпадать с локальным максимумом, а наименьшее – с локальным минимумом?
12. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вверх. Куда направлена выпуклость кривой $y = \lambda f(x)$:
    а) при $\lambda > 0$; б) при $\lambda < 0$?
13. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a,b) три точки перегиба: x_1, x_2 и x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$, и пусть $y = f(x)$ является выпуклой кривой на (a,x_1). Выпуклой или вогнутой является эта кривая на (x_3,b)?
14. Пусть $f''(x) = 0$. Можно ли утверждать, что x_0 – точка перегиба?
15. Пусть $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$. Чему равен предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

Тема 3. Интеграл

Задание 6. *Вычислить неопределенный интеграл:*

6.1 $\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx$;

6.2 $\int x^2 \sin 3x dx$.

Решение.

6.1 Интеграл вычисляется с помощью замены переменной. Поскольку подынтегральная функция содержит корни второй, третьей и шестой степени, введем новую переменную (т.к. $\text{НОК}(2,3,6)=6$, $x-2=t^6$, тогда

$$\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx = \left[x=t^6+2, dx=6t^5dt\right] = \int \frac{\left(4t^3-t\right)6t^5}{t^3+2t^2}dt.$$

После преобразований (числитель дроби делим на знаменатель «уголком») выполним табличное интегрирование (Приложение 3)

$$\int \frac{\left(4t^3-t\right)6t^5}{t^3+2t^2}dt = 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}dt = 6\int\left(4t^5-8t^4+15t^3-30t^2+60t-120+\frac{240}{t+2}\right)dt =$$

$$=6\left(\frac{2}{3}t^6-\frac{8}{5}t^5+\frac{15}{4}t^4-10t^3+30t^2-120t+240\ln\left|t+2\right|\right)+C.$$

Теперь необходимо вернуться к старой переменной

$$\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx = 4(x-2)-\frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5}+\frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}-$$

$$-60\sqrt{x-2}+180\sqrt[3]{x-2}-720\sqrt[6]{x-2}+1440\ln\left|\sqrt[6]{x-2}+2\right|+C.$$

6.2 При вычислении этого интеграла будем использовать формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Выполним преобразования и получим

$$\int x^2\sin 3x dx = \left\{\begin{array}{l|l} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\sin 3xdx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right\} = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3x dx.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части снова применяем формулу интегрирования по частям

$$\int x\cos 3x dx = \left\{\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\cos 3xdx & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right\} =$$

$$=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.$$

Полученный результат подставляем в первое равенство:

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

Ответ. $\int \frac{4\sqrt{x-2} - \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}} dx = 4(x-2) - \frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{45}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} -$

$$-60\sqrt{x-2} + 180\sqrt[3]{x-2} - 720\sqrt[6]{x-2} + 1440 \ln\left|\sqrt[6]{x-2} + 2\right| + C,$$

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

Задачи для типовых расчетов

Задание 6. *Вычислить неопределенные интегралы.*

6.1	$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}} dx$	$\int x^2 \cos 2x dx$
6.2	$\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$	$\int x \sin^2 x dx$
6.3	$\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$	$\int x \sin x \cos x dx$
6.4	$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}} dx$	$\int x^2 (\sin 2x - 3) dx$
6.5	$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$	$\int x^2 (\sin x + 1) dx$
6.6	$\int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$	$\int \left(x^2 + x\right) e^{-x} dx$
6.7	$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}} dx$	$\int \left(x^2 + x\right) e^{x} dx$
6.8	$\int \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$	$\int x \,\mathrm{arctg}\, 2x dx$
6.9	$\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}} dx$	$\int \ln(x-5) dx$
6.10	$\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$	$\int x \,\mathrm{ctg}^2 x dx$
6.11	$\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx$	$\int \arcsin 5x dx$

6.12	$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$	$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$
6.13	$\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$	$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$
6.14	$\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}dx$	$\int x\,\mathrm{tg}^2\, xdx$
6.15	$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}dx$	$\int \left(x^2+2\right)e^{-2x}dx$
6.16	$\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$	$\int x^2\sin^2 xdx$
6.17	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$	$\int \mathrm{arcctg}\, 3xdx$
6.18	$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$	$\int \left(x^2+2\right)e^{3x-1}dx$
6.19	$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$	$\int \left(x^3+3\right)\sin xdx$
6.20	$\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$	$\int \left(x^2-3\right)\cos xdx$
6.21	$\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\int \arccos 4xdx$
6.22	$\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$	$\int x^2\sin(2-x)dx$
6.23	$\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\int x^2\cos^2 xdx$
6.24	$\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\int \left(x^2+x\right)\sin xdx$
6.25	$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$	$\int \left(x^2+x\right)\cos xdx$
6.26	$\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx$	$\int x^2e^{3x}dx$
6.27	$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$	$\int \ln(2x+3)dx$
6.28	$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}dx$	$\int x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{5}dx$
6.29	$\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\int \arccos\frac{x}{7}dx$

6.30 $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)\sqrt{x+1}}dx$ $\qquad$ $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

Вопросы для самопроверки

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные функции и $\int f(x)dx = \int g(x)dx$. Верно ли, что $f(x) = g(x)$?
2. При каких a и b функция $F(x) = \frac{a}{3}x^b + 2x^2 + x + 1$ является первообразной для $f(x) = (2x+1)^2$?
3. При каких a, b и c функция $F(x) = 2e^{3x+1}$ является первообразной для $f(x) = ae^{bx+c}$?
4. Известно, что $\int_a^b f(x)dx = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$.
5. Используя геометрический смысл интеграла, вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
6. Зная функцию производительности труда $f(t) = -\frac{t^2}{6} + 3t - 12$, записать объем произведенной продукции на отрезке $[8,11]$.

Тема 4. Функция нескольких переменных

Задание 7. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции* $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ *в области* $0 \le x \le 3,\ 0 \le x + y \le 3$.

Решение.

При нахождении наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных, непрерывной на некотором замкнутом множестве, следует иметь в виду, что эти значения достигаются или в точках экстремума, или на границе множества.

На координатной плоскости изобразим заданную область (Рисунок 3).

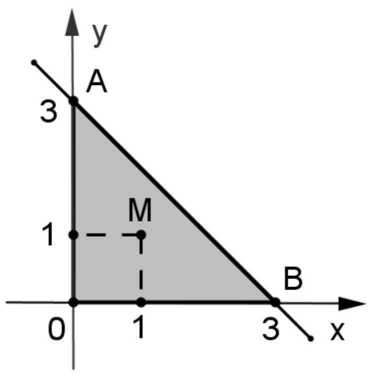


Рисунок 3

Исследуем функцию на экстремум внутри области.

Для этого найдем стационарные точки изусловий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем точку $M(1;1)$, которая находится внутри области. Значение функции в этой точке равно $z(M) = z(1;1) = -1$.

Далее исследуем поведение функции на границах области, которая в нашем случае является прямоугольным треугольником.

1. Граница OA имеет уравнение $x = 0$ при этом $y \in [0,3]$. На этой части границы $z = y^2 - y -$ функция одной переменной. Так как $z' = 2y - 1 = 0$ (при $y = 0,5$),то наименьшее и наибольшее значения функция может принимать в точке $M_1(0;0,5)$, а также в граничных точках $M_2(0;0)$ и $M_3(0;3)$. Вычислим значения функции во всех этих точках: $z(M_1) = z(0;0,5) = -0,25$, $z(M_2) = z(0;0) = 0$, $z(M_3) = z(0;3) = 6$.

2. Граница OB имеет уравнение $y = 0$ при $x \in [0,3]$. На этой части границы $z = x^2 - x$. Так как $z' = 2x - 1 = 0$ при $x = 0,5$, значит следует рассмотреть точку $M_4(0,5;0)$, а также граничные точки $M_2(0;0)$ и $M_5(3;0)$. Вычислим значения функции в точках: $z(M_4) = z(0,5;0) = -0,25$, $z(M_5) = z(3;0) = 6$.

