

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет»

Е. А. КОБЕЛЕВ, Н. А. МАСЛЕННИКОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2021

УДК 624.04

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент С. А. Видюшенков («Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»);

канд. техн. наук, доцент Н. В. Корихин (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого)

Кобелев, Е. А.

Строительная механика стержневых систем. / Е. А. Кобелев, Н. А. Масленников; СПбГАСУ. – СПб.: ИД «Петрополис», 2021. – 208 с.

ISBN 978-5-9676-1282-4

Приводятся краткие сведения о теории расчета плоских стержневых систем по курсу «Строительная механика». Теоретический материал сопровождается контрольными вопросами и упражнениями для самостоятельной подготовки. В каждой главе даны схемы заданий к контрольным работам и методические рекомендации по их выполнению. В пособии приведены примеры выполнения контрольных работ и требования к их оформлению. Учебное пособие составлено с учетом рабочих программ по дисциплине «Строительная механика» для студентов всех форм обучения направления подготовки 08.03.01 «Строительство», профиля «Промышленное и гражданское строительство». Предназначено для самостоятельной работы обучающихся.

Табл. 15. Ил. 118. Библиогр.: 13 назв.

Рекомендовано Учебно-методическим советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия.

ISBN 978-5-9676-1282-4

© Е. А. Кобелев, Н. А. Масленников, 2021
© Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2021

ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения строительной механики являются теоретические основы и прикладные методы определения напряженно-деформированного состояния объектов строительства.

Задачи строительной механики – исследование напряженно-деформированного состояния инженерных сооружений и конструкций различного назначения как совокупности несущих элементов, совместно выполняющих функцию восприятия заданных нагрузок и иных воздействий природного и техногенного характера.

Таким образом, строительная механика - наука, занимающаяся разработкой принципов и методов расчёта сооружений и конструкций, представляющих собой системы, состоящие из элементов различных типов (стержневые, тонкостенные или пластинчато-оболочечные, массивные) на прочность, жёсткость и устойчивость при статических и динамических воздействиях с учетом требований надежности и экономичности.

Целью расчётов является обеспечение достаточной, но не излишней безопасности сооружений, то есть рациональное сочетание долговечности с экономичностью.

К строительной механике относятся сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, теория тонкостенных конструкций (пластин и оболочек), динамика и устойчивость сооружений, оптимальное проектирование и собственно строительная механика стержневых систем, которая и излагается ниже в виде краткого курса для студентов строительных специальностей.

Изучение строительной механики формирует у студентов инженерное мышление и дает знания по оценке напряженного и деформированного состояния конструкций при различных воздействиях. Знание напряжённо-деформированного состояния несущих строительных конструкций позволяет судить о надежности сооружения в целом, о возможности его безаварийного использования в течение намеченного срока эксплуатации.

Целенаправленное развитие строительной механики, как науки о методах расчёта конструкций, началось с середины XVII века, когда стали развиваться промышленность, транспорт и возникла необходимость в возведении больших корпусов фабрик, мостов и других сооружений.

В настоящее время главная цель изучения строительной механики в университете сводится к развитию у будущих строителей инженерной интуиции и получению профессиональных знаний и практических навыков по расчету и оценке надежности несущих конструкций как реконструируемых, так и проектируемых зданий и сооружений с тем, чтобы исключить в практике проектирования и строительства принятие безграмотных, неэкономичных и ненадежных в эксплуатации решений.

В процессе познания человек не может сразу целиком и полностью воспроизвести и исчерпать содержание объекта. Любой процесс познавательной деятельности, так или иначе, содержит некоторые отвлечения от конкретного содержания рассматриваемого объекта или явления. Такая идеализация имеет место во всех науках, в том числе и в строительной механике. Вместо эмпирически данных объектов рассматриваются их модели или, как они называются в строительной механике, расчетные схемы, которые лишь в определенной мере отражают реальный объект. Таким образом, *расчетная схема является формой отражения действительности, формой получения основной информации о реальном объекте.*

Выбор расчетной схемы сооружения представляет собой сложную и, главное, ответственную задачу. В этой связи следует помнить, что для каждой расчетной схемы существуют некоторые границы, за пределами которых принятая расчетная схема становится уже неприемлемой.

Классифицировать строительные конструкции и их расчётные схемы можно по различным признакам, и эта классификация не может быть безупречно строгой. В общем случае все конструкции являются пространственными. Но для упрощения расчёта часть из них представляется, как плоские. *Плоской называется система, в*

которой оси всех стержней, включая опорные, и линии действия внешних нагрузок лежат в одной плоскости.

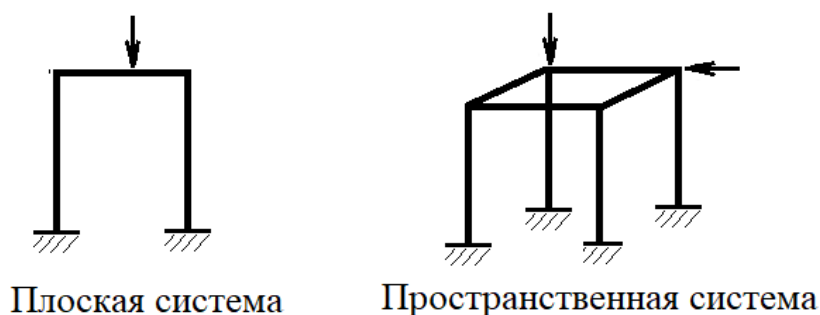


Рис. 1. Плоская и пространственная рамы

По геометрическим признакам расчётные схемы можно рассматривать как

- а) массивные сооружения (фундаменты, подпорные стенки и т. п.): все три размера – величины одного порядка;
- б) тонкостенные сооружения (пластины и оболочки) – размеры по двум направлениям значительно больше третьего размера (толщины);
- в) стержневые системы – расчётные схемы, состоящие из стержней.

Стержень – это элемент конструкции, у которого один размер велик по сравнению с двумя другими.

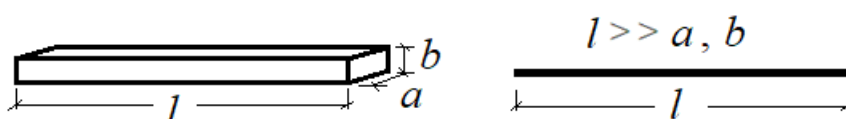


Рис. 2. Стержень и его расчётная схема

С точки зрения методов расчёта все расчётные схемы можно разделить на *статически определяемые системы*, в которых опорные реакции и внутренние силы можно определить с помощью уравнений равновесия статики, и *статически неопределяемые системы*, в которых неизвестных реакций связей больше, чем уравнений равновесия статики твёрдого тела, и требуется составление дополнительных уравнений, учитывающих упругие свойства материалов.

В данном кратком курсе строительной механики будем рассматривать только плоские стержневые системы, из которых в общем случае собираются пространственные строительные конструкции.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЧАСТЬ 1

Общие требования к выполнению контрольных работ

При изучении первой части курса строительной механики в первом семестре обучения по этой дисциплине студенты выполняют три контрольные работы (КР):

КР № 1. Расчёт статически определимой многодисковой системы на статическую нагрузку.

КР № 2. Определение усилий в стержнях плоской простейшей фермы.

Задача 2.1. Расчет плоской простейшей фермы на статическую нагрузку.

Задача 2.2. Построение линий влияния реакций и усилий в плоской простейшей ферме.

КР № 3. Расчёт статически неопределимой рамы методом сил.

Порядок получения индивидуального задания

Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведённых в каждом задании таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачётной книжки или студенческого билета. Например, если номер зачётной книжки 18549, то первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9.

Работы, выполненные не по шифру, к проверке и защите не принимаются!

Оформление контрольных работ

Контрольная работа выполняется на стандартных листах писчей бумаги (формат А-4). Заполняется только одна сторона листа, как показано в образце оформления (прил. 1, стр. 186) и примере выполнения контрольной работы №3 (прил. 2, стр. 187).

На титульном листе указываются номер и название контрольной работы, фамилия, имя и отчество студента, номера группы и специальности, индивидуальный номер шифра. Работа должна быть сброшюрована.

Расчётная схема изображается в масштабе длин. На ней указываются все необходимые данные в численном виде (размеры, нагрузки и др.), которые выписываются из таблиц. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями, всеми необходимыми расчетами и четкими схемами с указанием в необходимых случаях масштабов длин и сил.

Небрежно выполненные работы, оформление которых не соответствует общим требованиям, к проверке и защите не принимаются!

Раздел 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 1. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА НЕПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

1.1. Многодисковые плоские стержневые системы

Строительные конструкции предназначены для выполнения функциональных целей, в основном, для восприятия какой-либо нагрузки. Реализация этого целевого направления требует от них неподвижности и неизменяемости. Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой изменение заданной формы возможно лишь вследствие деформаций ее элементов за счет упругих свойств материала. Такая конструкция должна быть неподвижной. Вопрос геометрической неизменяемости возникает в связи с тем, что статически определимые системы имеют только абсолютно необходимые связи. Поэтому каждая из них должна устранять возможные степени свободы с тем, чтобы обеспечить неподвижность системы, то есть ее неизменяемость. Ниже рассматриваются вопросы геометрической неизменяемости, определения реакций и усилий в плоских стержневых системах.

Строительные конструкции, как правило, состоят не из одного элемента, а из нескольких, соединенных между собой каким-либо образом. Если это соединение жесткое, т. е. если элементы не могут перемещаться относительно друг друга, то они, по сути дела, превращаются в один сложный элемент. В плоскости для объединения двух дисков, как это следует из курса теоретической механики, необходимы минимум три связи (рис. 1.1).

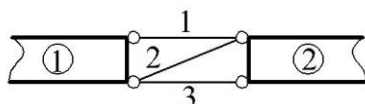


Рис. 1.1. Неподвижное соединение двух дисков в плоскости

В конструкциях встречается так называемое шарнирное соединение, которое допускает вращение элементов относительно друг друга без линейных смещений. Теоретически шарнир получается из неподвижного соединения путем удаления одного из параллельных стержней (рис. 1.2). Осью шарнира является точка А.

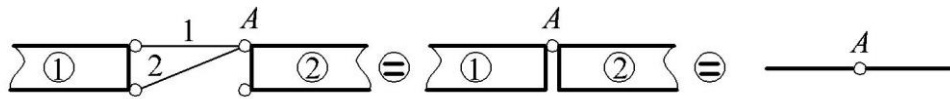


Рис. 1.2. Шарнирное соединение

Из сказанного следует:

- введение шарнира равносильно удалению одной связи;
- шарнир содержит две связи.

Далее шарнир будет изображаться одним кружком, как показано на последней схеме рис. 1.2.

В строительстве в ряде случаев применяются многопролетные шарнирные балки, которые представляют собой цепочку стержней, соединенных шарнирами. Для таких многоэлементных конструкций уже более актуален вопрос об их неподвижном прикреплении к основанию. Поэтому остановимся на этом вопросе подробнее.

1.1.1. Анализ геометрической неизменяемости многопролетных шарнирных балок

По отношению к многопролетным шарнирным балкам прежде всего нужно установить C – число связей, необходимых для неподвижного прикрепления балки к основанию. Обозначим через D – число стержней, из которых состоит балка, и через $Ш$ – число простых, или одинарных, шарниров. Шарнир называется простым, или одинарным, если он соединяет только два стержня.

Как уже известно, каждый стержень для своего неподвижного прикрепления требует три связи. Значит, общее число связей для отдельных стержней, из которых состоит балка, должно быть равно $3D$. Но каждый шарнир, как было показано выше, уже имеет две связи. Следовательно, от общего числа связей $3D$ нужно вычесть $2Ш$, т. е.

$$C = 3D - 2Ш . \quad (1.1)$$

Однако определение числа необходимых связей еще не отвечает на вопрос о неизменяемости всей системы в целом. Условие (1.1) – необходимое, но недостаточное. Следует еще правильно расставить связи. И здесь вероятность допустить ошибку гораздо выше, чем в случае прикрепления к основанию одного диска.

Пусть требуется обеспечить неподвижность многопролетной балки, представленной на рис. 1.3, а. Число неизвестных связей определим по формуле (1.1) $C = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$. Расставим эти пять связей (рис. 1.3, б). На рисунке показаны различные типы шарниров. Примыкающие шарниры следует рисовать аккуратно, чтобы не изменить расчетную схему.

С целью проверки неизменяемости системы нужно построить схему взаимодействия балок (рис. 1.3, в). По схеме видно, что балка АВ прикреплена к основанию тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке. Следовательно, она неподвижна. Естественно, неподвижным будет и конец балки ВС, присоединенной с помощью двух связей к балке АВ. Чтобы балка ВС не вращалась относительно точки В, ставится связь 4, ось которой не проходит через точку В. Следовательно, и балка ВС будет неподвижной. Повторяя аналогичные рассуждения относительно балки CD, легко показать, что она тоже неподвижная. Таким образом, доказано, что вся система геометрически неизменяемая.



