

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра механики

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические указания к самостоятельной работе
для студентов специальности 130400*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

3. РАСЧЕТ ВАЛА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ И УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

На рис.15 приведен чертеж одного из вариантов компоновки вала, передающего вращающий момент $M = 1$ кНм от одного шкива (колеса) к другому. Вал закреплен в двух подшипниках качения, радиальном A (шарнирно-подвижная опора, условно обозначенная ПО) и радиально-упорном B (шарнирно-неподвижная опора, услов-

но обозначенная НО), располагающихся в сечениях 2 и 4 соответственно. В сечении 1 находится ведомый шкив диаметра $D_1 = 0.4$ м, представляющий собой косозубое зубчатое колесо, входящее в зацепление с другим колесом в составе зубчатой передачи в точке (полусе), определяемой углом $\alpha_1 = 30^\circ$. Ведущий шкив диаметра $D_2 = 0.5$ м, находящийся в сечении 3, включен в плоскоременную передачу с углом наклона ветвей ремня к горизонту $\alpha_2 = 60^\circ$.

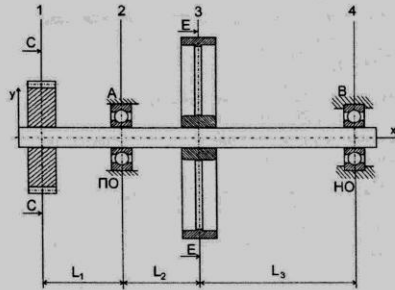


Рис. 15. Чертеж вала.

Изобразим в аксонометрии схему приложения внешних сил к валу (см. рис. 16). Для упрощения дальнейших расчетов приведем к оси вала внешние силы, приложенные в точках, не лежащих на оси вала, при этом сразу будем раскладывать их на составляющие, направленные вдоль координатных осей.

Приведем к оси вала силы, не лежащие на ней.

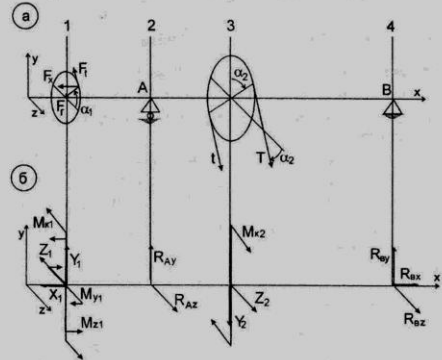


Рис. 16. Схема приложения внешних сил к валу

Рассмотрим зубчатое зацепление (см. рис. 17, а). Внешний вращающий момент $M_{к1} = M$ получается при переносе на ось вала окружной силы P_t :

$$M = P_t \frac{D_1}{2} \Rightarrow P_t = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 1}{0.4} = 5 \text{ (кН)}$$

Будем считать, что параметры зубчатой передачи таковы, что осевая и радиальная силы связаны с окружной силой следующими численными выражениями: $P_z = 0.3P_t = 1.5$ (кН), $P_r = 0.4P_t = 2$ (кН).

При параллельном переносе на ось вала осевой силы P_z , приложенной в точке зацепления на начальной окружности зубчатого колеса, возникают моменты

$$M_{y1} = P_z \frac{D_1}{2} \cos \alpha_1 = 1.5 \cdot \frac{0.4}{2} \cdot \cos 30^\circ = 0.26 \text{ (кНм)}$$

$$M_{z1} = P_z \frac{D_1}{2} \sin \alpha_1 = 1.5 \cdot \frac{0.4}{2} \cdot \sin 30^\circ = 0.15 \text{ (кНм)}$$

сама же сила остается неизменной $X_1 = P_t = 1.5$ (кН).

При переносе радиальной силы P_r не возникает моментов, т.к. она действует вдоль радиуса окружности и, следовательно, пересекает ось вала.

Для удобства дальнейших расчетов разложим P_t и P_r на составляющие по осям y и z и просуммируем их (см. рис. 17, б):

$$Y_1 = P_t \cos 30^\circ - P_r \sin 30^\circ = 5 \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ = 3.33 \text{ (кН)}$$

$$Z_1 = P_t \sin 30^\circ + P_r \cos 30^\circ = 5 \sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ = 4.23 \text{ (кН)}$$

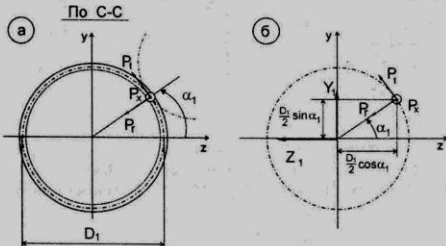


Рис. 17. Силы в зубчатом зацеплении.

Рассмотрим ременную передачу (см. рис. 18, а). Внешний вращающий момент $M_{к2} = M$, возникающий при переносе сил натяжения ремней на ось вала равен: $M = T \cdot D_2/2 - t \cdot D_2/2$. Принимаем соотношение между силами натяжения набегающей и сбегавшей ветвей ремня $T = 2t$, отвечающее некоторым заданным параметрам ременной передачи. Тогда получим

$$M = t \frac{D_2}{2} \Rightarrow t = \frac{2M}{D_2} = 4 \text{ (кН)}, T = 2t = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (кН)}$$

Суммарная сила давления шкива на ось вала направлена под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ к горизонту и равна $P = T + t = 12$ (кН) (см. рис. 18, б). Ее составляющие $Y_2 = P \cdot \sin \alpha_2 = 10.4$ (кН), $Z_2 = P \cdot \cos \alpha_2 = 6$ (кН)

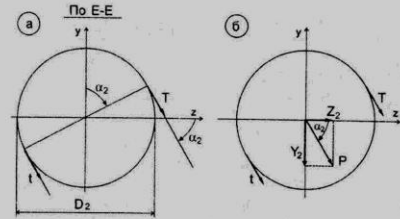


Рис. 18. Силы в ременной передаче.

Теперь все внешние силы приведены к оси вала. В соответствии с принципом суперпозиции, рассмотрим по отдельности внешние нагрузки, соответствующие разным видам деформации (рис. 19).

Силы, действующие вдоль оси вала, обуславливают деформацию растяжения. Найдем горизонтальную реакцию $\Sigma X = -X_1 + R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = X_1 = 1.5$ (кН)

Вычислим продольные силы на участках вала. Очевидно, внешние продольные силы, действующие по одну сторону от сечения на любом участке вала, одинаковы и равны X_1 или R_{Ax} , поэтому $N_{x1} = N_{x2} = N_{x3} = 1.5$ (кН) (эпюра на рис. 19, а).

Построим эпюру крутящего момента (рис.19, б), учитывая, что на 1 и 2 участке по одну сторону от любого сечения находятся внешние моменты M_{k1} или M_{k2} , а на 3 участке (справа) - ничего:

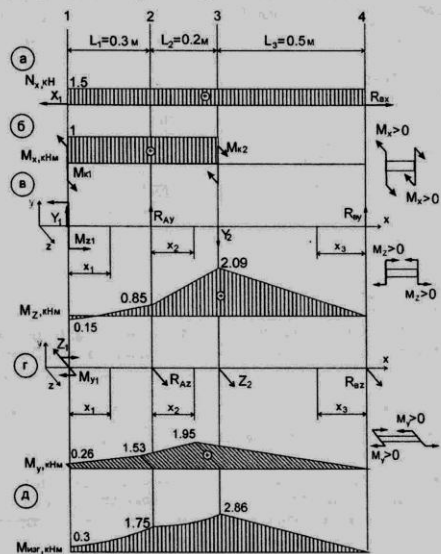


Рис.32. Эпюры внутренних усилий.

$$M_{x1} = M_{x2} = M_{x1} = M_{x2} = 1 \text{ (кНм)}, M_{x3} = 0.$$

36

Рассмотрим плоский изгиб, связанный с силами, действующими в вертикальной плоскости (рис.19, в). Вертикальные реакции находятся из уравнений равновесия:

$$\sum M_{z(A)}: -Y_1 \cdot 0.3 + M_{z1} - Y_2 \cdot 0.2 + R_{By} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow R_{By} = \frac{3.33 \cdot 0.3 - 0.15 + 10.4 \cdot 0.2}{0.7} = 4.18 \text{ (кН)}$$

$$\sum M_{z(B)}: -Y_1 \cdot 1 + M_{z1} + Y_2 \cdot 0.5 - R_{Ay} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{-3.33 \cdot 1 + 0.15 + 10.4 \cdot 0.5}{0.7} = 2.89 \text{ (кН)}$$

$$\text{Статическая проверка: } \sum Y: R_{Ay} + R_{By} + Y_1 - Y_2 = 0.$$

Эпюра изгибающего момента M_z строится по алгоритму метода сечений с учетом правила знаков (см. рис.19, в). На трех участках выбираются произвольные сечения, расстояния до которых обозначаются x_1, x_2, x_3 :

$$0 \leq x_1 \leq L_1 = 0.3 \text{ м}, M_z(x_1)_{\text{слева}} = Y_1 \cdot x_1 - M_{z1} = 3.33x_1 - 0.15, M_z(0) = -0.15 \text{ (кНм)}; M_z(0.3) = 0.85 \text{ (кНм)}$$

$$0 \leq x_2 \leq L_2 = 0.2 \text{ м}, M_z(x_2)_{\text{слева}} = Y_1 \cdot (x_2 + L_1) - M_{z1} + R_{Ay} \cdot x_2 = 6.22x_2 + 0.85, M_z(0) = 0.85 \text{ (кНм)}; M_z(0.2) = 2.09 \text{ (кНм)}$$

$$0 \leq x_3 \leq L_3 = 0.5 \text{ м}, M_z(x_3)_{\text{справа}} = R_{By} \cdot x_3 = 4.18 \cdot x_3, M_z(0) = 0; M_z(0.5) = 2.09 \text{ (кНм)}$$

Силы, действующие в горизонтальной плоскости, представлены на рис.19, г. Уравнения равновесия:

$$\sum M_{y(A)}: -Z_1 \cdot 0.3 - M_{y1} - Z_2 \cdot 0.2 - R_{Bz} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow R_{Bz} = \frac{4.23 \cdot 0.3 + 0.26 + 6 \cdot 0.2}{0.7} = -3.9 \text{ (кН)}$$

$$\sum M_{y(B)}: -Z_1 \cdot 1 - M_{y1} + Z_2 \cdot 0.5 + R_{Az} \cdot 0.7 = 0 \Rightarrow R_{Az} = \frac{4.23 \cdot 1 + 0.26 - 6 \cdot 0.5}{0.7} = 2.13 \text{ (кН)}$$

37

$$\Rightarrow R_{Az} = \frac{4.23 \cdot 1 + 0.26 - 6 \cdot 0.5}{0.7} = 2.13 \text{ (кН)}$$

Проверим найденные реакции: $\sum Z = R_{Az} + R_{Bz} - Z_1 + Z_2 = 0$. Эпюра M_y также строится по алгоритму метода сечений:

$$0 \leq x_1 \leq L_1 = 0.3 \text{ м}, M_y(x_1)_{\text{слева}} = Z_1 \cdot x_1 + M_{y1} = 4.23x_1 + 0.26, M_y(0) = 0.26 \text{ (кНм)}; M_y(0.3) = 1.53 \text{ (кНм)}$$

$$0 \leq x_2 \leq L_2 = 0.2 \text{ м}, M_y(x_2)_{\text{слева}} = Z_1 \cdot (x_2 + L_1) + M_{y1} - R_{Az} \cdot x_2 = 2.1x_2 + 1.53, M_y(0) = 1.53 \text{ (кНм)}; M_y(0.2) = 1.95 \text{ (кНм)}$$

$$0 \leq x_3 \leq L_3 = 0.5 \text{ м}, M_y(x_3)_{\text{справа}} = -R_{Bz} \cdot x_3 = 3.9 \cdot x_3, M_y(0) = 0, M_y(0.5) = 1.95 \text{ (кНм)}$$

Эпюру M_y построим в плоскости xz (см. рис.19, г).

Поскольку сечение вала круглое, в нем будет происходить плоский изгиб в плоскости, перпендикулярной суммарному вектору изгибающего момента $M_{\text{рез}}$. Определим опасное сечение, построив эпюру

$$M_{\text{рез}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

(рис.19, д). Заметим, что эта эпюра очерчена по кривой на участках 1 и 2, а на участке 3, где моменты M_y и M_z равны нулю на одном из концов, - по прямой.

Сопоставляя эпюры M_x и $M_{\text{рез}}$, находим опасное сечение - это сечение 3 слева (см. рис.20). Внутренние усилия в нем: $N_x = 1.5 \text{ кН}$, $M_x = 1 \text{ кНм}$, $M_y = 1.95 \text{ кНм}$, $M_z = 2.09 \text{ кНм}$, $M_{\text{рез}} = 2.86 \text{ кНм}$.

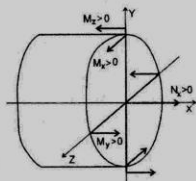


Рис.20. Внутренние усилия.

38

Первоначальный подбор сечения по 3-ей теории прочности без учета продольной силы производится по формуле:

$$R \geq \sqrt{\frac{4\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1^2 + 1.95^2 + 2.09^2}}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.0289 \text{ (м)}$$

Диаметр сечения $d = 2R = 0.0578 \text{ м} = 57.8 \text{ мм}$, округляя его до ближайшего большего стандартного значения по ГОСТ 3478-79 (см. п. 7 в задании), принимаем $d = 60 \text{ мм} = 0.060 \text{ м}$. Вычислим геометрические характеристики сечения:

$$\text{площадь } F = \frac{\pi d^2}{4} = 2.83 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^2\text{)},$$

$$\text{осевой момент сопротивления } W = \frac{\pi d^3}{32} = 2.12 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^3\text{)},$$

$$\text{полярный момент сопротивления } W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 4.24 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Вычислим нормальные напряжения в точках B и C, наиболее удаленных от нейтральной оси (см. рис.21):

$$\sigma_B = \frac{N_x}{F} + \frac{M_{\text{рез}}}{W} = \frac{1.5 \cdot 10^3}{2.83 \cdot 10^{-3}} + \frac{2.86 \cdot 10^3}{2.12 \cdot 10^{-5}} = 0.5 + 134.8 = 135.3 \text{ (Мпа)}$$

$$\sigma_C = \frac{N_x}{F} - \frac{M_{\text{рез}}}{W} = 0.5 - 134.8 = -134.3 \text{ (Мпа)}$$

Касательные напряжения во всех точках контура равны:

$$\tau_B = \tau_C = \tau_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{1 \cdot 10^3}{4.24 \cdot 10^{-5}} = 23.6 \text{ (Мпа)}$$

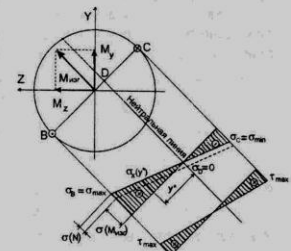


Рис.21. Эпюры напряжений в опасном сечении

39

Эквивалентное напряжение в опасной точке B (см. рис.21) по третьей теории прочности равно:

$$\sigma_{экв B} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = \sqrt{135.3^2 + 4 \cdot 23.6^2} = 143.3 \text{ (МПа)} < [\sigma].$$

Как видно, диаметр, подобранный без учета продольной силы N_x , удовлетворяет условию прочности.

Рассмотрим напряженное состояние элемента материала, выделенного из боковой поверхности вала в окрестности опасной точки (см. рис.22): $\sigma_x = 135.3$ (МПа), $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 23.6$ (МПа).

Главные напряжения вычислим по формулам:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{135.3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{135.3^2 + 4 \cdot 23.6^2} = 67.65 \pm 71.65 = 139 \text{ МПа} / -4 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом нумерации главных напряжений $\sigma_1 = 139.3$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -4$ МПа.

Положение главных площадок определяется углом α_0 :

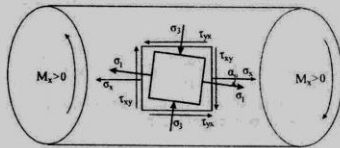


Рис.22. Напряженное состояние элемента материала боковой поверхности.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 23.6}{135.3} = -0.349 \Rightarrow \alpha_0 = -9.6^\circ.$$

Главные площадки и главные напряжения представлены на рис.22.

Проведем теперь расчет на усталостную прочность. При вращении вала нормальные напряжения изменяются от $\sigma_{\max} = \sigma_B = 135.3$ (МПа) до $\sigma_{\min} = \sigma_C = -134.3$ (МПа) (см. рис.23).

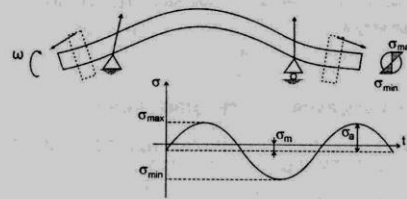


Рис.23. Циклические напряжения в вале.

Среднее напряжение цикла σ_m равно нормальному напряжению от продольной силы, постоянному по всей площади сечения, амплитудное же значение напряжения σ_a связано с линейно изменяющимися по высоте сечения нормальными напряжениями от изгиба:

$$\sigma_m = \frac{N}{A} = 0.5 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = \frac{M_{изг}}{W} = 134.8 \text{ МПа}.$$

Вычислим приведенную амплитуду циклических напряжений (заданы коэффициенты $K_\sigma = 2.1$, $K_f = 0.9$, $K_d = 0.7$, причем K_d можно определить по $d = 60$ мм (см. таблицу 4.1):

$$\sigma_a^* = \frac{K_\sigma}{K_f \cdot K_d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m = \frac{2.1}{0.9 \cdot 0.7} \cdot 134.8 + 0.5 \cdot 0.5 = 449.58 \text{ (МПа)}.$$

Здесь принято соотношение $\psi_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_a = 0.5$.

Теперь, считая предел выносливости равным $\sigma_{-1} = 300$ МПа, определим коэффициент запаса по усталостной прочности:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} = \frac{300}{449.58} = 0.667 \leq [S] = 1.7.$$

Как видно, условие усталостной прочности $S_\sigma \geq [S]$ не выполняется.

Поскольку нормальные напряжения обратно пропорциональны d^3 , увеличим диаметр в γ раз ($\gamma = \sqrt[3]{1.7/0.667} = 1.37$) и округлим его до ближайшего стандартного значения:

$$d = 1.37 \cdot 60 = 82.2 \text{ (мм)} \Rightarrow d = 85 \text{ (мм)}.$$

ЗАДАНИЕ 3. РАСЧЕТ ВАЛА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ И УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

На рис.24,а приведен чертеж одного из вариантов компоновки вала. Вал закреплен в двух подшипниках, из которых один является неподвижной шарнирной опорой (НО), а другой - подвижной (ПО). На валу закреплены два шкива: ведомый диаметра D_1 и ведущий диаметра D_2 . Ведущий шкив включен в плоскоремennую передачу с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_2 (рис.24, в) и передает момент M . Ведомый шкив представляет собой зубчатое колесо, находящееся в зацеплении с другим зубчатым колесом в точке, определяемой углом α_1 (рис.24, б). Исходные данные по таблице 3.

1. Начертить в аксонометрии схему вала, соблюдая масштаб.
2. Определить силы давления шкивов на вал, приняв
 - а) для зубчатого колеса радиальная сила $P_r = 0.4 \cdot P_t$, осевая сила $P_x = 0.3 \cdot P_t$, где P_t – окружная сила;
 - б) для плоскоремennой передачи $T = 2f$.

45

3. Перенести внешние силы на ось вала, добавив, если нужно, соответствующие моменты. Для удобства разложить внешние силы на составляющие по осям y и z .

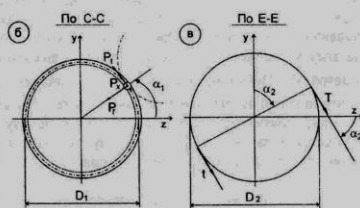
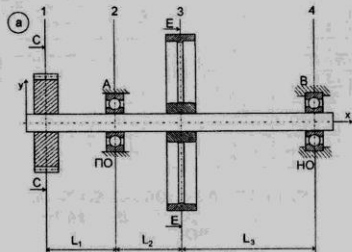


Рис.24. Чертеж компоновки вала.

4. Построить эпюру продольной силы N_x .
5. Построить эпюру крутящего момента M_x .

46

6. Построить эпюры изгибающих моментов M_y в горизонтальной плоскости и M_z в вертикальной плоскости, а также эпюру суммарных изгибающих моментов.

Таблица 3

| A | M, кНм | D1, м | D2, м | B | Сечения, где находятся | | | C | L1, м | L2, м | L3, м |
|---|--------|-------|-------|---|------------------------|----|----|---|-------|-------|-------|
| | | | | | D1 | D2 | HO | | | | |
| 0 | 1.2 | 0.3 | 0.4 | 0 | 1 | 3 | 4 | 0 | 0.2 | 0.5 | 0.3 |
| 1 | 0.8 | 0.4 | 0.2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 0.3 | 0.5 | 0.2 |
| 2 | 0.9 | 0.2 | 0.3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| 3 | 1.0 | 0.4 | 0.5 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 0.2 | 0.6 | 0.2 |
| 4 | 1.4 | 0.2 | 0.7 | 4 | 1 | 3 | 2 | 4 | 0.4 | 0.6 | 0.2 |
| 5 | 1.6 | 0.4 | 0.8 | 5 | 4 | 1 | 3 | 5 | 0.1 | 0.6 | 0.3 |
| 6 | 1.3 | 0.4 | 0.6 | 6 | 4 | 2 | 3 | 6 | 0.2 | 0.4 | 0.6 |
| 7 | 1.5 | 0.3 | 0.5 | 7 | 3 | 1 | 4 | 7 | 0.3 | 0.5 | 0.4 |
| 8 | 1.8 | 0.3 | 0.4 | 8 | 3 | 1 | 2 | 8 | 0.2 | 0.6 | 0.4 |
| 9 | 2.0 | 0.4 | 0.5 | 9 | 4 | 3 | 1 | 9 | 0.4 | 0.4 | 0.2 |

7. Определить опасное сечение и подобрать диаметр сплошного вала по третьей теории прочности (принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$), округлив его до ближайшего стандартного значения в мм по ГОСТ 3478-79: 10, 12, 15, 17, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 120, 130, 140, 150.

8. В опасном сечении построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений.

9. Для элемента, выделенного из боковой поверхности вала в окрестности опасной точки, определить положение главных площадок и значение главных напряжений, показать их на рисунке.

10. Для опасного сечения провести усталостный расчет:
а) найти амплитудное и среднее напряжения цикла, начертить график зависимости $\sigma(t)$;

б) вычислить приведенную амплитуду нормальных напряжений σ_{σ}^* , считая $\sigma_{-1} = 300 \text{ МПа}$, $\psi_{\sigma} = 0.5$, K_{σ} и K_F взять из табли-

47

цы 5, а K_d выбрать в соответствии с найденным в п.7 диаметром по таблице 4 (для промежуточных значений используйте линейную интерполяцию).

в) вычислить коэффициент запаса $S_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_a^*$ и, если он окажется меньше нормативного значения ($S_\sigma < [S_\sigma] = 1.7$), увеличить диаметр вала в γ раз, где $\gamma = \sqrt[3]{[S_\sigma] / S_\sigma}$.

Таблица 4

| | | | | | | | |
|-----------------|----|------|------|------|------|------|------|
| $d, \text{ мм}$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 60 | 100 | 200 |
| K_d | 1 | 0,93 | 0,86 | 0,78 | 0,70 | 0,60 | 0,50 |

Таблица 5

| | | | | | | | | | | |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| D | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $\alpha_1, ^\circ$ | 30 | 45 | 20 | 30 | 45 | 60 | 45 | 60 | 20 | 30 |
| $\alpha_2, ^\circ$ | 20 | 45 | 35 | 45 | 40 | 30 | 30 | 45 | 60 | 45 |
| K_σ | 2.12 | 2.01 | 2.32 | 2.56 | 2.50 | 2.14 | 2.26 | 2.88 | 2.47 | 2.68 |
| K_F | 0.92 | 0.93 | 0.84 | 0.88 | 0.87 | 0.95 | 0.91 | 0.89 | 0.94 | 0.86 |