3. Граница AB имеет уравнение $y = 3 - x$ при $x \in [0,3]$. На этой части границы $z = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) - x - (3 - x)$ или после преобразования $z = 3x^2 - 9x + 6$. Так как $z' = 6x - 9 = 0$ при $x = 1,5$, тогда $y = 3 - 1,5 = 1,5$. Получаем точку $M_6(1,5;1,5)$, значение функции в ней $z(M_6) = z(1,5;1,5) = -0,75$. Граничные точки $M_3(0;3)$ и $M_5(3;0)$ были рас-

смотрены ранее.

Окончательно получаем, наибольшее значение функции $z_{\text{наиб}} = z(0;3) = z(3;0) = 6$, а наименьшее $z_{\text{наим}} = z(1;1) = -1$.

Ответ. $z_{\text{наиб}} = z(0;3) = z(3;0) = 6$, $z_{\text{наим}} = z(1;1) = -1$.

Задание 8. *Вычислить двойной интеграл*

$$\iint_D \left(24x^2y^2 - 48x^3y^3\right)dxdy, D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}.$$

Решение.

На координатной плоскости изобразим область интегрирования (Рисунок 4).

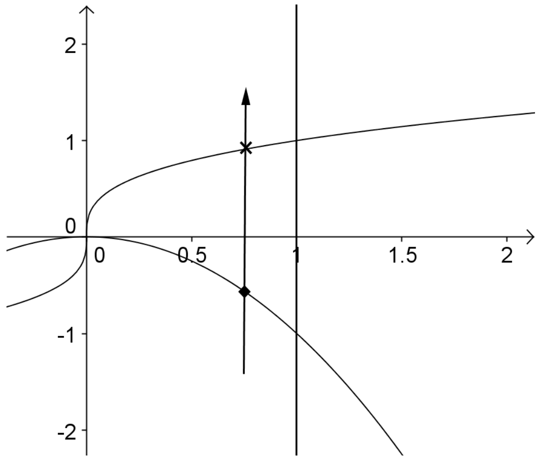


Рисунок 4

От двойного интеграла перейдем к повторному, расставляя пределы интегрирования в соответствии с рисунком:

$$\iint_D \left(24x^2y^2 - 48x^3y^3\right)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}} \left(24x^2y^2 - 48x^3y^3\right)dy.$$

При интегрировании по y считаем x константой.

$$\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}} \left(24x^2y^2 - 48x^3y^3\right)dy = \int_0^1 dx \left(8x^2y^3 - 12x^3y^4\right)\Big|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \int_0^1 \left(8x^3 - 12x^{\frac{13}{3}} + 8x^8 + 12x^{11}\right)dx.$$

Далее вычисляем определенный интеграл по x.

$$\int_0^1 \left(8x^3 - 12x^{\frac{13}{3}} + 8x^8 + 12x^{11}\right)dx = \left(2x^4 - \frac{9}{4}x^{\frac{16}{3}} + \frac{8}{9}x^9 + x^{12}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{9} + 1 = \frac{59}{36}.$$

Ответ. $\iint\limits_D \left(24x^2y^2 - 48x^3y^3\right)dxdy = \dfrac{59}{36}$

Задачи для типовых расчетов

Задание 7. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в заданной области.*

7.1	$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$	7.2	$z = 1 - x - y$, $x^2 + y^2 \le 4$
7.3	$z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$	7.4	$z = x - x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 9$
7.5	$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $x^2 + y^2 \le 25$	7.6	$z = 5x - 3y$, $y \ge x$, $y \ge -x$, $y \le 4$
7.7	$z = x^2 + y^2 + xy$, $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \le 1$	7.8	$z = 2x^2 + y^2 + y$, $x^2 + 4y^2 \le 4$
7.9	$z = 4x^2 + y^2 - 2y$, $\lvert x\rvert \le 1$, $0 \le y - x \le 1$, $0 \le x + y \le 1$	7.10	$z = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + 5x - y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
7.11	$z = xy - x - y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$	7.12	$z = 4 - 3x + 2y$, $x^2 + y^2 \le 9$
7.13	$z = 3x + 4y - 2$, $\lvert x\rvert \le 1$, $0 \le y - x \le 1$, $0 \le x + y \le 1$	7.14	$z = 2x^2 + 4y^2 - xy$, $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 0$
7.15	$z = 2x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 16$	7.16	$z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 4y \le 12$
7.17	$z = y^2 - x^2$, $x^2 + y^2 \le 9$	7.18	$z = xy$, $x^2 + y^2 \le 1$
7.19	$z = x^2 + y^2 - 3xy$, $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \le 1$	7.20	$z = x^3 + y^3 - 3xy$, $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$
7.21	$z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2x + 3y - 12 \le 0$	7.22	$z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$
7.23	$z = x^2 - y^2$, $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \le 2$	7.24	$z = x^2y(4 - x - y)$, $x \ge 0$, $y \le 0$, $x + y \le 6$
7.25	$z = x^2 + y^2 + 5xy$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le x + y \le 3$	7.26	$z = xy + x + y$, $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 3$
7.27	$z = 2y + x$, $y \ge x^2$, $y - 2x \le 3$	7.28	$z = x^3 + y^3 - 3xy$, $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$
7.29	$z = y^2 - 2x^2$, $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 100$	7.30	$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

Задание 8. *Вычислить двойной интеграл*

8.1 $\iint\limits_D \left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

8.2 $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$

8.3 $\iint\limits_D \left(36x^2y^2-96x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$

8.4 $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

8.5 $\iint\limits_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

8.6 $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$

8.7 $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

8.8 $\iint\limits_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$

8.9 $\iint\limits_D \left(4xy+3x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

8.10 $\iint\limits_D \left(12xy+9x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$

8.11 $\iint\limits_D \left(8xy+9x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$

8.12 $\iint\limits_D \left(24xy+18x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

8.13 $\iint\limits_D \left(12xy+27x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

8.14 $\iint\limits_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$

8.15 $\iint\limits_D \left(\tfrac{4}{5}xy+\tfrac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

8.16 $\iint\limits_D \left(\tfrac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$

8.17 $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

8.18 $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$

8.19 $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$

8.20 $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

8.21 $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy, D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

8.22 $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy, D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$

8.23 $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy, D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$

8.24 $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy, D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$

8.25 $\iint\limits_D \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy, D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$

8.26 $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy, D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}$

8.27 $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy, D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$

8.28 $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy, D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$

8.29 $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy, D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$

8.30 $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dxdy, D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x}$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется частной производной функции нескольких аргументов по одному из аргументов?
2. Что такое смешанные частные производные?
3. Что называется полным дифференциалом функции двух аргументов?
4. Можно ли утверждать, что функция двух аргументов, имеющая в данной точке частные производные по обоим аргументам, непрерывна в этой точке?
5. Что такое локальный максимум (минимум) функции двух переменных?
6. Если $f'_x(x_0, y_0)=0$, то можно ли утверждать, что (x_0, y_0) – точка экстремума для $f(x, y)$?
7. В чем заключается достаточное условие экстремума для функции двух переменных?

Тема 5. Ряды

Задание 9. *Найти область сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^{2n-1}}{4^n\left(2n+3\right)}$.

Решение.

Будем исследовать ряд на абсолютную сходимость, используя признак Даламбера (Приложение 4). Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2\cancel{n+1}}\;\cancel{4^n}\;(2n+5)}{\cancel{(x+5)^{2n-1}}\;4^{\cancel{n+1}}\;(2n+3)}\right|=$$

$$=\frac{(x+5)^2}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5)}{(2n+3)}=\frac{(x+5)^2}{4}.$$

Ряд будет сходится, если $\dfrac{(x+5)^2}{4}<1$. Решая неравенство, получим $-7<x<-3-$ область сходимости ряда.

Отдельно необходимо рассмотреть границы интервала:

Если $x=-3$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+5)^{2n-1}}{4^n(2n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{2^{2n}}\cdot 2^{-1}}{\cancel{4^n}(2n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(2n+3)}$. Сравнивая полученный ряд с гармоническим рядим $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: получаем $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+3)}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n}{2(2n+3)\cdot 1}=\frac{1}{4}$, значит по второму признаку сравнения ряд расходится.

Если $x=-7$, то

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7+5)^{2n-1}}{4^n(2n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n-1}}{4^n(2n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}\;\cancel{2^{2n}}\cdot 2^{-1}}{\cancel{4^n}(2n+3)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(2n+3)}$. Аналогично предыдущему получаем, что ряд расходится.

Ответ. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n+3)}$ сходится на промежутке $(-7;-3)$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 9. *Найти область сходимости степенного ряда*

9.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$

9.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{3^n n^3}$

9.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$

9.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$

9.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$

9.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

9.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$

9.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$

9.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$

9.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x+3)^{2n}}$

9.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^n(n+3)}$

9.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$

9.9 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(2+x)^n$

9.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{5^n(2n^2+1)}$

9.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

9.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$

9.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$

9.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$

9.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{5^n}$

9.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$

9.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$

9.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

9.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}$

9.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$

9.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

9.26 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x+2)^{2n}}{(2n+1)5^n}$

9.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

9.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

9.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

9.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$

Вопросы для самопроверки

1. Если $u_1,u_2,\ldots,u_n-$ числовая последовательность, то $\sum_{k=1}^{n}u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k$ называются соответственно?
2. Необходимый признак сходимости ряда.
3. При каких значениях α ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится?
4. Какие выводы о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ можно сделать, если известно что
   a. $\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{100}$;
   b. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует?

5. Является ли необходимым для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 2$?

6. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, если

   a. ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся;

   b. ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся;

   c. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится?

7. Верно ли, что

   a. если последовательность $\{a_n\}$ монотонна, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится;

   b. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится?

8. Может ли интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ быть

   a. $(-2;0)$;

   b. $(-3;3)$;

   c. $(-\infty;\infty)$?

9. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ в точке $x=2$ расходится. Что можно сказать о сходимости ряда в точке

   a. $x=5$;

   b. $x=4$?

Тема 6. Дифференциальные уравнения

Задание 10. *Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка методом Лагранжа* $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$.

Решение.

Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 3y' = 0$.

Для этого составим характеристическое уравнение $k^2-3k=0$. Оно имеет различные вещественные корни $k_1=0$, $k_2=3$.

Тогда общее решение однородного уравнение принимает вид $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где $y_1(x)=e^{k_1x}$, $y_2(x)=e^{k_2x}$ (Приложение 5).

В нашем случае $y(x)=C_1+C_2e^{3x}$.

Для решения данного уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Заменяя, в полученном выражении константы функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$, подберем их таким образом, чтобы $y(x)$ было решением данного уравнения.

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему:

$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x) \end{cases}$, где $f(x)$ правая часть данного уравнения.

Для нашей задачи система принимает вид

$\begin{cases} C_1'+C_2'e^{3x}=0 \\ 3C_2'e^{3x}=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}} \end{cases}$. Решаем ее относительно C_1' и C_2'.

$$C_2'=\frac{3}{e^{3x}\left(3e^{3x}+1\right)},\ C_1'=-\frac{3}{3e^{3x}+1}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1=-\int\frac{3dx}{3e^{3x}+1}=\left[e^{3x}=t, dx=\frac{dt}{3t}\right]=-\int\frac{dt}{t(3t+1)}=$$

$$=\int\left(\frac{3}{3t+1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|3t+1|-\ln|t|+C_3=\ln\left|\frac{3e^{3x}+1}{e^{3x}}\right|+C_3,$$

$$C_2=\int\frac{3dx}{e^{3x}\left(3e^{3x}+1\right)}=\left[e^{3x}=t, dx=\frac{dt}{3t}\right]=\int\frac{dt}{t^2(3t+1)}=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+\frac{9}{3t+1}\right)dt=-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3\ln|3t+1|+C_4=3\ln\left|\frac{3e^{3x}+1}{e^{3x}}\right|-\frac{1}{e^{3x}}+C_4.$$

Подставляем в выражение $y(x)=C_1+C_2e^{3x}$ полученные функции, тогда $y(x)=\ln\left|\dfrac{3e^{3x}+1}{e^{3x}}\right|+C_3+\left(3\ln\left|\dfrac{3e^{3x}+1}{e^{3x}}\right|-\dfrac{1}{e^{3x}}+C_4\right)e^{3x}$

Ответ. $y(x)=\ln\left|\dfrac{3e^{3x}+1}{e^{3x}}\right|+C_3+\left(3\ln\left|\dfrac{3e^{3x}+1}{e^{3x}}\right|-\dfrac{1}{e^{3x}}+C_4\right)e^{3x}$.

Задачи для типовых расчетов

Задание 10. *Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка методом Лагранжа.*

10.1 $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

10.2 $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

10.3 $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

10.4 $y'' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

10.5 $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$

10.6 $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$

10.7 $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$

10.8 $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$

10.9 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$

10.10 $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$

10.11 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$

10.12 $y'' + y = \operatorname{tg} x$

10.13 $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$

10.14 $y'' + y = \operatorname{ctg} x$

10.15 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

10.16 $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

10.17 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

10.18 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

10.19 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x}$

10.20 $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$

10.21 $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

10.22 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$

10.23 $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

10.24 $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$

10.25 $y'' - y' = e^{2x} \cos\left(e^x\right)$

10.26 $y'' - y' = e^{2x} \sin\left(e^x\right)$

10.27 $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$

10.28 $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$

10.29 $y'' + +2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$

10.30 $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$

Вопросы для самопроверки

1. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f\left(x\right)$ пересекаться?
2. Что такое общее решение дифференциального уравнения первого порядка? второго порядка?
3. Что такое задача Коши?
4. Какие дифференциальные уравнения первого порядка Вы знаете?
5. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

6. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?
7. Какую замену используют для решения однородного дифференциального уравнения?
8. В чем заключается метод Бернулли?
9. Запишите замену Бернулли для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.
10. Условие линейной независимости системы функций на некотором отрезке.
11. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений которой
    a. e^x, e^{2x}, e^{-3x};
    b. $e^x, xe^x, x^2e^x, e^{3x}$.

Приложение 1

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$

$\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$

$\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$

$\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$

$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$

$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$

$\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ при $x \to 0$

$(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$ при $x \to 0$, в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$ при $x \to 0$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Правила дифференцирования

$$(cy)' = cy'$$

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$$

$$(y_1 \cdot y_2)' = y_1' \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2'$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y'}{y_2^2}$$

Таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Приложение 3

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,,\ \int \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Приложение 4

Признаки сходимости числовых рядов

<u>Эталонные ряды.</u>

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, при $\alpha>1$ ряд сходится, при $0<\alpha\le 1$ ряд расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n}$, при $|q|<1$ ряд сходится, $|q|\ge 1$ ряд расходится.

<u>Признаки сходимости знакоположительных рядов.</u>

1-ый признак сравнения	Если начиная с некоторого номера n выполняется условие $u_n \le v_n$, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$
2-ой признак сравнения	Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A,\left(0<A<\infty\right)$ Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ одновременно сходятся или расходятся
Признак Даламбера	Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, тогда если $l<1$ ряд сходится если $l>1$ ряд расходится
Радикальный признак Коши	Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, тогда если $l<1$ ряд сходится если $l>1$ ряд расходится
Интегральный признак Коши	Если $f\left(x\right)$ монотонно убывающая и $f\left(n\right)=u_n$, то из сходимости или расходимости несобственного интеграла $\int_{1}^{+\infty}f\left(x\right)dx$ следует сходимость или расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

Признаки сходимости знакочередующихся рядов.

Абсолютная сходимость	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится
Сходимость по Лейбницу	Если 1. $\{u_n\}$ убывающая последовательность 2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$ имеет корни:

действительные и различные k_1 и k_2, тогда $y_{\text{об}} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

действительные и равные $k_1 = k_2 = k$, тогда $y_{\text{об}} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

комплексные $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, тогда $y_{\text{об}} = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right)$

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А.Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А.Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А.Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А.Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф.Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф.

И.А.Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г.Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю.Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 8 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г. Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П.Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом. Область научных интересов профессора Качалова А.П. – современные методы теории дифракции.

Светлана Николаевна Кузнецова
Марина Владимировна Лукина
Екатерина Воиславовна Милованович

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ
для гуманитарных специальностей
I курс (1-2 модуль)
Методические указания и задачи для студентов

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ № 3032
Тираж100 экз.
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики
и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49