Рис. 1.3. Прикрепление многопролетной балки к основанию

Приведенная расстановка связей не является единственной. Другой пример расстановки пяти связей показан на рис. 1.3, г. Схема взаимодействия балок для новой расстановки связей показана на рис. 1.3, д. По схеме видно, что балка АВ по-прежнему прикреплена тремя связями, оси которых не пересекаются в одной точке. Балка CD тоже закреплена тремя связями, оси которых не пересекаются в одной точке. Здесь в качестве горизонтальной связи выступает балка ВС, т. е. в целом балка CD – неподвижна. На неподвижные

балки AB и CD опирается балка BC , следовательно, она тоже не имеет возможности перемещаться.

Но в общем случае постановка связей может быть и неправильной. На рис. 1.4 приведены два таких примера. В первом примере все пять связей поставлены вертикально. Система имеет возможность свободно перемещаться в горизонтальном направлении. Во втором примере для закрепления балки AB поставлены четыре связи вместо необходимых трех, поэтому одной связи не хватает для закрепления оставшихся двух балок. Они могут свободно поворачиваться, как показано на рисунке штриховой линией, т. е. в целом балка является геометрически изменяемой.

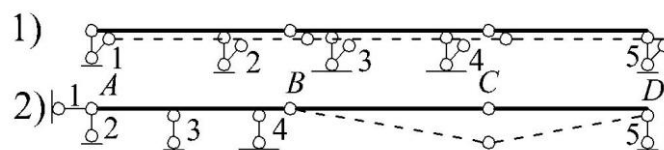


Рис. 1.4. Неправильная расстановка опорных связей

1.1.2. Определение усилий в многопролетных балках

Для определения усилий в многопролетной шарнирной балке существуют два подхода. Один из них, называемый общим подходом, реализуется следующим образом: подсчитывается общее число неизвестных опорных реакций и по числу неизвестных сразу составляется система уравнений равновесия. Эта система состоит из трех уравнений, составляемых в плоскости для любой системы сил, не пересекающихся в одной точке, и дополнительных уравнений, число которых равно числу промежуточных шарниров. Последние уравнения представляют собой сумму моментов всех сил, расположенных по одну сторону от шарнира. Например, балка, изображенная на рис. 1.5, a , имеет пять неизвестных реакций.

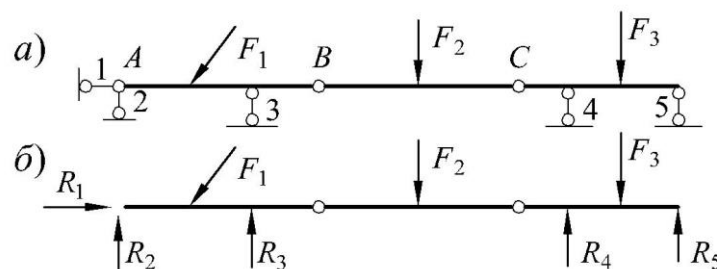


Рис. 1.5. Определение реакций в многопролетной балке

Зададимся их направлением (рис. 1.5, б) и составим пять уравнений равновесия

- 1) $\Sigma X = 0$; 2) $\Sigma Y = 0$; 3) $\Sigma M = 0$;
- 4) $\Sigma M_B = 0$ (слева от сечения B),
или $\Sigma M_B = 0$ (справа от сечения B);
- 5) $\Sigma M_C = 0$ (слева), или $\Sigma M_C = 0$ (справа).

В результате решения системы уравнений определяются опорные реакции, после чего внутренние усилия находятся так же, как в однопролетной балке.

Общий подход редко используется при ручном расчете, но он оказывается весьма эффективным при решении задачи с помощью ЭВМ, так как он легче программируется.

Для ручного расчета предпочтительнее второй подход, когда балка разъединяется на отдельные диски. Последовательность рассмотрения отдельных дисков диктуется схемой взаимодействия. По схеме взаимодействия расчет начинается с верхней балки, затем она отбрасывается. Ее влияние заменяют смежными опорными реакциями и переходят к следующей балке. Процедура продолжается вплоть до самой нижней балки, которая прикреплена полностью к основанию.

Приведем пример расчета балки (рис. 1.6, а) по изложенной процедуре. На рис. 1.6, б показана схема взаимодействия балок. Анализ схемы позволяет сделать заключение, что балка геометрически неизменяемая, поэтому можно перейти к определению усилий. На рис. 1.6, в вся балка разделена на отдельные элементы. Расчет начинается с верхней балки FH . Она рассматривается как отдельная независимая балка. Для нее составляются два уравнения равновесия, поскольку в данном случае из-за отсутствия наклонной или горизонтальной нагрузки продольные силы во всей балке равны нулю.

- 1) $\Sigma M_F = 12 - R_H \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ или $R_H = 0$;
- 2) $\Sigma M_H = 12 + R_F \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ или $R_F = -2$ кН.

Реакция RF с обратным направлением прикладывается к балке DF , и для нее тоже составляются два уравнения равновесия:

- 1) $\Sigma M_D = 4 \cdot 2 - R_E \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ или $R_E = -1$ кН;
- 2) $\Sigma M_E = R_D \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$ или $R_D = 3$ кН.

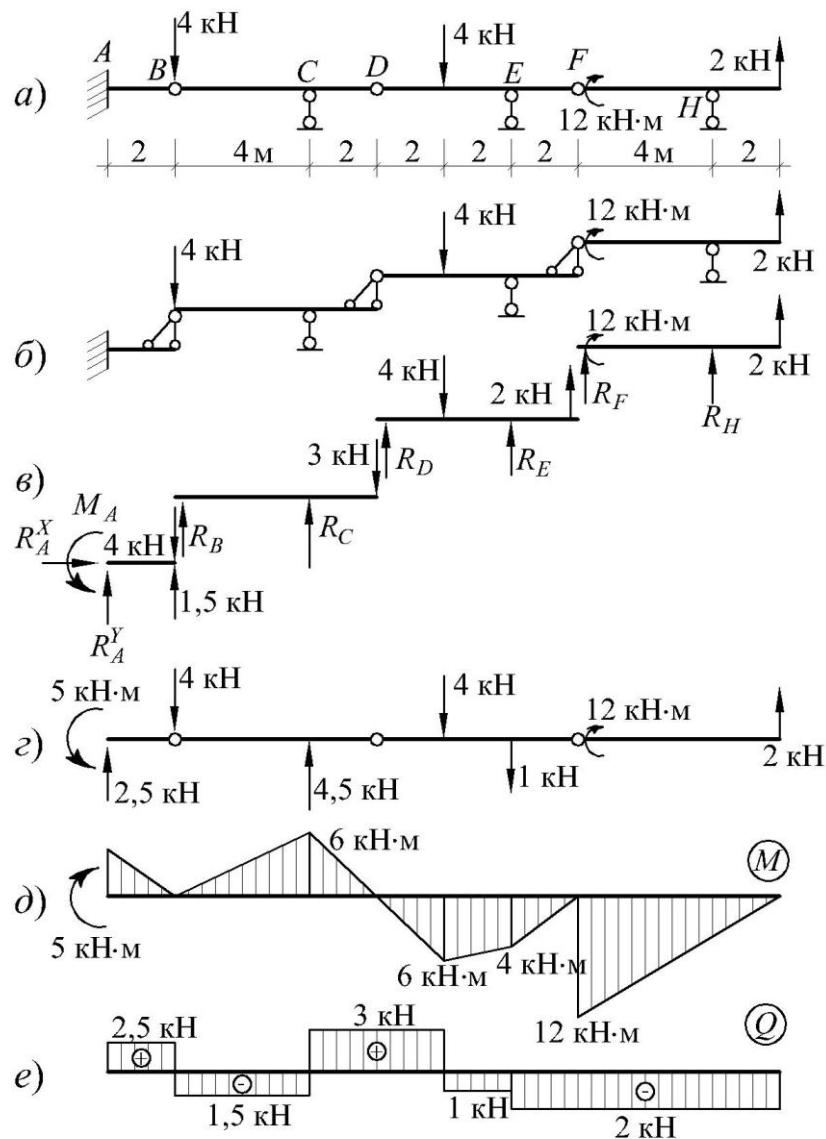


Рис. 1.6. Расчет многопролетной шарнирной балки

Далее процедура повторяется. К балке BD прикладывается реакция RD в обратном направлении, и для нее также составляются два уравнения равновесия:

$$1) \sum M_B = -R_C \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 0;$$

$$2) \sum M_C = R_B \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 0.$$

Из этих уравнений $R_C = 4,5$ кН; $R_B = -1,5$ кН. Реакция RB прикладывается к балке AB , и здесь, чтобы подтвердить отсутствие продольных сил в балке, составляются уже три уравнения:

$$1) \sum X = R_A^X = 0; 2) \sum Y = R_A^Y - 4 + 1,5 = 0, \text{ откуда } R_A^Y = 2,5 \text{ кН};$$

$$3) \sum M_A = -M_A + 4 \cdot 2 - 1,5 \cdot 2 = 0, \text{ отсюда } M_A = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис 1.6, z показаны все опорные реакции. По этому рисунку можно сделать проверку, составив сумму проекций всех сил на вертикальную ось,

$$\Sigma Y = 2,5 - 4 + 4,5 - 4 - 1 + 2 = 0.$$

Далее строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для отдельных балок FH , FD , DB и BA , но все ординаты откладываются от одной прямой (рис. 1.6, d , e).

1.1.3. Определение усилий в многодисковых рамах

Аналогично рассчитываются рамные системы из балок ломаного очертания, образованные последовательным присоединением дисков. Рассмотрим, например, систему на рис. 1.7, a .

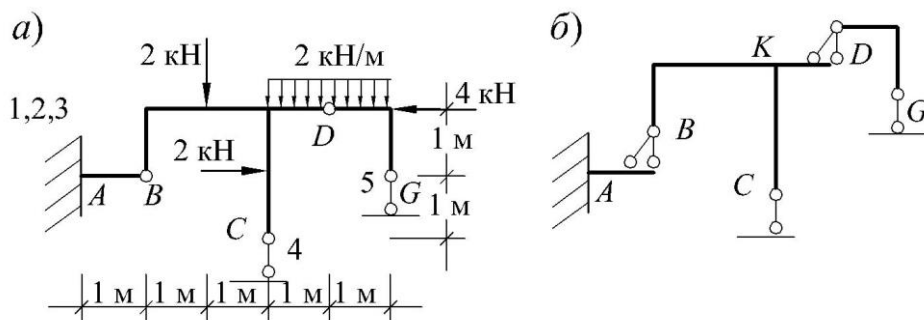


Рис. 1.7. Схема системы и проверка ее геометрической неизменяемости

Предварительно проверим геометрическую неизменяемость. По формуле (1.1) число связей $C = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$. Необходимое условие выполняется, но этого недостаточно. Построим схему взаимодействия (рис. 1.7, b). Стержень AB имеет неподвижную защемляющую опору, следовательно, он неподвижен. На него опирается балка ломаного очертания BC . Линии действия ее трех опорных связей не пересекаются в одной точке, поэтому эта балка также неподвижна. На балку BC опирается балка ломаного очертания DG , линии опорных реакций которой также не пересекаются в одной точке. Следовательно, вся система является геометрически неизменяемой.

Расчет такой системы при ручном счете удобно вести так же, как расчет многопролетных балок, т. е. по частям, начиная сверху. Начнем расчет с балки DG (рис. 1.8, a).

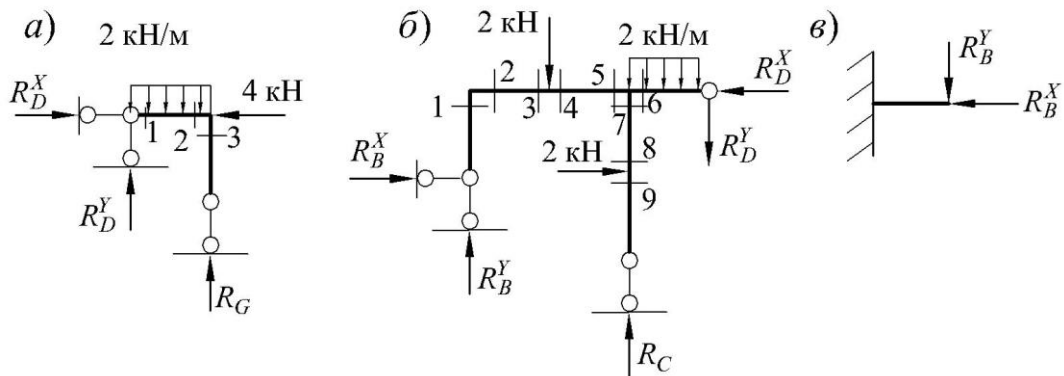


Рис. 1.8. Расчетные схемы отдельных частей системы

По-прежнему, воспользуемся уравнениями (1.1). Определим опорные реакции и усилия в расчетных сечениях рамы.

- 1) $\Sigma M_D = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 - R_G \cdot 1 = 0$; $R_G = 1$ кН;
- 2) $\Sigma X = R_D^X - 4 = 0$; $R_D^X = 4$ кН;
- 3) $\Sigma Y = R_D^Y - 2 \cdot 1 + 1 = 0$; $R_D^Y = 1$ кН.

Прежде всего составим выражения для вычисления усилий:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0; Q_1 = 1 \text{ кН}; N_1 = -4 \text{ кН}; Q_2 = 1 - 2 = -1 \text{ кН};$$

$$N_2 = N_1; Q_3 = 0; N_3 = -1 \text{ кН}.$$

Потом рассмотрим балку BC (рис. 1.8, б).

- 1) $\Sigma M_B = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2,5 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - R_C \cdot 2 = 0$; $R_C = 3$ кН;
- 2) $\Sigma X = R_B^X + 2 - 4 = 0$; $R_B^X = 2$ кН;
- 3) $\Sigma Y = R_B^Y - 2 - 2 \cdot 1 + 3 - 1 = 0$; $R_B^Y = 2$ кН.

$$M_1 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты левые волокна)}; Q_1 = -2 \text{ кН};$$

$$N_1 = -2 \text{ кН}; M_2 = M_1 \text{ (растянуты верхние волокна)};$$

$$Q_2 = 2 \text{ кН}; N_2 = 2 \text{ кН};$$

$$M_3 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0; Q_3 = Q_2; N_3 = N_2;$$

$$M_4 = M_3; Q_4 = 0; N_4 = N_3;$$

$$M_5 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0; Q_5 = Q_4; N_5 = N_4;$$

$$M_6 = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты верхние волокна)};$$

$$Q_6 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ кН}; N_6 = -4 \text{ кН};$$

$$M_7 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты волокна слева)};$$

$$Q_7 = -2 \text{ кН}; N_7 = -3 \text{ кН};$$

$$M_8 = M_9 = 0; Q_8 = Q_7; N_8 = N_7; Q_9 = 0; N_9 = N_8.$$

И, наконец, рассмотрим консольный стержень AB . Здесь нет необходимости определять опорные реакции, а можно сразу строить эпюры усилий от реакций R_B^X и R_B^Y , приложенных к концу стержня (рис. 1.8, в). Все эпюры построим на единой схеме (рис.

1.9). Для проверки расчета вырежем узел K , приложим к нему найденные усилия и убедимся в его равновесии.

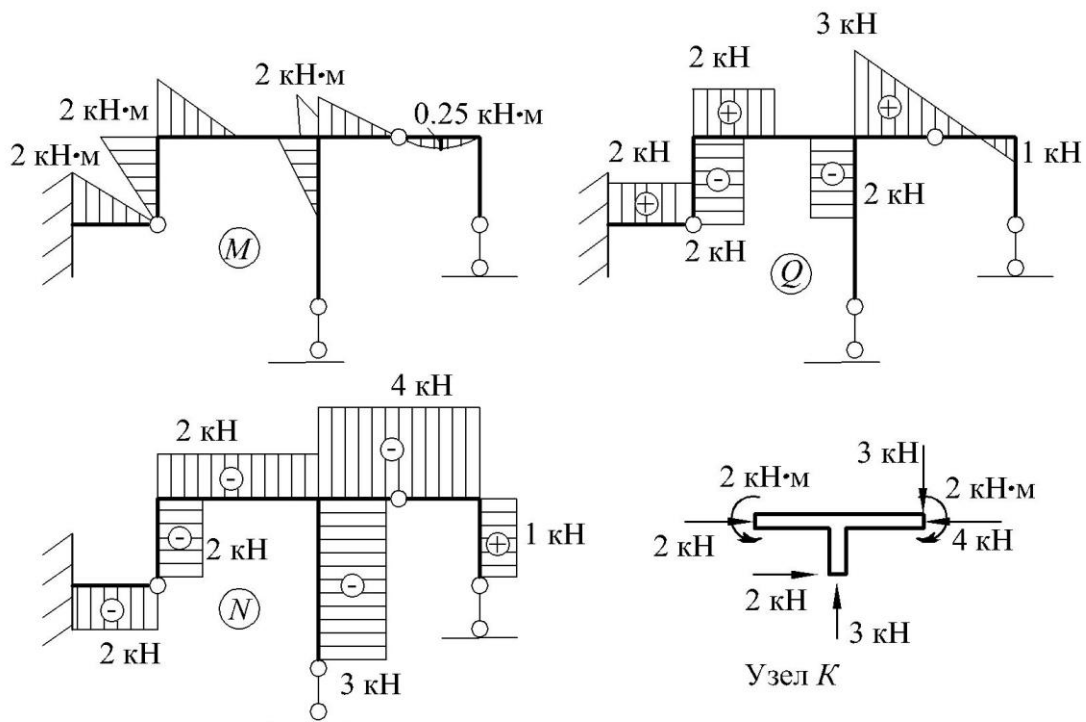


Рис. 1.9. Окончательные эпюры усилий и проверка равновесия узла

1.2. Простейшие плоские фермы

1.2.1. Образование ферм и условие их геометрической неизменяемости

Фермой обычно называют конструкцию, образованную из относительно гибких прямолинейных стержней. Соединение стержней, как правило, жесткое (рис. 1.10, *a*). На рис. 1.10, *б* представлен один из узлов фермы, выполненной на сварке. Для конструкций из относительно гибких стержней при узловой нагрузке обычно пренебрегают размерами узла, изображая его в виде точки, где пересекаются оси всех стержней, сходящихся в узле. Более того, принимают в узлах идеальные шарниры (без трения). В итоге получается расчетная схема, представленная на рис. 1.10, *в*. Ее расчет несравненно проще, чем расчет конструкции, показанной на рис. 1.10, *a*. Однако выбранная расчетная схема при относительно гибких стержнях достаточно полно и достоверно отражает поведение реальной конструкции.

Если же конструкция состоит из коротких стержней большого сечения, то допущение о введении шарниров в узлы становится не-

допустимым, так как приводит к грубым неточным результатам. В этой связи следует постоянно помнить, что каждая расчетная схема имеет некоторый предел, за которым ее применение становится уже не обоснованным.

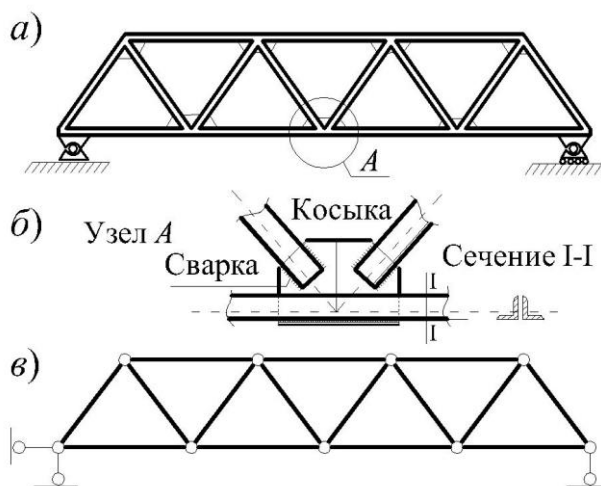


Рис. 1.10. Ферма и ее расчетная схема

Фермы получили исключительно широкое распространение в строительстве, так как при том же расходе материала, что и для балки, позволяют перекрывать большие пролеты. В зависимости от назначения, фермы имеют различные очертания. Наиболее часто встречаются балочные фермы (рис. 1.11). Ферма с параллельными поясами, изображенная на рис. 1.11, по сути дела является вырожденной двутавровой балкой, у которой полки заменены поясами, а стенка – решеткой.

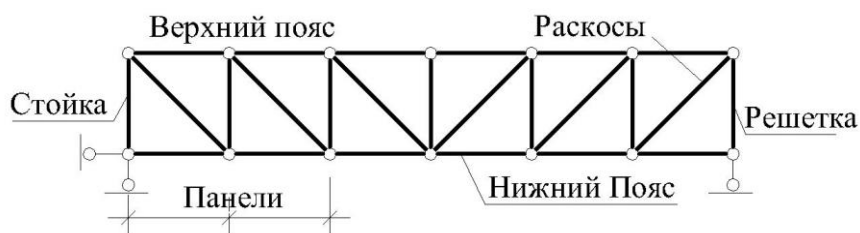


Рис. 1.11. Ферма с параллельными поясами

Ферма, как и балка, при ее функционировании должна быть геометрически неизменяемой. Это требование достигается структурой фермы. Ферма, образованная путем присоединения к основному геометрически неизменяемому треугольнику каждого последующего узла с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой, называется простейшей (рис. 1.12, а). Ее схема состоит из треугольников, что обеспечивает геометрическую неизменяемость

структуры. Такую ферму можно разобрать, отбрасывая по одному узлу в обратной последовательности.

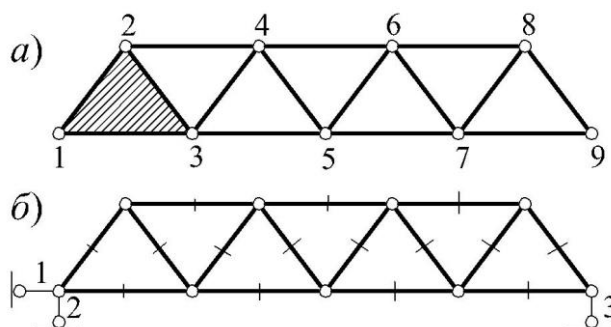


Рис. 1.12. Образование простейшей фермы

Установим связь между числом стержней и числом узлов фермы. Пусть $C_{\text{ф}}$ – число стержней фермы, а Y – число узлов. Основной треугольник 1-2-3 имеет три стержня и три узла. В остальной части узлов $(Y - 3)$, а стержней в два раза больше, так как каждый узел присоединяется двумя стержнями. В итоге $C_{\text{ф}} = 3 + 2(Y - 3) = 2Y - 3$. Эта зависимость справедлива для ферм, не прикрепленных к основанию. Так как полученная ферма по своей структуре является геометрически неизменяемой, то она представляет собой один диск, для закрепления которого в плоскости достаточно трех стержней. Обозначим их через $C_{\text{оп}}$. Тогда полное число стержней

$$C = C_{\text{ф}} + C_{\text{оп}} = 2Y - 3 + 3 = 2Y \quad (1.2)$$

Например, для фермы на рис. 1.9, б $C = 15 + 3 = 2 \cdot 9 = 18$.

Таким образом, условие (1.2) является необходимым и достаточным признаком геометрической неизменяемости простейшей фермы при правильной расстановке опорных связей.

1.2.2. Определение усилий способом последовательного вырезания узлов

Предварительно найдем условие статической определимости плоских ферм. При принятых выше допущениях (идеальные шарниры, узловая нагрузка) в стержнях фермы будут возникать только продольные силы, постоянные по длине каждого стержня. Следовательно, число неизвестных усилий будет равно $C_{\text{ф}}$. Неизвестными также являются опорные реакции, число которых равно $C_{\text{оп}}$. Таким образом, общее число неизвестных усилий равно C .

Подсчитаем, сколько уравнений равновесия можно составить для плоской фермы. Как известно из курса теоретической механики, для системы сил в плоскости, пересекающихся в одной точке, можно составить два уравнения равновесия: суммы проекций всех сил на два взаимно перпендикулярных направления, т. е. общее число уравнений, будет равно удвоенному числу узлов фермы $У$.

Итак, если $C = 2У$, то ферма статически определимая, так как число уравнений равновесия равно числу неизвестных усилий. Нетрудно видеть, что условие статической определимости совпадает с условием геометрической неизменяемости (1.2).

Структура простейшей фермы позволяет определять усилия в стержнях без составления совместной системы уравнений равновесия. Предварительно таким же путем, как в балках, из уравнений (1.1) определяются опорные реакции. Для консольной фермы опорные реакции можно не находить, а сразу приступить к определению усилий. С этой целью вырезаются узлы, начиная с узла, где имеются только два неизвестных усилия. Такие узлы всегда есть в простейшей ферме. Затем переходят к следующему узлу, где остается только два неизвестных усилия. Итак, последовательность вырезания узлов диктуется структурой фермы.

Как уже было отмечено, для каждого вырезанного узла составляются два уравнения – суммы проекций всех сил на два направления. Направления выбираются так, чтобы в каждое уравнение входило по одному неизвестному усилию, что и позволяет избежать решения совместной системы уравнений. При ручном расчете этот подход самый целесообразный.

Прежде чем приступить к решению задач, рассмотрим частные случаи равновесия узлов. Условимся называть стержень нулевым, если усилие в нем равно нулю.

1. Возьмем ненагруженный двухстержневой узел (рис. 1.13, а).

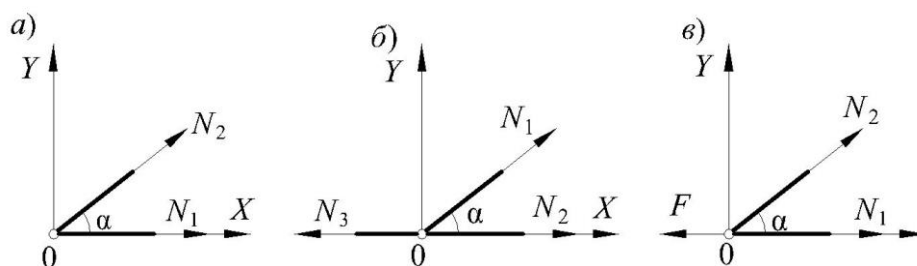


Рис. 1.13. Частные случаи равновесия узлов

Составим сумму проекций всех сил на ось OY . $\Sigma Y = N_2 \sin \alpha = 0$. Так как $\sin \alpha \neq 0$, в связи с тем, что $\alpha \neq 0$, то, следовательно, $N_2 = 0$. Теперь составим сумму проекций сил на ось OX . $\Sigma X = N_1 = 0$. Итак, в ненагруженном двухстержневом узле оба стержня нулевые.

2. Рассмотрим ненагруженный трехстержневой узел, в котором оси двух стержней лежат на одной прямой (рис. 1.13, б). Составим сумму проекций сил на ось OY . $\Sigma Y = N_1 \sin \alpha = 0$. Так как $\sin \alpha \neq 0$, то $N_1 = 0$. Следовательно, если в ненагруженном трехстержневом узле оси двух стержней лежат на одной прямой, то третий стержень будет нулевым. Этот стержень обычно называют *отходящим*. Следствие: если в двухстержневом узле сила приложена вдоль оси одного из стержней, то другой стержень будет нулевым (рис. 1.13, в).

Определим усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 1.14. Ферма неизменяемая, так как по (1.2) $C = 13 + 3 = 2 \cdot 8 = 16$.

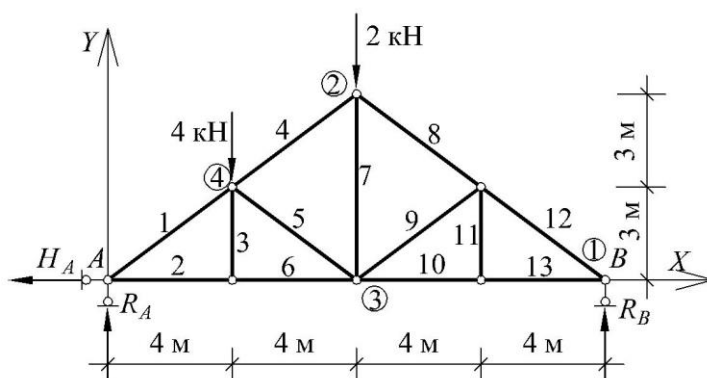


Рис. 1.14. Балочная треугольная ферма

Предварительно определим опорные реакции из уравнений:

$$\Sigma M_A = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8 - R_B \cdot 16 = 0, R_B = 2 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = R_A \cdot 16 - 4 \cdot 12 - 2 \cdot 8 = 0, R_A = 4 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = H_A = 0.$$

$$\text{Проверка: } \Sigma Y = 4 + 2 - 4 - 2 = 0.$$

Далее выявим нулевые стержни. На основе второго частного случая нулевыми будут стержни: 3, 11, 9.

Установим последовательность вырезания узлов. Первыми можно вырезать либо узел А, либо узел В. Вырежем последний (рис. 1.12, а) и определим усилия в стержнях 12–8 и 13–10. Затем можно вырезать узел 2, где неизвестны усилия в стержнях 4 и 7. Далее можно перейти к узлу 3. После этого останется неизвестным

только усилие в стержне 1. Для его определения можно вырезать либо узел 4, либо узел А. Проще вырезать узел А. Выполним эту последовательность в числах.

Итак, вырежем узел 1 (он же узел В). Узел приведен на рис. 1.12, а.

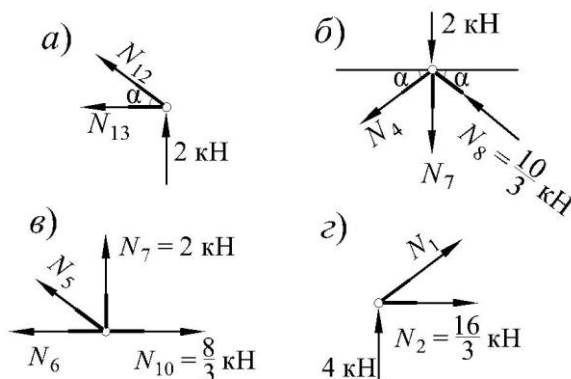


Рис. 1.15. Узлы фермы, приведенной на рис. 1.14

Приложим опорную реакцию $R_B = 2$ кН к узлу (как внешнюю силу) и составим сумму проекций на вертикальную ось. В это уравнение войдет только одно неизвестное N_{12} . При составлении уравнений задаемся положительным направлением усилий от узла. Если усилие получится со знаком минус, то, следовательно, стержень сжат.

$$\Sigma Y = 2 + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0; N_{12} = -2/\sin \alpha .$$

По рисунку фермы (см. рис. 1.14) видно, что $\sin \alpha = 3/5$, а $\cos \alpha = 4/5$. Итак, $N_{12} = -10/3$ кН = N_8 (стержень сжат). Вторым уравнением будет сумма проекций всех сил на горизонтальную ось.

$$\Sigma X = -N_{13} - N_{12} \cos \alpha = 0, \text{ откуда } N_{13} = -N_{12} \cos \alpha .$$

Подставим сюда значения N_{12} и $\cos \alpha$.

$$N_{13} = -(-10/3)(4/5) = 8/3 \text{ кН} = N_{10} \text{ (стержень растянут).}$$

Следующим вырежем узел 2 (рис. 1.15, б). Приложим к нему усилие N_8 как внешнюю нагрузку. Возьмем его истинное направление, т. е. это усилие будет направлено к узлу. Первым составим уравнение проекций

$$\Sigma X = -N_4 \cos \alpha - (10/3) \cos \alpha = 0; N_4 = -(10/3) \text{ кН (сжатие).}$$

Вторым уравнением будет сумма проекций

$$\Sigma Y = -2 - N_7 - N_4 \sin \alpha + (10/3) \sin \alpha = 0 .$$

Из этого уравнения $N_7 = -2 + (10/3)(3/5) - (-10/3)(3/5) = 2$ кН.

Перейдем к узлу 3 (рис. 1.12, в). Приложим к нему усилия N_7 и N_{10} с учетом их знаков. Оба усилия будут направлены от узла.

Составим сумму проекций $\Sigma Y = N_5 \sin \alpha + 2 = 0$, отсюда $N_5 = - (10/3)$ кН (сжатие).

Теперь можно составить второе уравнение в виде суммы проекций на другую ось $\Sigma X = - N_6 - N_5 \cos \alpha + (8/3) = 0$. Отсюда $N_6 = (16/3)$ кН = N_2 .

Осталось неизвестным только одно усилие N_1 . Для его определения вырежем узел А (рис. 1.15, з). Составим сумму проекций на вертикальную ось. $\Sigma Y = N_1 \sin \alpha + 4 = 0$, отсюда $N_1 = - (20/3)$ кН. Для этого узла можно составить еще одно уравнение равновесия

$\Sigma X = 0$. Используем его для проверки:

$$\Sigma X = (16/3) + N_1 \cos \alpha = (16/3) + (-20/3) (4/5) = 0.$$

Получилось тождество, что свидетельствует о равновесии узла, а в конечном итоге о том, что все усилия определены правильно.

1.2.3. Определение усилий графическим способом

Изложенный выше способ последовательного вырезания узлов поддается графической интерпретации. Она состоит в том, что после изображения фермы в масштабе длин, вырезают узлы в той же последовательности, что и выше, но не составляют для них уравнения равновесия, а строят многоугольники сил в масштабе сил. Однако эта процедура не очень эффективна, так как для каждого узла будет свой многоугольник сил, и все они будут разбросаны на чертеже далеко от схемы фермы, что затрудняет перенос параллельных линий. Кроме того, каждый стержень встречается в многоугольниках два раза, так как его концы примыкают к двум узлам, что увеличивает чертежную работу.

Устранение указанных недостатков привело к созданию весьма изящного способа графического расчета ферм – к построению взаимных диаграмм. Это построение было предложено английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом (1831 – 1879) в 1864 году и затем развито профессором Римского политехникума Луиджи Кремоной (1830 – 1903) в 1872 году. Поэтому диаграмма усилий называется диаграммой Максвелла – Кремоны. Предложенный ими прием настолько эффективен, что не потерял своей актуальности и в век персональных компьютеров.

Рассмотрим построение диаграммы усилий на конкретном примере расчета фермы, изображенной на рис. 1.16, а. Схема фермы, как уже указывалось выше, вычерчивается в масштабе длин.

Для удобства построения диаграммы введем новые обозначения стержней и внешних сил. Пространство между силами и между стержнями будем называть полями. Внешние поля обозначим, например, латинскими буквами: a, b, c, \dots , а внутренние поля – арабскими цифрами: 1, 2, 3,

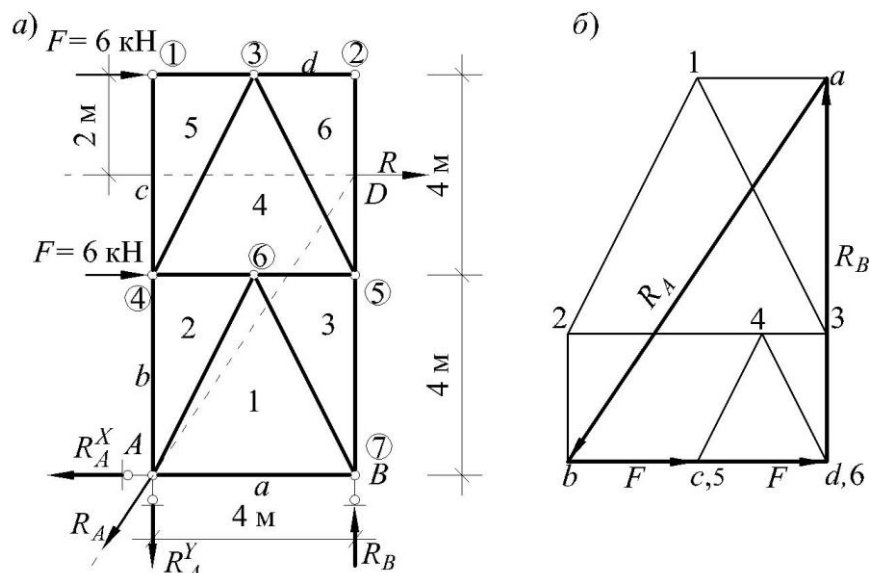


Рис. 1.16. Графический расчет простейшей фермы

Внешние силы и внутренние усилия будем обозначать через названия полей при обходе узла по ходу часовой стрелки. Например, опорная реакция R_B будет называться R_{da} . Что касается внутренних усилий, то для них, в зависимости от рассматриваемого узла, индексы будут меняться местами.

Расчет начинается с определения опорных реакций. В связи с тем, что значения опорных реакций используются в дальнейшем расчете, с целью проверки рекомендуется определить их дважды: численно и графически. Для численного определения зададимся их направлением (см. рис.1.16, a) и составим три независимых уравнения равновесия:

$$1) \sum X = 6 + 6 - R_A^X = 0; \quad R_A^X = 12 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_A = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 8 - R_B \cdot 4 = 0; \quad R_B = 18 \text{ кН};$$

$$3) \sum Y = R_B - R_A^Y = 0; \quad R_A^Y = R_B = 18 \text{ кН}.$$

С целью графического определения опорных реакций заменим внешние силы одной равнодействующей $R = 2F = 12 \text{ кН}$. Эта равнодействующая будет проходить через точку D , находящуюся на равном расстоянии от сил, так как силы одинаковы. Из курса теоре-

тической механики известно, что для того, чтобы тело находилось в равновесии под действием приложенных к нему трех сил, они должны пересекаться в одной точке. Через точку D проходит линия действия опорной реакции R_B . Следовательно, и реакция R_A должна проходить через эту точку, что дает линию действия этой реакции.

Полученных данных достаточно, чтобы построить треугольник сил, который и строится в масштабе сил (рис. 1.16, б – темные линии). В случае равновесия треугольник сил должен быть замкнутым, что дает направление опорных реакций. Измеренные в масштабе сил опорные реакции должны иметь те же значения, что и подсчитанные численно. Полученный треугольник сил является основой для построения диаграммы усилий. В принятых обозначениях он читается так: $a-b-c-d-a$.

Далее, как и при численном решении задачи, мысленно вырезаются узлы в такой последовательности, чтобы в каждом узле было не более двух неизвестных усилий. Такая последовательность для рассматриваемой фермы приведена на рис. 1.16, а (цифры в кружках). Для каждого узла в том же масштабе, что и для треугольника $a-d-b$, строится многоугольник сил так, чтобы каждый стержень встречался только один раз. Обход усилий в узле осуществляется по ходу часовой стрелки, начиная с известных сил и заканчивая неизвестными.

Например, для узла 1 построение начинается с силы F , которая читается как F_{cd} . Затем из точки d проводится прямая, параллельная N_{d5} , а из точки c – прямая, параллельная N_{5c} . Эти две прямые пересекутся в точке 5, которая совпадает с точкой c . Это показывает, что длина N_{5c} равна нулю, т. е. что этот стержень – нулевой. В узле 2 оба стержня нулевые, поэтому точка 6 будет совпадать с точкой d . Следующим вырезается узел 3. Обход усилий начинается с усилия N_{5d} . Затем из точки d проводится линия, параллельная N_6 , а из точки 5 – линия, параллельная N_{45} . Эти две прямые пересекутся на диаграмме в точке 4.

Для узла 4 сначала откладывается сила F_{bc} , потом N_{54} . Затем из точки 4 проводится прямая линия, параллельная N_{42} , а из точки b – прямая, параллельная линии действия N_2 . Они пересекутся в точке 2. Таким же путем строятся многоугольники сил для узлов 5, 6. При рассмотрении последнего, 7-го, узла в нем окажется только одно неизвестное усилие N_{a1} . