# ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ, ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ВЫБОР СЕЧЕНИЙ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

## 1. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Деформация изгиба стержня возникает от внешних сил, действующих в осевой плоскости и перпендикулярных продольной его оси. Если все внешние силы расположены в одной из главных плоскостей*, то изгиб называется плоским (или прямым).

Если плоскость действия внешних сил не совпадает ни с одной из главных плоскостей, то изгиб называется косым.

В дальнейшем будем рассматривать только плоский изгиб.

Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. Балки могут иметь следующие виды опор:

1) шарнирно-подвижную;
2) шарнирно-неподвижную;
3) жесткая заделка (или защемление).

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1, а) не препятствует вращению опорного сечения балки и его перемещению в горизонтальном направлении. Реакция такой опоры проходит через центр шарнира и направлена перпендикулярно к опорной плоскости.

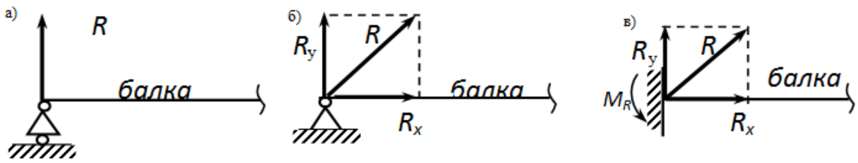



Рис. 1

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1, б) допускает вращение опорного сечения балки, но препятствует его горизонтальному

---

* **Главная плоскость –** плоскость, проходящая через продольную ось стержня и одну из главных осей поперечного сечения.

перемещению. Реакция $R$ такой опоры может иметь любое направление, перпендикулярное к оси шарнира. Эта реакция раскладывается на две составляющие: вертикальную ($R_y$) и горизонтальную ($R_x$).

Жесткая заделка (рис. 1, в) не допускает ни поворота, ни перемещения опорного сечения балки. В жесткой заделке возникают вертикальная $R_y$, горизонтальная реакция $R_x$ и реактивный момент $M_R$.

Внешние силы, действующие на балку, вызывают в ее поперечных сечениях нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения могут быть приведены к паре сил – изгибающему моменту, касательные напряжения можно заменить сосредоточенным усилием, называемым перерезывающей силой. Величина изгибающего момента $M$ в каком-либо сечении балки равна алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести этого сечения. Величина перерезывающей силы $Q$ в каком-либо сечении балки равна алгебраической сумме проекций на нормаль к продольной оси балки всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

При вычислении перерезывающих сил и изгибающих моментов принято считать положительными: момент, изгибающий балку выпуклостью вниз независимо от места его приложения, и поперечную силу, направленную вверх, если рассматривается часть балки слева от проведенного сечения, и поперечную силу, направленную вниз, если рассматривается часть балки справа от рассматриваемого сечения.

В общем случае, изгибающий момент и перерезывающая сила меняются по длине балки. Чтобы иметь наглядное представление об изменении этих величин, строят графики, называемые эпюрами перерезывающих сил и изгибающих моментов. Чтобы построить эпюры $Q$ и $M$, надо составить уравнения этих эпюр на каждом грузовом участке балки, т.е. на отрезке балки, на котором внешняя нагрузка изменяется по некоторому закону. Границами грузовых участков являются сечения, в которых характер вешней нагрузки изменяется.

При построении эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов следует:

1) для упрощения расчета рассматривать часть балки по ту сторону от проведенного сечения, на которую действует меньшее число внешних сил;

2) распределенную нагрузку заменить силой, численно равной площади эпюры этой нагрузки в пределах рассматриваемой части балки и приложенной в центре тяжести этой площади;

3) по определению перерезывающей силы в сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, на эпюре $Q$ должен быть скачок на величину этой силы в направлении ее действия;

4) по определению изгибающего момента в сечении, в котором приложен сосредоточенный момент, на эпюре $M$ должен быть скачок на величину этого момента в направлении его действия;

5) эпюра $Q$ не меняется в точках приложения сосредоточенных моментов.

При построении эпюр $Q$ и $M$ следует руководствоваться дифференциальными зависимостями между $Q$ и $M$ интенсивностью распределенной нагрузки $q$ [1,2,3,4]:

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}, \tag{1}$$

а также следующими положениями, вытекающими из них:

1. На участках балки, где нет распределенной нагрузки ($q=0$) эпюра $Q$ ограничена прямой, параллельной нулевой линии эпюры ($Q$ = const), а эпюра $M$ – наклонной прямой, тангенс угла наклона которой к нулевой линии равен $Q$.

2. На грузовых участках балки, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой ($q$ = const), эпюра $Q$ ограничена наклонной прямой, тангенс угла наклона которой к нулевой линии равен $q$, а эпюра $M$ - параболой, направленной своей выпуклостью навстречу действия распределенной нагрузки.

3. В поперечном сечении балки, где перерезывающая сила равна нулю ($Q$ = 0), изгибающий момент имеет экстремум (максимум или минимум): если $Q$ меняет знак с плюса на минус (при рассмот-

рении балки слева направо), то $M = max$, если с минуса на плюс, то $M = min$.

4. Если на границе соседних участков балки эпюра $Q$ имеет скачок, то линии, ограничивающие эпюру $M$ на этих участках, сопрягаются с переломом, т. е. не имеют общей касательной в точке сопряжения.

5. Изгибающий момент растет на тех участках балки, где перерезывающая сила положительна, и убывает там, где она отрицательна.

6. На каждом участке балки изменение величины $M$ между любыми двумя сечениями равно площади эпюры $Q$ между этими сечениями.

## 2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

*Пример 1.* Построить эпюры $Q$ и $M$ для балки при $P$ = 20 кН; $M_0$ = 20 кН·м; $a$ = 0,5 м; $b$ = 1,5 м (рис. 2, а).

Для определения $Q$ и $M$ в любом сечении балки необходимо задать все внешние силы, действующие на балку, т. е. приложенные нагрузки и опорные реакции.

Величину и направление опорных реакций в статически определимых балках определяют из уравнений статики. Начало координат располагают обычно в центре тяжести крайнего левого сечения, например, в точке $A$ (см. рис. 2, а), ось $Y$ направляют вертикально вверх, а ось $X$ - горизонтально вправо (по оси балки). На шарнирно-неподвижной опоре $A$ неизвестную по величине и направлению реакцию заменим двумя составляющими: $Y_A$ - вертикальной, перпендикулярной оси балки, и $X_A$ - горизонтальной, направленной по оси $X$. На шарнирно-подвижной опоре $B$ реакция $Y_B$ направлена перпендикулярно оси балки.

Для плоской системы сил, не пересекающихся в одной точке, можно составить, в общем случае, три уравнения статического равновесия. Уравнения статики составляют так, чтобы в каждое из них входила, как правило, только одна неизвестная опорная реакция. В этой задаче нужно спроектировать все силы на ось стержня и определить алгебраические суммы моментов сил относительно точек закрепления *A* и *B*. При составлении уравнений равновесия за положительное направление сил и моментов можно принимать любое, так как сумма проекций сил на любую из осей и сумма моментов всех сил относительно любой точки равны нулю. Обычно применяется следующее правило знаков: положительные направления сил соответствуют направлению координатных осей; положительное направление момента соответствует направлению движения часовой

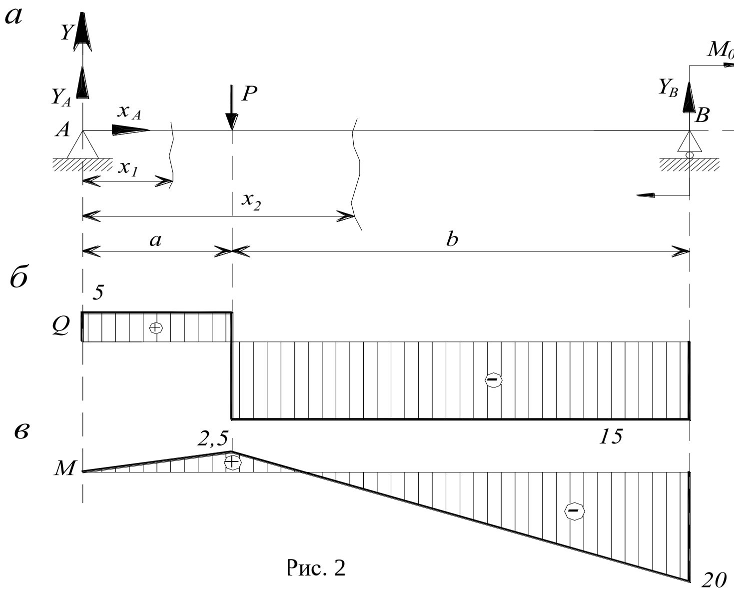



Рис. 2

стрелки. Сосредоточенный момент $M_0$, независимо от положения сечения, в котором он приложен, обязательно входит в уравнение моментов. Таким образом, можно записать следующую систему уравнений:

$$\sum X = 0, \qquad X_A = 0;$$
$$\sum M_A = 0, \quad Pa - Y_B(a+b) + M_0 = 0;$$
$$\sum M_B = 0, \quad Y_A(a+b) - Pb + M_0 = 0.$$

Решив ее при заданных исходных данных, получим $Y_A$ = 5 кН; $Y_B$ = 15 кН. Величины опорных реакций положительны, следовательно, выбранные направления их соответствуют действительным.

Для проверки составим уравнение статики, не использованное при расчете реакций, например, сумму проекций всех сил на ось $Y$:

$\sum Y = Y_A - P + Y_B = 5 - 20 + 15 = 0$.

Уравнение удовлетворяется тождественно, следовательно, реакции определены верно.

Для построения эпюр $Q$ и $M$ необходимо определить перерезывающие силы и изгибающие моменты. Данная балка имеет два грузовых участка границами, которых являются опорные сечения и сечение, где приложена сосредоточенная сила $P$. Чтобы составить выражения для $Q$ и $M$, для каждого участка проведем произвольные сечения на расстоянии $x$ от начала координат. За начало координат для каждого участка можно принять точку опоры или начало участка.

В качестве первого участка рассмотрим ту часть балки, на которую действует меньшее число приложенных нагрузок, т.е. часть балки слева от сечения. Выражения для $Q$ и $M$ составляем с учетом принятого правила знаков.

На первом участке абсцисса $x$ изменяется в пределах $0 \le x_1 \le a$. Здесь $Q_1 = Y_A$ = 5 кН. Перерезывающая сила на этом участке не зависит от $x$, т.е. постоянна по длине участка. Изгибающий момент на первом участке равен $M_1 = Y_A\, x_1$. При $x_1 = 0$, изгибающий момент равен нулю ($M_1 = 0$), а при $x_1 = a = 0{,}5$ м, следует $M_1 = Y_A\, a$ = 2,5 кН·м. На втором участке абсцисса $x$ изменяется в пределах $a \le x_2 \le (a+b)$*. На этом участке $Q_2$ = const и $Q_2 = Y_A - P = -15$ кН. На втором участке уравнение моментов имеет вид: $M_2 = Y_A\, x_2 - P\,(x_2 - a)$

* Абсцисса $x_2$ может отчитываться и от границ участка 2 (справа или слева), тогда $x_2$ будет иметь пределы $0 \le x_2 \le b$.

при $x_2 = a = 0{,}5$ м, следует: $M_2 = 2{,}5$ кН·м; а при $x_2 = a + b = 2$ м, получим: $M_2 = -20$ кН·м.

Эпюры $Q$ и $M$ строим по составленным аналитическим зависимостям, откладывая в рассмотренных сечениях найденные значения ординат; при этом положительные ординаты откладываются вверх от нулевых линий эпюр, отрицательные – вниз (рис. 2, б и в).

Как видно из рис. 1, в сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы $Y_A$, $P$ и $Y_B$, на эпюре $Q$ имеют место скачки на величину этих сил; а в опорном сечении, где приложен сосредоточенный момент $M_0$, на эпюре $M$ - скачок на величину этого момента $M_0$. Поскольку на границе участков балки эпюра $Q$ имеет скачок, то линии, ограничивающие эпюру $M$ на этих участках, сопрягаются с переломом.

*Пример 2*. Построить эпюры $Q$ и $M$ для консольной балки при $q = 10$ кН/м; $M_0 = 20$ кН·м; $l = 2$ м (рис. 3, а).

Построение эпюр $Q$ и $M$ для консольных балок рекомендуется производить, не вычисляя реакций. Если рассечь балку в любом сечении и рассматривать часть балки между сечением и свободным концом, то в выражения для $Q$ и $M$ войдут только приложенные к балке известные нагрузки.

Балка имеет два грузовых участка длиной $l/2$, левый участок назовем первым, правый - вторым. Начало координат расположим в центре тяжести крайнего левого сечения, ось $Y$ направим вертикально вверх, ось $X$ - вправо. Рассечем балку в пределах каждого грузового участка сечениями, расположенными на расстояниях $x_1$ и $x_2$ от начала координат ($x_2$ можно отсчитывать от точки приложения $M_0$).

На первом участке $x_1$ изменяется в пределах $0 \le x_1 \le l/2$. Перерезывающая сила на первом участке: $Q_1 = -q\,x_1$; где $Q_1 = 0$ при $x = 0$ и $Q_1 = -10$ кН при $x_1 = l/2 = 1$ м.

Так как перерезывающая сила зависит от $x_1$, то изгибающий момент будет зависеть от $x_1^2$. Для вычисления изгибающего момента заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $qx_1$, численно равной площади эпюры этой нагрузки в преде-

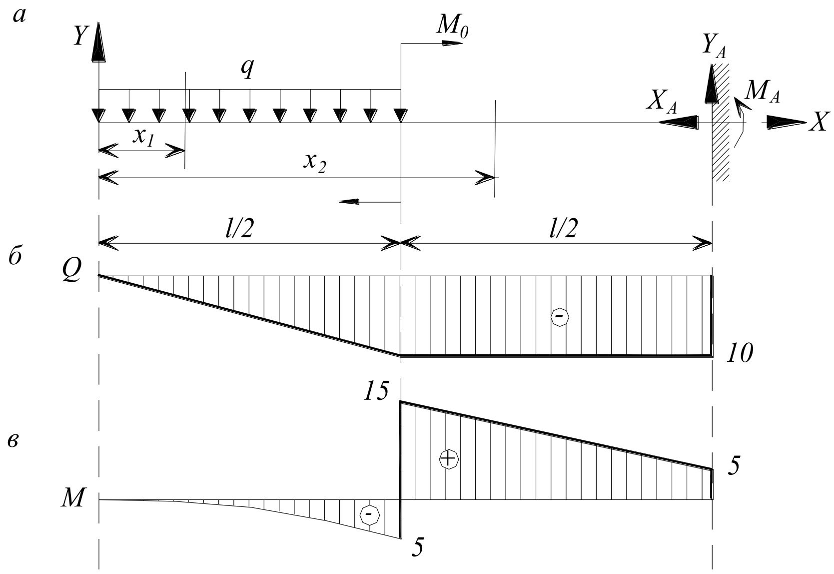



Рис. 3

лах рассматриваемой части балки и приложенной в центре тяжести площади эпюры, т. е. на расстоянии $x_1/2$ от рассматриваемого сечения.

В соответствии с принятым выше правилом знаков, изгибающий момент на первом участке изображается кривой второго порядка; $M_1 = 0$ при $x_1 = 0$ и $M_1 = -5$ кН·м при $x_1 = l/2 = 1$ м. При построении эпюры $M$ на первом участке следует иметь в виду, что выпуклость параболы должна быть направлена навстречу действию распределенной нагрузки.

На втором участке абсцисса $x_2$ изменяется в пределах $l/2 \le x_2 \le l$. Здесь перерезывающая сила: $Q_2 = -q\, l/2 = -10$ кН. Изгибающий момент на втором участке равен алгебраической сумме момента распределенной нагрузки относительно центра тяжести любого сечения, проведенного в пределах этого участка, и сосредоточенного момента. Момент распределенной нагрузки равен равнодействующей этой нагрузки $q{\cdot}l/2$, умноженной на расстояние от точки ее приложения до центра тяжести проведенного сечения $x_2 - l/4$. Следовательно, на втором участке: $M_2 = -ql(x_2 - l/4) + M_0$, при $x_2 = l/2$, следует $M_2$ = 15 кН·м; а при $x_2 = l$, следует: $M_2$ = 5 кН·м.

Для проверки правильности построения эпюр $Q$ и $M$ (см. рис. 3, б и в) используем изложенные выше правила построения эпюр. Площади эпюр $Q$ на каждом из грузовых участков должны быть равны разности моментов в граничных сечениях этих участков. На первом участке площадь эпюры $Q$ равна 5 кН·м, разность моментов в граничных сечениях этого участка также равна 5 кН·м. На втором участке площадь эпюры $Q$ равна 10 кН·м, что равно разности моментов на границах этого участка. Следовательно, построение эпюр удовлетворяет указанному правилу. В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре $M$ виден скачок, равный величине этого момента в направлении его действия.

## 3. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛОК ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = M_{\max} z_{\max} / I_y \le [\sigma], \qquad (2)$$

где $M_{\max}$ – максимальный изгибающий момент, определенный по эпюре (момент в опасном сечении балки); $z_{\max}$ – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленного волокна; $I_y$ – момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_y \le [\sigma], \qquad (3)$$

где $W_y$ – момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси, $W_y = I_y / z_{\max}$ .

Из условия прочности можно определить необходимый момент сопротивления

$$W_y = M_{\max}/[\sigma]. \quad (4)$$

При заданной форме поперечного сечения, зная $W_y$, можно установить необходимые размеры сечения.

Для балок, изготовленных из пластичного материала, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию: $[\sigma]_{сж} = [\sigma]_p = [\sigma]$.

Если балка изготовлена из хрупкого материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, то необходимая величина $W_y$ определяется из условий прочности для наиболее растянутого и наиболее сжатого волокон

$$W_y^{'} = M_{\max}\Big/[\sigma]_p; \qquad W_y^{''} = M_{\max}/[\sigma]_{сж}. \quad (5)$$

Из двух найденных значений момента сопротивления для определения размеров поперечного сечения выбирается максимальное.

*Пример 3.* Подобрать диаметр деревянной балки круглого сечения, изображенной на рис. 1, а. Для инженерных расчетов можно считать, что дерево одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, т.е. $[\sigma]$ = 10 МПа.

Абсолютная величина максимального изгибающего момента равна 20 кН·м (см. рис. 1, в). Тогда необходимый момент сопротивления

$$W_y = 20\cdot 10^3\Big/(10\cdot 10^6) = 2\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3.$$

Момент сопротивления круглого поперечного сечения относительно центральной оси равен $W_y = \pi\cdot d^3\big/32$, тогда необходимый диаметр балки:

$$d = \sqrt[3]{32W_y/\pi} = \sqrt[3]{32\cdot 2\cdot 10^{-3}\big/\pi} = 0{,}28\ \text{м}.$$

*Пример 4.* Подобрать размеры стальной балки прямоугольного поперечного сечения с отношением высоты к ширине балки $h/b = 2$. Расчетная схема балки, а также эпюры $Q$ и $M$ приведены на рис. 2; $[\sigma]$ = 160 МПа.

Абсолютная величина максимального изгибающего момента

$M_{max}$ = 15 кН·м. Необходимая величина момента сопротивления $W_y = 15 \cdot 10^3 / \left(160 \cdot 10^6\right) = 0{,}94 \cdot 10^{-4}$ м$^3$. Момент сопротивления для прямоугольного сечения относительно нейтральной оси $y$: $W_y = bh^2/6 = h^3/12$, откуда размеры сечения балки $h = \sqrt[3]{12W_y} = \sqrt[3]{12 \cdot 0{,}94 \cdot 10^{-4}} = 0{,}104$ м, $b = h/2 = 0{,}052$ м.

*Пример 5*. Двутавровая стальная балка произвольно нагружена внешними силами; $[\sigma]$ = 160 МПа. Подобрать номер двутавра, если $M_{max}$ = 20 кН·м. Необходимая величина момента сопротивления: $W_y = 20 \cdot 10^3/(160 \cdot 10^6) = 0{,}125 \cdot 10^{-3}$ м$^3$.

По сортаменту прокатной стали выбираем двутавровый профиль, у которого величина момента сопротивления близка к требуемой. Таких профилей два: № 18 с моментом сопротивления несколько больше требуемого ($W_y = 143 \cdot 10^{-6}$ м$^3$) и № 16 с моментом сопротивления, несколько меньшим ($W_y = 109 \cdot 10^{-6}$ м$^3$).

Максимальные напряжения в двутавровой балке № 18

$\sigma_{max} = 20 \cdot 10^3/(143 \cdot 10^{-6}) = 140$ МПа < 160 МПа

Недонапряжение составляет (160 – 140) / (160 · 100) = 12,5%.

Можно выбрать двутавр с моментом сопротивления меньшим, чем требуется, при условии, если перенапряжение в нем не превышает 5%. В нашем случае для двутавровой балки № 16: $\sigma_{max} = 20 \cdot 10^3/(109 \cdot 10^{-6}) = 183{,}5$ МПа. Перенапряжение материала составляет (183,5 – 160)/(160 · 100) = 14,7%, что не допустимо. Окончательно выбираем двутавр № 18.

## 4. КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Построить эпюры перерезывающих сил, изгибающих моментов и подобрать сечения балок, приведенных на рисунках 1 – 30 . Примеры построения эпюр приведены выше. Составить дифференциальные уравнения упругой линии по методу **уравнивания постоянных интегрирования** и построить эпюру изогнутой оси балки. Определить углы поворота на опорных сечениях балки. Величины заданных нагрузок представлены в таблице.

Алгоритм решения:

1) Расчет реакций опор, проверка правильности расчета;

2) построение эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов;

3) расчет параметров сечения балки и главного момента инерции;

4) составление дифференциального уравнения упругой линии, расчет постоянных интегрирования;

5) Расчет углов поворота на опорных поперечных сечениях;

6) построение эпюры прогибов балки.

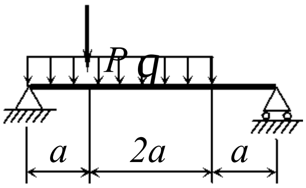
*Таблица*

**Исходные данные**

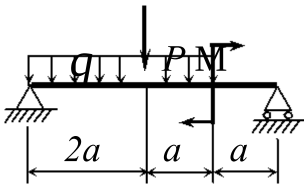
| Вариант | Номер рисунка | q. кН/м | P, кН | M, кН·м | Форма поперечного сечения |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 5 | 20 | 20 | Квадрат |
| 2 | 2 | 10 | 25 | 30 | Двутавр |
| 3 | 3 | 15 | 20 | 25 | Квадрат |
| 4 | 4 | 10 | 15 | 15 | Двутавр |
| 5 | 5 | 20 | 10 | 20 | Двутавр |
| 6 | 6 | 25 | 15 | 25 | Круг |
| 7 | 7 | 20 | 5 | 10 | Круг |
| 8 | 8 | 15 | 10 | 15 | Квадрат |
| 9 | 9 | 25 | 5 | 30 | Двутавр |
| 10 | 10 | 30 | 15 | 20 | Квадрат |
| 11 | 11 | 35 | 20 | 25 | Круг |
| 12 | 12 | 15 | 10 | 20 | Круг |
| 13 | 13 | 5 | 5 | 15 | Квадрат |
| 14 | 14 | 10 | 15 | 25 | Двутавр |
| 15 | 15 | 10 | 20 | 30 | Круг |
| 16 | 16 | 5 | 20 | 35 | Квадрат |
| 17 | 17 | 5 | 20 | 40 | Двутавр |
| 18 | 18 | 5 | 25 | 30 | Квадрат |
| 19 | 19 | 10 | 20 | 20 | Двутавр |
| 20 | 20 | 15 | 15 | 25 | Двутавр |
| 21 | 21 | 10 | 25 | 35 | Круг |
| 22 | 22 | 5 | 30 | 30 | Круг |
| 23 | 23 | 15 | 35 | 40 | Квадрат |
| 24 | 24 | 10 | 20 | 45 | Двутавр |
| 25 | 25 | 5* | 10 | 20 | Квадрат |
| 26 | 26 | 10* | 5 | 30 | Круг |
| 27 | 27 | 15* | 15 | 25 | Круг |
| 28 | 28 | 10* | 20 | 15 | Квадрат |
| 29 | 29 | 5* | 10 | 20 | Двутавр |
| 30 | 30 | 5* | 15 | 25 | Двутавр |

Параметр a = 1м.

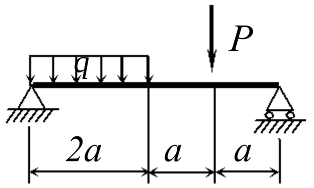
**1**



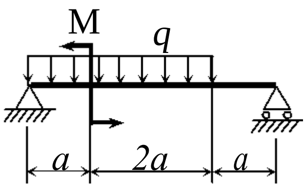

**2**



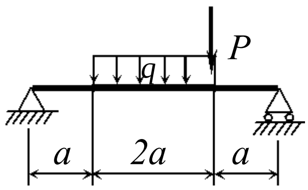

**3**



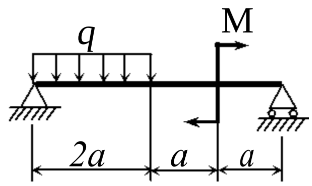

**4**



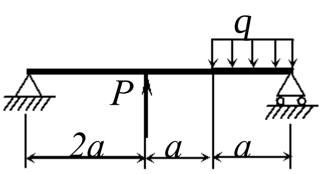

**5**



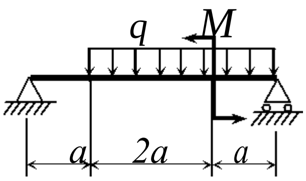

**6**



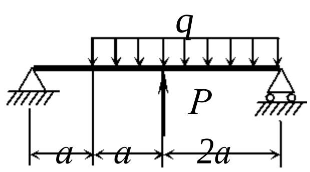

**7**



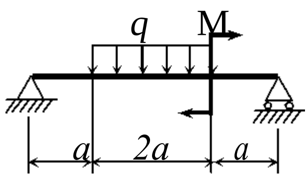

**8**



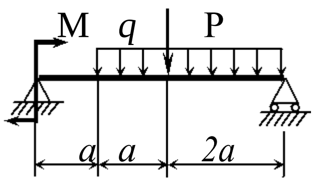

**9**



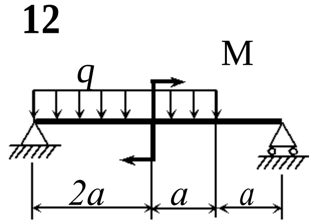

**10**



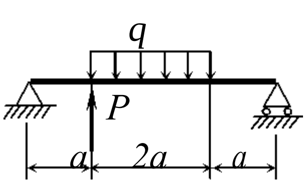

**11**



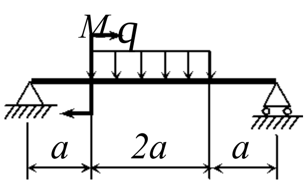

**12**



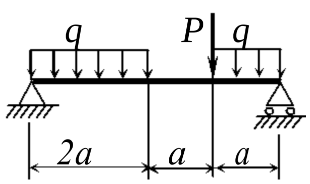

**13**




**14**




**15**



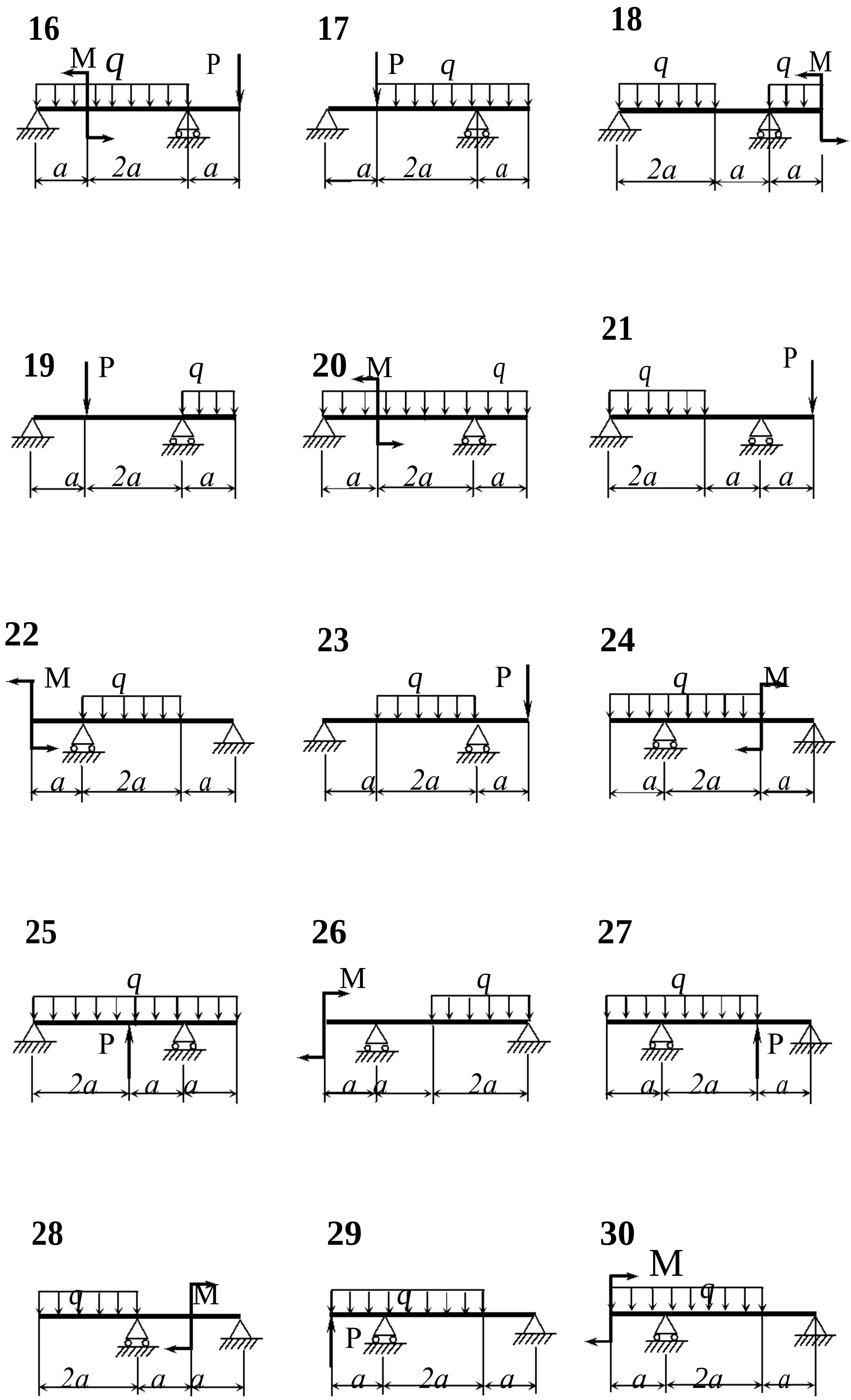



Рис. 4 Схемы балок