

Оглавление

Общие рекомендации.....	4
Задание 1. Векторная алгебра.....	5
Пример выполнения задания 1.....	5
Варианты задания 1	6
Задание 2. Приведение кривой второго порядка к канонической форме	8
Пример выполнения задания 2.....	8
Варианты задания 2	10
Задание 3. Аналитическая геометрия на плоскости.....	12
Пример выполнения задания 3.....	12
Варианты задания 3	14
Задание 4. Аналитическая геометрия в пространстве.....	17
Пример выполнения задания 4.....	17
Варианты задания 4	17
Задание 5. Решение систем линейных уравнений	22
Пример выполнения задания 5.....	22
Варианты задания 5	26
Задание 6. Теория квадратичных форм.....	30
Пример выполнения задания 6.....	30
Варианты задания 6	38
Задание 7. Поверхности второго порядка.....	40
Пример выполнения задания 7.....	40
Варианты задания 7	42

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый модуль включает в себя задачи по темам: «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Линейные системы уравнений».

Каждый студент обязан выполнить семь заданий, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Каждый типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие, чертежи и рисунки необходимо исполнить на миллиметровке, подклеить затем их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая во внимание которые и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

Задание 1. Векторная алгебра

Пример выполнения задания 1

Даны четыре точки: $A(2,-1,3)$, $B(4,5,0)$, $C(2,2,-1)$, $D(2,1,0)$.

Найти \overline{AB} , $|\overline{AB}|$, $\overline{AB} \times \overline{AC}$, $\cos \varphi$, где φ - угол между векторами \overline{AB} и \overline{AC} , направляющий вектор биссектрисы угла φ , $S_{\Delta ABC}$, V_{ABCD} , h_D .

Решение

Запишем векторы и найдем их длину:

$$\overline{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7,$$

$$\overline{AC} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Косинус угла между векторами вычислим с помощью скалярного произведения:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{6}{7}.$$

Векторы $5\overline{AB}$ и $7\overline{AC}$ имеют одинаковую длину, а потому их сумма направлена по биссектрисе угла φ , $\vec{b} = 10\vec{i} + 51\vec{j} - 43\vec{k}$.

Площадь треугольника найдем с помощью векторного произведения:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|,$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225 + 64 + 36} = \frac{\sqrt{325}}{2}.$$

Объем пирамиды найдем с помощью смешанного произведения:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{325}}{2}} = \frac{6\sqrt{13}}{65}.$$

Варианты задания 1

Даны четыре точки A, B, C, D . Найти \overline{AB} , $|\overline{AB}|$, $\overline{AB} \times \overline{AC}$, $\cos \varphi$, где φ -- угол между векторами \overline{AB} и \overline{AC} , направляющий вектор биссектрисы угла φ , $S_{\Delta ABC}$, V_{ABCD} , h_D .

1. $A(1,2,3), B(0,0,1), C(4,4,-3), D(1,2,6)$.
2. $A(-1,2,1), B(3,-1,1), C(1,4,2), D(5,2,1)$.
3. $A(1,-2,3), B(-5,0,0), C(-3,1,3), D(1,1,3)$.
4. $A(2,1,1), B(3,3,3), C(-4,-1,-2), D(6,3,3)$.
5. $A(-2,1,2), B(2,1,5), C(0,2,4), D(-4,0,6)$.
6. $A(-2,-1,1), B(4,-3,4), C(2,2,1), D(2,3,1)$.
7. $A(2,1,3), B(4,3,4), C(4,-2,-3), D(6,3,4)$.
8. $A(2,1,-3), B(2,4,1), C(3,3,-5), D(2,-2,-1)$.
9. $A(2,1,-2), B(-4,-4,0), C(5,1,2), D(3,1,0)$.
10. $A(1,-2,1), B(-1,-1,3), C(3,1,-5), D(-1,2,3)$.
11. $A(1,3,-1), B(-2,3,3), C(2,5,-1), D(2,5,8)$.
12. $A(3,1,2), B(1,4,8), C(3,4,-2), D(1,7,8)$.

13. $A(2,1,3), B(1,3,1), C(-1,7,5), D(1,6,1)$.
14. $A(3,1,-2), B(3,-2,2), C(2,3,-4), D(3,4,0)$.
15. $A(3,1,1), B(5,7,-2), C(6,1,-3), D(4,2,2)$.
16. $A(1,-2,2), B(2,-4,4), C(4,0,-4), D(5,-4,4)$.
17. $A(2,1,-1), B(2,4,3), C(4,3,0), D(2,4,1)$.
18. $A(2,3,-3), B(-1,1,3), C(2,6,1), D(2,1,-1)$.
19. $A(1,1,-1), B(-1,2,1), C(4,3,5), D(1,4,-1)$.
20. $A(2,-2,1), B(-1,-2,-3), C(4,1,7), D(5,-2,4)$.
21. $A(1,-1,2), B(3,2,-4), C(1,2,6), D(1,2,-1)$.
22. $A(2,-1,1), B(1,1,-1), C(-4,2,3), D(6,1,-1)$.
23. $A(3,1,4), B(3,-3,1), C(2,3,2), D(3,4,10)$.
24. $A(3,2,-1), B(-3,-1,1), C(3,5,3), D(3,3,0)$.
25. $A(4,1,5), B(2,2,3), C(-2,-1,2), D(5,2,3)$.
26. $A(2,-1,-3), B(2,3,0), C(3,1,-1), D(2,1,0)$.
27. $A(-3,-1,-2), B(3,-3,1), C(1,2,-2), D(1,3,-2)$.
28. $A(-1,-2,3), B(1,0,4), C(3,-2,0), D(2,-2,6)$.
29. $A(4,2,-5), B(1,2,-1), C(3,0,-3), D(7,2,8)$.
30. $A(3,1,-1), B(6,3,5), C(6,1,3), D(0,-1,-1)$.

Задание 2. Приведение кривой второго порядка к канонической форме

Пример выполнения задания 2

Дано уравнение кривой второго порядка:

$$17x^2 + 8y^2 + 12xy - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - \sqrt{5} = 0.$$

Выполнив поворот и параллельный перенос координатных осей, получить каноническое уравнение кривой. Построить эту кривую в канонической и исходной системе координат.

Решение. Выполняем поворот осей по формулам:

$$x = x_1 \cos a - y_1 \sin a,$$

$$y = x_1 \sin a + y_1 \cos a.$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и выделим коэффициент при $x_1 y_1$:

$$\begin{aligned} & 17(x_1^2 \cos^2 a - 2x_1 y_1 \cos a \sin a + y_1^2 \sin^2 a) + \\ & + 8(x_1^2 \sin^2 a - 2x_1 y_1 \sin a \cos a + y_1^2 \cos^2 a) + \\ & + 12(x_1^2 \sin a \cos a - y_1^2 \sin a \cos a) + \\ & + 12x_1 y_1 (\cos^2 a - \sin^2 a) - 2\sqrt{5}(x_1 \cos a - y_1 \sin a) + \\ & + 4\sqrt{5}(x_1 \sin a + y_1 \cos a) - 15 = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Приравняем к нулю коэффициент при $x_1 y_1$, получаем:

$$-34 \sin a \cos a + 16 \sin a \cos a + 12(\cos^2 a - \sin^2 a) = 0$$

$$-18 \sin a \cos a + 12 \cos^2 a - 12 \sin^2 a = 0$$

$$2 \sin^2 a + 3 \sin a \cos a - 2 \cos^2 a = 0$$

$$2 \operatorname{tg}^2 a + 3 \operatorname{tga} - 2 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$(\operatorname{tg} a) = \frac{1}{2}, (\operatorname{tg} a) = -2.$$

Выбираем положительный острый угол, т.е. $\operatorname{tga} = \frac{1}{2}$. Зная tga , по тригонометрическим формулам находим

$$\sin a = \frac{\operatorname{tga}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}},$$

$$\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Подставим эти значения в выражение (*). После вычисления коэффициентов получим уравнение:

$$4x_1^2 + y_1^2 + 2y_1 - 3 = 0.$$

Выделим в нем полные квадраты двучленов, получим:

$$4x_1^2 + (y_1 + 1)^2 - 4 = 0.$$

Выполним параллельный перенос по формулам:

$$x_2 = x_1,$$

$$y_2 = y_1 + 1.$$

Получим в системе $X_2 O_2 Y_2$ каноническое уравнение кривой:

$$\frac{x_2^2}{1} + \frac{y_2^2}{4} = 1.$$

Это эллипс с полуосями $a=1$, $b=2$.

На рисунке 1 изображена эта кривая в канонической и исходной системах координат.

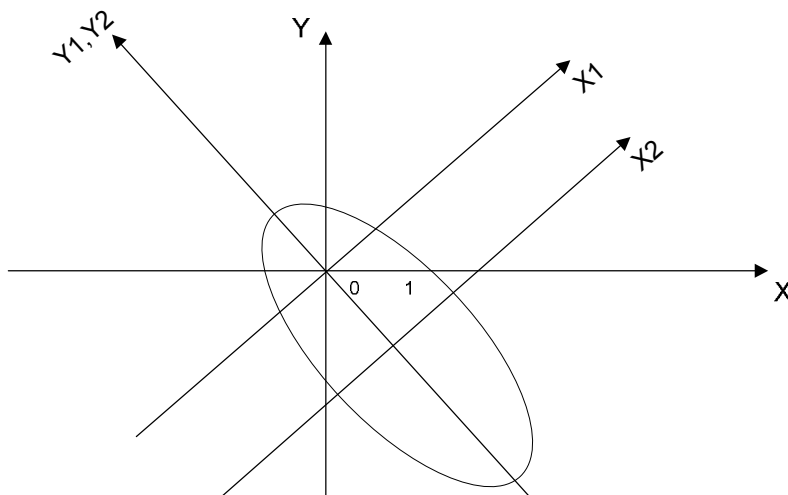


Рисунок 1. Схема к задаче 2

Варианты задания 2

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

1. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$
2. $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 32\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 60 = 0$
3. $3x^2 + 3y^2 - 20xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$
4. $13x^2 + 37y^2 + 18xy - 16\sqrt{10}x - 48\sqrt{10}y + 120 = 0$
5. $4x^2 + 4y^2 - 10xy - 27\sqrt{2}x + 27\sqrt{2}y + 72 = 0$
6. $13x^2 + 37y^2 - 32xy - 36\sqrt{5}x + 72\sqrt{5}y + 135 = 0$
7. $3\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}xy - 16x - 8y = 0$
8. $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$
9. $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + 15 = 0$

10. $x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0$
11. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 24 = 0$
12. $7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0$
13. $13x^2 + 37y^2 + 18xy + 24\sqrt{10}x + 72\sqrt{10}y + 320 = 0$
14. $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 27 = 0$
15. $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0$
16. $x^2 + y^2 - 2xy - 7\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}y + 32 = 0$
17. $13x^2 + 37y^2 - 32xy - 36\sqrt{5}x + 72\sqrt{5}y + 135 = 0$
18. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0$
19. $35x^2 - 5y^2 + 30xy - 48\sqrt{10}x - 16\sqrt{10}y + 120 = 0$
20. $x^2 + y^2 + 2xy - 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}y + 32 = 0$
21. $x^2 - 2xy + y^2 + 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}y + 32 = 0$
22. $\sqrt{5}x^2 + 7\sqrt{5}y^2 - 8\sqrt{5}xy - 36x + 72y + 27\sqrt{5} = 0$
23. $4x^2 + y^2 + 4xy + \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 15 = 0$
24. $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 18\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 27 = 0$
25. $9x^2 + 6xy + y^2 + \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y + 30 = 0$
26. $8x^2 + 17y^2 - 12xy + 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
27. $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$
28. $x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0$
29. $3x^2 + 3y^2 - 10xy - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 24 = 0$
30. $5x^2 + 5y^2 - 8xy + 8\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 1 = 0$

Задание 3. Аналитическая геометрия на плоскости

Пример выполнения задания 3

Точки $A(1,3)$ и $B(3,1)$ являются концами одной из диагоналей ромба, длина другой диагонали равна $4\sqrt{2}$. Написать уравнения сторон ромба. Сделать рисунок.

Решение

Чтобы написать уравнения сторон ромба, нам надо найти третью вершину ромба $C(x_0, y_0)$. Для этого составим сначала уравнение диагонали AB как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 3}{1 - 3}$$

или

$$x + y - 4 = 0.$$

Составим уравнение другой диагонали ромба. По свойству диагоналей она проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему. Координаты середины отрезка AB находим как половину суммы координат его концов, получим: $(2,2)$ - точка пересечения диагоналей. Нормальный вектор прямой AB имеет координаты $\vec{n}_1 = \{1,1\}$, следовательно за нормальный вектор второй диагонали можно принять вектор $\vec{n}_2 = \{1,-1\}$, перпендикулярный вектору \vec{n}_1 . По координатам точки $(2,2)$ и нормальному вектору \vec{n}_2 записываем уравнение второй диагонали CD : $x - 2 - (y - 2) = 0$. Откуда получаем $x = y$. Пусть координаты точки C равны $C(x_0, y_0)$. В силу $x_0 = y_0$, мы получим $C(x_0, x_0)$. Расстояние от точки C до прямой AB равно половине длины диагонали CD , то есть равно

$2\sqrt{2}$ по условию задачи. По формуле расстояния от точки до прямой получаем:

$$\frac{|x_0 + x_0 - 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$
$$|x_0 - 2| = 2.$$

Получим $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$. Таким образом, за точку C мы можем взять начало координат $C(0,0)$. Легко теперь составить уравнение двух сторон ромба AC и BC :

$$AC: 3x - y = 0,$$

$$BC: x - 3y = 0.$$

Две другие стороны BD и AD параллельны AC и BC соответственно и проходят через точки $A(1,3)$ и $B(3,1)$. Потому:

$$BD: 3(x - 3) - (y - 1) = 0 \text{ или } 3x - y - 8 = 0,$$

$$AD: 3(x - 3) - (y - 1) = 0 \text{ или } x - 3y + 8 = 0.$$

Рисунок 1 иллюстрирует решение задачи:

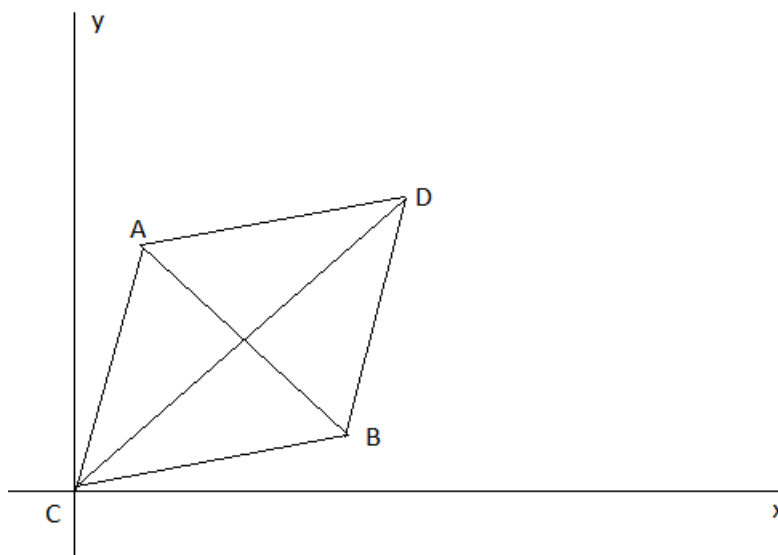


Рисунок 1. Схема к задаче 3

Варианты задания 3

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $-y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $E(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и найти угол между ними. Сделать рисунок.
2. Даны уравнения двух сторон ромба $+3y + 12 = 0$ и $x + 3y - 8 = 0$, и уравнение одной его диагонали $2x + y + 4 = 0$. Найти координаты вершин ромба. Сделать рисунок.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1,6)$ так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между прямыми $x - 5y + 23 = 0$ и $x - 5y + 11 = 0$, лежала на прямой $2x - y - 2 = 0$. Сделать рисунок.
4. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$. Сделать рисунок.
5. Через точку $M(2, -5)$ проведена прямая так, что ее отрезок, заключенный между прямыми $x - y - 1 = 0$ и $2x - y - 18 = 0$, делится в точке M пополам. Составить уравнение этой прямой. Сделать рисунок.
6. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят соответственно через точки $(-1, 2)$ и $(0, 6)$, а две другие – через точки $(-3, 2)$ и $(-6, 0)$. Сделать рисунок.
7. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y = 0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5. Сделать рисунок.
8. Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек $A_1(1, 2)$, $A_2(3, 0)$, $A_3(-4, -5)$. Сделать рисунок.
9. На прямой $x - 3y + 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух точек $(-3, 1)$ и $(5, 4)$. Сделать рисунок.

10. Точка $(3, 1)$ является вершиной равнобедренного треугольника, а прямая $2x + 3y - 1 = 0$ - его гипотенузой. Написать уравнения катетов. Сделать рисунок.
11. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $5x - 12y = 0$ и отстоящей от точки $(1, 1)$ на расстоянии 3. Сделать рисунок.
12. На прямой $x - 3y + 13 = 0$ найти точки, отстоящие от прямой $x + 2y + 3 = 0$ на расстоянии $\sqrt{5}$. Сделать рисунок.
13. На осях координат найти точки, равноудаленные от прямых $5x - y + 6 = 0$, $5x + y - 3 = 0$. Сделать рисунок.
14. Даны две вершины $(0, 7)$ и $(-2, 3)$ треугольника, площадь которого равна 3, и прямая $x = 7$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать рисунок.
15. Даны середины сторон треугольника $A(1, 2)$, $B(3, -4)$, $C(-5, 8)$. Написать уравнения его сторон. Сделать рисунок.
16. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $(3, 1)$ на расстоянии 2 от точки $(1, -2)$. Сделать рисунок.
17. Найти координаты вершин C прямоугольного треугольника ABC , если известно, что вершины $A(2, 3)$ и $B(6, -1)$ являются концами его гипотенузы, а вершина C лежит на прямой $x + y - 3 = 0$. Сделать рисунок.
18. Через точки $A(-8, 1)$ и $B(2, 1)$ проведены параллельные прямые, расстояние между которыми равно 6. Написать уравнения этих прямых. Сделать рисунок.
19. Написать уравнения сторон треугольника, у которого $x + y = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$ - высоты, а точка A - одна из вершин. Сделать рисунок.
20. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC лежит на прямой $3x + 4y - 9 = 0$, длина боковых сторон AB и AC равна 6. Найти длину основания BC , если $A(3, -5)$. Сделать рисунок.

21. Вычислить длину стороны правильного треугольника, если точка $A(2, -3)$ является одной из его вершин, а прямая $3x - 4y + 7 = 0$ содержит одну из его сторон. Сделать рисунок.
22. Определить координаты точки, симметричной точке $M(2, -5)$ относительно прямой $2x + 8y - 15 = 0$. Сделать рисунок.
23. Отрезок AB перпендикулярен к прямой $x - 2y - 8 = 0$ и пересекает ее. Найти координаты конца B отрезка, если он отстоит от данной прямой в четыре раза дальше, чем точка $A(2, -1)$. Сделать рисунок.
24. Точка $C(-1, 5)$ является центром окружности, а точка $M(1, 4)$ – серединой ее хорды. Написать уравнение этой хорды. Сделать рисунок.
25. Через точку $M(5, 3)$ проведена прямая, составляющая с осями координат треугольник площадью 30. Написать уравнения этой прямой. Сделать рисунок.
26. Точки $A(1, 2)$, $B(-1, 4)$, $C(3, 6)$ являются вершинами треугольника. Написать уравнения его медиан. Сделать рисунок.
27. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых прямыми $7x + y - 1 = 0$ и $x - y + 2 = 0$ и убедиться в их перпендикулярности. Сделать рисунок.
28. Даны основания равнобедренного треугольника $x - y + 5 = 0$ и его боковая сторона $x + 3y + 2 = 0$. Составить уравнение второй боковой стороны, если она проходит через точку $P(1, 1)$. Сделать рисунок.
29. Даны уравнения сторон треугольника $3x - 2y + 3 = 0$, $2x - 3y + 7 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Определить тангенсы внутренних углов. Сделать рисунок.
30. На прямой $x + 3y - 16 = 0$ найти точки, удаленные от прямой $2x + y - 2 = 0$ на расстояние $\sqrt{5}$. Сделать рисунок.

Задание 4. Аналитическая геометрия в пространстве

Пример выполнения задания 4

Даны две плоскости:

$$\alpha_1: x + 2y - z + 1 = 0$$

$$\alpha_2: x - y + z - 2 = 0.$$

Составить уравнение плоскости α_3 , перпендикулярной к плоскости α_1 и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости α_2 .

Решение

Поскольку линия пересечения плоскостей α_1 и α_3 лежит в плоскости α_2 , то плоскость α_3 перпендикулярна множеству плоскостей, проходящих через прямую пересечения плоскостей α_1 и α_2 (пучок плоскостей).

Любую плоскость из этого множества мы можем записать в виде:

$$x + 2y - z + 1 + k(x - y + z - 2) = 0$$

или

$$(1 + k)x + (2 - k)y + (k - 1)z + 1 - 2k = 0.$$

Для того, чтобы плоскости α_1 и α_3 были перпендикулярными, скалярное произведение их нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{1, 2, -1\}$ и $\vec{n}_3 = \{1+k, 2-k, k-1\}$ должно быть равно 0. Это приводит к уравнению для определения k :

$$(1 + k) + 2(2 - k) - (k - 1) = -2k + 6 = 0.$$

Получаем $k=3$.

Подставляя найденное значение в уравнение, получим уравнение искомой плоскости:

$$\alpha_3 = 4x - y + 2z - 5 = 0.$$

Варианты задания 4

1. Точки $A(2, 1, 1)$ и $B(1, 2, 2)$ проектируются из точки $C(1, 1, 2)$ на плоскость $x + y - z - 3 = 0$. Найти координаты проекций точек A и B и расстояние между ними.
2. Через точку $A(1, -1, 1)$ проведена прямая, параллельная плоскости $x + y - z + 3 = 0$ и пересекающая прямую $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$. Найти уравнение этой прямой.
3. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ проектируется из точки $C(1, 1, 1)$ на плоскость $2x + y - z - 2 = 0$. Найти уравнение проекции.
4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, 0, -1)$ и пересекающей две прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ и $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$.
5. Из плоскости $x - 2y + 3z - 6 = 0$ координатными плоскостями высекается треугольник. Найти уравнение и длину высоты этого треугольника, опущенной из вершины, лежащей на оси Oz .
6. Найти проекцию точки $A(2, 1, 1)$ на плоскость $x + y + 3z + 5 = 0$ и точку, симметричную точке A относительно данной плоскости.
7. Напрямой

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $x - y + z - 2 = 0$ и $x + y - z - 2 = 0$.

8. Через прямую

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $(1, -1, 1)$. Написать уравнения этих плоскостей.

9. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскостям $x - y + 2z - 2 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oxz .
10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, 1)$ и $B(0, -1, 1)$ и отстоящей от точки $C(5, 0, -3)$ на расстоянии 4.

11. Найти координаты точки, симметричной точке $A(1, 0, 1)$ относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

12. Найти общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым

$$x = y = z \text{ и } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$

13. Найти уравнение общего перпендикуляра к двум прямым

$$x = y = z \text{ и } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

и его длину между заданными прямыми.

14. Напрямой

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + 3z = 11 \end{cases}$$

найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек $A(1, 0, -1)$ и $B(-1, 2, 1)$.

15. Найти расстояние от точки $M(1, 2, -2)$ до плоскости, проходящей через две прямые: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{1}$ и $x = 2t, y = 5 + 2t, z = -5 + t$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом $V=6$.

17. Принадлежат ли две прямые:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 4 \\ x - 2y + z = -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

одной плоскости? Если "да", то написать уравнение этой плоскости.

18. Убедившись, что данная плоскость $x + y - 3z = 10$ параллельна плоскости, проходящей через точки $A(5, 4, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 6, 3)$, найти расстояние между ними.

19. Составить уравнение проекции прямой $x = -t + 4, y = t - 3, z = 3t - 1$ на плоскость $2x + 4y - 3z = -1$.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -19 \\ 2y - 3z = -26 \end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $4x - 3y + 5z = 46$.

21. Найти проекцию точки $M(-2, 1, 0)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A(1, 0, -1)$, $B(3, 1, -2)$, $C(2, 4, -5)$.

22. Даны вершины
треугольника $A(3, 0, 1)$, $B(1, 3, -2)$, $C(7, -1, -2)$. Найти
параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A .
Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости
треугольника ABC и содержащей указанную медиану.

23. Доказать перпендикулярность прямых:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 9z = 2, \\ 2x + y + 2z = -5 \\ 2x - 2y - z = -2. \end{cases}$$

Написать уравнение плоскости, содержащей первую прямую и перпендикулярную второй прямой.

24. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M(-2, -3, 1)$ и отсекающих от координатных осей равные отрезки. Написать канонические уравнения перпендикуляров, опущенных из начала координат на эти плоскости.

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = t + 1$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 + 4t$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

26. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0, \\ x + y - z = -2 \\ x - y - 3z = -4. \end{cases}$$

27. Проверить, являются ли две прямые скрещивающимися; если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{5},$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

28. Найти уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3},$$

$$\frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}.$$

29. Найти расстояние от точки $M(-3, 4, -5)$ до плоскости, содержащей в себе прямую $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}$ и точку $A(1, 2, 0)$.

30. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, -2, 3)$. Найти уравнение его биссектрисы, проведенной из угла A . Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC и содержащей указанную биссектрису.

Задание 5. Решение систем линейных уравнений

Пример выполнения задания 5

А) Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Найдем следующие определители:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 5 - 21 - 2(-3 - 6) + 21 + 10 = 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= 4(5 - 21) - 2(-1 - 24) + 7 + 40 = 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= -1 - 24 - 4(-3 - 6) + 24 - 2 = 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= -40 - 7 - 2(24 - 2) + 4(21 + 10) = 33. \end{aligned}$$

По формулам Крамера вычислим неизвестные:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Выполним проверку:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4 \\ 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 1 = 8. \end{cases}$$

Таким образом, решением является столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Б) Проверить систему на совместность. В случае, если система совместна, построить ее решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 14. \end{cases}$$

Обозначим через A и A^r основную и расширенную матрицы системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 14 \end{array} \right).$$

Сначала надо определить, имеет ли эта система решения и сколько. Для этого возьмем расширенную матрицу A^r и элементарными преобразованиями строк (только!) приведем ее к трапециевидной форме.

Умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй и четвертой строке, умножим на (-1) и прибавим к третьей. Получим:

$$A^r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 14 \end{pmatrix}.$$

Умножим третью строку на (-1) и прибавим к четвертой, таким образом, мы получили нулевую строку:

$$A^r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбираем третью строку, умножаем на 2 и прибавляем к первой, умножаем на (-5) и прибавляем ко второй:

$$A^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 28 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & | & -68 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на (-1/4).

$$A^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & | & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к первой:

$$A^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & | & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами строки 2 и 3. Получим:

$$A^r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \tilde{A}^r.$$

При этом матрица A перейдет в \tilde{A} .

Отсюда $\text{rang}A = \text{rang}A^r = 3$. Обозначим $\text{rang}A$ через r . Так как ранги A и A^r совпадают, то система совместна, а так как ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Решение неоднородной системы в этом случае может быть получено как сумма общего решения соответствующей однородной и какого-либо решения неоднородной. Общее решение однородной системы представляет из себя линейную комбинацию фундаментальной системы решений, которая состоит из $m - r$ векторов, что в нашем примере равно одному.

Чтобы найти решения, запишем сначала полученную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 1/4x_4 = 11 \\ x_2 + 2x_4 = 14 \\ x_3 + 3/4x_4 = 17. \end{cases}$$

За базисный минор возьмем минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы \tilde{A} , то есть минор, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3 . Тогда, придавая оставшейся переменной x_4 любые значения, неизвестные x_1, x_2, x_3 можно получить единственным образом.

Выразим все переменные через x_4 .

$$\begin{cases} x_1 = 11 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = 14 - 2x_4 \\ x_3 = 17 - \frac{3}{4}x_4. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы будет иметь вид:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -2 \\ 3 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Варианты задания 5

а) Решить систему уравнений методом Крамера:

$$1. \quad \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ x + 5y + 3z = 1 \\ 2x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x - 5y + 2z = -15 \\ 2x - y - 7z = -1 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - z = 3 \\ 3x - 4y + z = 2 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 3y - 2z = 0; \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 3x + 3y - 2z = -3 \\ x + 3y + 2z = 2; \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} 5x + 2y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = 13; \\ x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x - 5y - 4z = 1; \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x - 5y - 4z = 1; \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ x - 3y + 2z = -2; \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = -2; \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2; \\ 2x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15; \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} 4x + y + 2z = -9 \\ 5x + 3y + 5z = -12; \\ 8x + 3y + 7z = -20 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} -x + 2y + 4z = 29 \\ 5x + 1y - z = 21; \\ 2x + y + 9z = 76 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
17. & \begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+3y+2z=-2; \\ 3x+y+z=-3 \end{cases} & 18. & \begin{cases} 2x+8y+z=80 \\ x-y+6z=17; \\ 3x+4y-5z=22 \end{cases} \\
19. & \begin{cases} 5x+3y+z=4 \\ 2x-5y+2z=11; \\ x+2y-3z=-7 \end{cases} & 20. & \begin{cases} 7x+8y+6z=14 \\ 2x-5y+z=23; \\ 3x+4y-z=-10 \end{cases} \\
21. & \begin{cases} 4x+3y-5z=1 \\ 2x-5y+2z=7; \\ 7x-12y+3z=19 \end{cases} & 22. & \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+3y+7z=22; \\ 4x+3y-10z=11 \end{cases} \\
23. & \begin{cases} 5x+y+2z=9 \\ 3x+4y+7z=18; \\ 8x+y+z=11 \end{cases} & 24. & \begin{cases} 2x-3y+z=-3 \\ 4x+4y+2z=4; \\ 2x+3y+2z=5 \end{cases} \\
25. & \begin{cases} 3x-3y+5z=26 \\ 5x+3y-11z=-26; \\ 8x+2y-z=22 \end{cases} & 26. & \begin{cases} 4x+5y-2z=15 \\ 2x+y+3z=-5; \\ x-5y+7z=-30 \end{cases} \\
27. & \begin{cases} 2x+3y-5z=-23 \\ 7x-8y+3z=-15; \\ 4x-5y-z=-23 \end{cases} & 28. & \begin{cases} 4x-2y-5z=-20 \\ -3x+7y+7z=38; \\ x+9y-4z=18 \end{cases} \\
29. & \begin{cases} 6x+8y+3z=-9 \\ -x+4y+9z=-24; \\ 5x-2y-7z=28 \end{cases} & 30. & \begin{cases} x+5y-6z=7 \\ 2x-2y+5z=15 \\ 7x-3y+9z=38 \end{cases}
\end{array}$$

б) Проверить систему на совместность. В случае, если система совместна, построить решение:

$$\begin{array}{ll}
1. & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases} & 2. & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}
\end{array}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_4 = -6 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_2 - x_4 = 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -9 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 5x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 6 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 24 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 15 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 17 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Задание 6. Теория квадратичных форм

Пример выполнения задания 6

В данном задании предлагается привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм и сделать рисунок этой поверхности.

Приведём сведения из теории квадратичных форм, которыми мы воспользуемся при решении данной задачи.

Пусть в вещественном евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 выбран произвольный базис $\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0$. Мы будем рассматривать частный случай такого линейного пространства – привычное для нас геометрическое пространство R^3 , а в качестве базиса возьмем координатные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, с помощью которых зафиксирована пространственная декартова система координат $Oxyz$.

Любой вектор пространства $\vec{x} \in R^3$ имеет относительно данного базиса координаты x, y и z , т.е. мы можем написать: $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Вектору \vec{x} можно также поставить в соответствие одностолбцовую матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

которую также называют вектором.

Рассмотрим теперь выражение вида:

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \quad (1)$$

Это выражение содержит в качестве слагаемых только квадраты координат x, y, z и все их попарные произведения и называется

квадратичной формой координат x, y, z ; а числа a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) - коэффициентами квадратичной формы. Положим $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда ясно, что $2a_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, и квадратичную форму (1) можно записать так:

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{21}yx + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2. \quad (2)$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей квадратичной формы; т.к. $a_{ij} = a_{ji}$, то ясно, что эта матрица симметрична относительно своей главной диагонали, т.е. $A^T = A$, где A^T - матрица, которая получается из матрицы A , если в ней поменять местами строчки со столбцами (т.е. транспонировать её). Очевидно, что квадратичную форму в матричном виде можно записать так:

$$\Phi(x, y, z) = X^T \cdot A \cdot X. \quad (3)$$

Заметим, что здесь $X^T = (x, y, z)$ - транспонированная матрица X .

Найдем теперь единичные собственные векторы матрицы A . Напомним, что ненулевой вектор

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

называется собственным вектором матрицы A , если выполняется условие

$$A \cdot \Gamma = \lambda \Gamma . \quad (4)$$

Откуда следует, что

$$(A - \lambda E) \cdot \Gamma = 0 . \quad (5)$$

Это соотношение можно записать в координатной форме так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что соотношение (3) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений, записанную в матричном виде, которая имеет ненулевые решения (которые являются собственными векторами матрицы A), если ее определитель равен нулю, т.е. должно быть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 , \quad (7)$$

что более компактно можно записать так:

$$\det(A - \lambda E) = 0 . \quad (7')$$

Уравнение (7) (или (7')) называется характеристическим уравнением, его корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - характеристические числа или собственные числа матрицы A .

Найдя характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, подставляем их по очереди в уравнение (6) и, решая его, находим соответствующие им ненулевые собственные векторы $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}$. Нормируем теперь найденные собственные векторы, т.е. делим каждый собственный вектор $\Gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) на его длину и находим единичные собственные векторы матрицы A : $\Gamma^{(1,0)}, \Gamma^{(2,0)}, \Gamma^{(3,0)}$.

Сформируем теперь матрицу T' - матрицу преобразования координат, взяв в качестве её столбцов координаты найденных единичных собственных векторов $\Gamma^{(1,0)}, \Gamma^{(2,0)}, \Gamma^{(3,0)}$.

Замечание. Отметим, что при формировании матрицы T столбцы следует переставить таким образом, чтобы выполнялось равенство $\det T = 1$, ибо, если окажется, что $\det T = -1$, то это будет означать, что мы перейдем от правой к левой системе координат.

После того, как найдена матрица T , остаётся только сделать преобразование координат

$$X = TX', \quad (8)$$

т.е. подставить X , определённый соотношением (8), в выражение квадратичной формы (3). Очевидно, что относительно новой системы координат квадратичная форма будет иметь вид:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi'(x', y', z') = (TX')^T \cdot A \cdot (TX') = (X')^T \cdot (T^T \cdot A \cdot T) \cdot X'. \quad (9)$$

Здесь матрица $B = T^T \cdot A \cdot T$ представляет собою матрицу квадратичной формы в новой системе координат. Теперь остаётся вернуться к данному уравнению поверхности, получить его относительно новой системы координат в соответствии с преобразованием (8) и сделать рисунок.

Рассмотрим теперь конкретный пример.

Задача. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $2xz - 3y^2 = 0$ с помощью теории квадратичных форм.

Решение. Левая часть данного уравнения представляет собою квадратичную форму

$$\Phi(x, y, z) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 1 \cdot xz + 0 \cdot yx - 3 \cdot y^2 + 0 \cdot yz + 1 \cdot zx + 0 \cdot zy + 0 \cdot z^2.$$

Сделаем преобразование координат $X = TX'$, где T - матрица поворота координатных осей $Oxyz$, которая преобразует данные уравнения к новой системе координат $Ox'y'z'$. Ясно, что матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая его, получим характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$.

Найдем теперь соответствующие им собственные векторы $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(3)}$.

1. Подставим $\lambda_1 = 1$ в уравнение (6), сформировав его для нашей квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Систему линейных уравнений (10) запишем в координатной форме

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda_1^{(1)} \quad \quad \quad +\lambda_3^{(1)} = 0 \\ \quad \quad -4\lambda_2^{(1)} \quad \quad = 0 \\ \lambda_1^{(1)} \quad \quad \quad -\lambda_3^{(1)} = 0 \end{array} \right\}. \quad (10')$$

Решаем систему (10'), получаем $\lambda_2^{(1)} = 0$, $\lambda_1^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = t$, t - может принимать любое конечное ненулевое значение, т.е. мы нашли первый собственный вектор:

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Полагая здесь $t = 1$, получим:

$$\Gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаётся пронормировать его; тогда будет:

$$\Gamma^{(10)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{0}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

2. Аналогично, возьмем $\lambda_2 = -1$, подставим в уравнение (6), получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \gamma_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Откуда следует: $\lambda_2^{(2)} = 0$, $\lambda_1^{(2)} = -\lambda_3^{(2)} = t$. При $t = -1$ будет:

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

нормируем $\Gamma^{(2)}$, получим:

$$\Gamma^{(20)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{0}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. И, наконец, берём $\lambda_3 = -3$ и подставляем λ_3 в уравнение (10).

Аналогично, получим $\lambda_1^{(3)} = \lambda_3^{(3)} = 0$, $\lambda_2^{(3)} = t$. Полагаем $t = 1$, тогда будет:

$$\Gamma^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы нашли три единичных собственных вектора:

$$\Gamma^{(10)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \Gamma^{(20)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \Gamma^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих векторов сформируем матрицу поворота T таким образом, чтобы было $\det T = 1$, ибо если окажется $\det T = -1$, то это будет означать, что мы перешли от правой системы координат к левой системе координат. Очевидно, что в качестве матрицы преобразования координат можно принять матрицу:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя сформированную матрицу T в соотношение (8), получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} z' \\ y &= y' \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что при таком преобразовании ось Oy остается на месте, а исходная система координатных осей поворачивается вокруг неё на некий угол α (рис.1).

Напомним формулы преобразования координат при повороте координатных осей (рис.2):

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

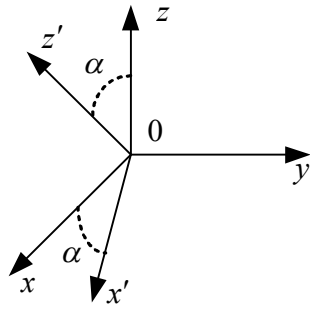


Рисунок 1.

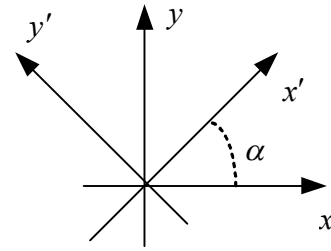


Рисунок 2.

Откуда следует, что $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. угол поворота $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Найдем теперь матрицу нашей квадратичной формы относительно новой системы координат $0x'y'z'$ - матрицу $B = T^T \cdot A \cdot T$:

$$\begin{aligned} T^T \cdot A \cdot T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, квадратичная форма относительно новой системы координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi'(x', y', z') &= (X')^T \cdot B \cdot X' = \\ &= (x', y', z') \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^2 - 3y'^2 - z'^2. \end{aligned}$$

Это означает, что в новой системе координат данное уравнение поверхности 2-го порядка $2xz - 3y^2 = 0$ имеет вид:

$$x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 0.$$

Что можно записать так:

$$x'^2 = 3y'^2 + z'^2.$$

Ясно, что это конус с вершиной в начале координат, вытянутый вдоль оси $0x'$ (рис.3).

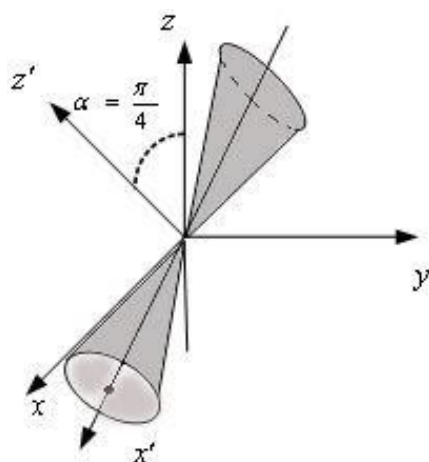


Рисунок 3.

Варианты задания 6

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Сделать рисунок.

1. $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - 1 = 0$
2. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 + 3 = 0$
3. $3x^2 - 2yz = 0$
4. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 + 3 = 0$
5. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 - 3 = 0$
6. $x^2 + 3xz + y^2 + z^2 = 0$
7. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 - 15 = 0$

8. $x^2 - y^2 - yz - z^2 - 6 = 0$
9. $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4z^2 - 20 = 0$
10. $x^2 + 8xy + y^2 + z^2 = 0$
11. $2xy - 5z^2 - 4 = 0$
12. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 - 3 = 0$
13. $3x^2 - 2yz - 6 = 0$
14. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 - 3 = 0$
15. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 3 = 0$
16. $2x^2 + 6xz + 2y^2 + 2z^2 + 5 = 0$
17. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 + 15 = 0$
18. $x^2 + 4xz + 2y^2 + z^2 = 0$
19. $2xy - 5z^2 + 4 = 0$
20. $x^2 - y^2 - yz - z^2 + 6 = 0$
21. $x^2 + 8xy + y^2 + z^2 - 15 = 0$
22. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 = 0$
23. $3x^2 - 2yz + 6 = 0$
24. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 = 0$
25. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 = 0$
26. $2x^2 + 6xz + 2y^2 + 2z^2 + 1 = 0$
27. $x^2 + y^2 + 3xz + z^2 - 3 = 0$
28. $x^2 + 4xz + 5y^2 + z^2 = 0$
29. $2xy - 5z^2 = 0$
30. $x^2 - y^2 - yz - z^2 = 0$

Задание 7. Поверхности второго порядка

Пример выполнения задания 7

Поверхностями второго порядка являются: эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперboloиды, эллиптические параболоиды и конусы, эллиптические, параболические и гиперболические цилиндры, гиперболические параболоиды. В общем случае произвольного расположения этих поверхностей относительно координатных осей уравнения этих поверхностей имеют вид (a_{ik}, b_i, c – числовые коэффициенты):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

При симметричном расположении поверхностей относительно координатных осей их уравнения (они называются каноническими) приобретают вид:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид;
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный эллиптический гиперboloид;
3. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – двуполостный эллиптический гиперboloид;
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – эллиптический конус;
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ – эллиптический параболоид;
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр;
7. $y^2 = 2px$ – параболический цилиндр;
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр;

$$9. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad - \quad \text{гиперболический параболоид.}$$

Это канонические уравнения поверхностей второго порядка, “вытянутых” вдоль оси OZ .

Легко сообразить, как выглядят канонические уравнения поверхностей, “вытянутых” вдоль осей OX и OY . Поверхности с уравнениями 1 – 6 при $b = a$ называют поверхностями вращения.

В задании приведены поверхности, ограничивающие в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Следует назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе. Уравнения поверхностей либо уже имеют форму канонических уравнений, либо приводятся к ним путем сдвига вдоль координатной оси и (или) избавления от радикалов путем возведения уравнения в квадрат.

Пример.

Приведенные поверхности ограничивают в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Следует назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (0 \leq y \leq 4), \quad y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}.$$

В плоскости Oxz уравнение $x^2 + z^2 = 4$ задает окружность радиуса 2 с центром в начале координат. В пространстве этому уравнению соответствует цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны Oy , а направляющей служит вышеупомянутая окружность. Неравенство $0 \leq y \leq 4$ указывает, что берется часть этой поверхности, ограниченная плоскостями $y = 0$ и $y = 4$.

Рассмотрим уравнение $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$. Возведя в квадрат левую и правую части, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Это сфера радиуса $r = 2$ с

центром в начале координат. Значит, уравнение $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$ задает левую половину сферы.

Наконец, уравнение $y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}$ преобразуем так:

$$(y - 6)^2 = (-\sqrt{x^2 + z^2})^2.$$

Получим $x^2 + z^2 = (y - 6)^2$ - это конусс вершиной в точке $M(0; 6; 0)$, вытянутый вдоль оси Oy .

Уравнение $y = 6 - \sqrt{x^2 + z^2}$ задает левую его часть.

А теперь только остается нарисовать тело, ограниченное рассмотренными поверхностями (рис.1):

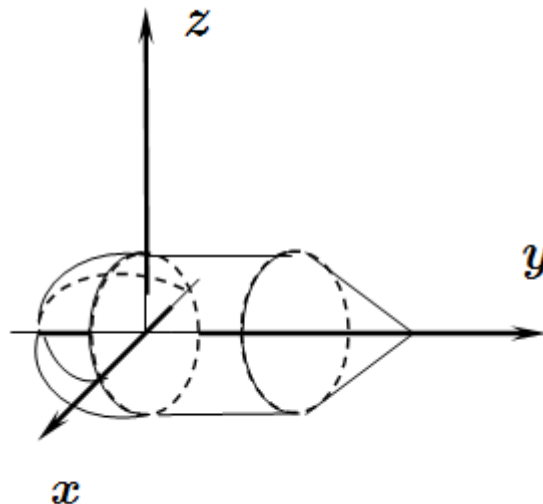


Рисунок 1

В плоскости XOZ сечение представляет собой окружность с центром в точке O радиуса 2.

Варианты задания 7

Приведенные поверхности ограничивают в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Следует назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе.

1. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$
 b) $y = x^2 + z^2$, $y = 4$
 c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = -1 + x^2 + y^2$, $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$
2. a) $z = x^2 + y^2$, $z = 4$
 b) $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $y = 0$
 c) $z = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $z = -1 + x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$,
 $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$;
3. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 4$
 b) $x^2 + z^2 = 4$ ($0 \leq y \leq 4$), $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $y = 4$
 c) $z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$;
4. a) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2 - y$, $z = 0$
 b) $y^2 = x^2 + z^2$, $y = -2$, $y = 4$
 c) $z = (1 + (x^2 + y^2)/2)/2$, $x^2 + y^2 = 2$, $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$;
5. a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = y$ ($z \leq y$)
 b) $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 4$
 c) $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$; $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$;
6. a) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = -2$, $z = 4$
 b) $x^2 + z^2 = 4$, $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $y = -4$

$$c) z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 2, z = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right);$$

$$7. a) z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = -2\sqrt{x^2 + y^2} + 4$$

$$b) y = x^2 + z^2 - 4, y = 0$$

$$c) z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 2, z = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right);$$

$$8. a) z = x^2 + y^2 - 4, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$b) x^2 + z^2 = 4, z = 6 - y, y = 0$$

$$c) z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \\ z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$9. a) x^2 + y^2 = 4, z - y = 4, z = 0$$

$$b) z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 4 - x^2 - y^2$$

$$c) z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$10. a) z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$$

$$b) x^2 + z^2 = 1, z = 1 - y, y = 0$$

$$c) z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = -1 + x^2 + y^2, z = 1 - x^2 - y^2, z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$11. a) x^2 + y^2 = 4, z = y + 2, z = 0$$

$$b) y = -2\sqrt{x^2 + z^2}, y = -4 - \sqrt{4 - x^2 - z^2}$$

$$c) z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$12. a) z = x^2 + y^2, z = 8 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$b) y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$$

$$c) z = -1 + x^2 + y^2, z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2};$$

$$13. a) x^2 + y^2 - z = 0, z = 2 - y$$

$$b) x^2 + z^2 = 4, z + y = 4, y = 0$$

$$c) z = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z = -1 + x^2 + y^2, z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2};$$

$$14. a) z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$b) x^2 + z^2 = 4, y = x^2 + z^2 - 4, y = 3$$

$$c) z = -1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1};$$

$$15. a) z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$$

$$b) x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = \pm 4$$

$$c) z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = 1 - x^2 - y^2;$$

$$16. a) z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - x^2 - y^2$$

$$b) x^2 + z^2 = 4, z = 2 + y, y = 2 - z$$

$$c) z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2};$$

$$17. a) z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = x^2 + y^2 - 4, y = 0 (y \leq 0)$$

$$b) x^2 + z^2 = 4, y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, y = -4$$

$$c) z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 2, z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1};$$

18. a) $x^2 + y^2 = 4, z = 8 - x^2 - y^2, z = 0$

b) $x^2 + z^2 = 4, z = 4 + y, y = 0$

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 2, z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1};$

19. a) $z = x^2 + y^2 - 8, z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$

b) $x^2 + z^2 = 4, y = \sqrt{x^2 + z^2} - 2, y = 2$

c) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = -(1 + \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + y^2} - 1), z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2};$

20. a) $z = x^2 + y^2, z = 2 - x^2 - y^2$

b) $y = 2\sqrt{x^2 + z^2} - 4, y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, x^2 + y^2 = 2, z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2};$

21. a) $z = 4 - x^2 - y^2, z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) $x^2 + z^2 = 4, z = -y, z = y + 4$

c) $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 2, z = -3 + x^2 + y^2;$

22. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$

b) $x^2 + z^2 = 4, y = 4 - x^2 - z^2, y = -4$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, x^2 + y^2 = 2, z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2};$

23. a) $2y = x^2 + z^2 + y^2, y + z = 1 (z \leq 1 - y)$

b) $y = x^2 + z^2 - 4, y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$

c) $z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 2, z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2};$

24. a) $x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + 4, z = 0$

b) $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, y = -\sqrt{x^2 + z^2} + 2$

c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z = 1 - x^2 - y^2; z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2};$

25. a) $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) $x^2 + z^2 = 4, z = y + 6, y = 6$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z = -1 + x^2 + y^2, z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

26. a) $z^2 = x^2 + y^2, z = 2, z = 4$

b) $x^2 + z^2 = 4, y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, y = 4$

c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2};$

27. a) $z = 4 - x^2 - y^2, z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2, z = 0$

c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = -1 + x^2 + y^2, z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1};$

28. a) $z = x^2 + y^2, z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $y^2 = x^2 + z^2, y = -4, y = 2$

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = -1 + x^2 + y^2, z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2};$

29. a) $x^2 + y^2 = 4, z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 4$

b) $y = -2 + \sqrt{x^2 + z^2}, y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$

$$c) z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = -1 + x^2 + y^2, z = -1 + x^2 + y^2 ;$$

$$30. a) z = 4 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$$

$$b) y = \sqrt{9 - x^2 - z^2} + 3, x^2 + z^2 = 9, y = 0$$

$$c) z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2} .$$



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г. Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).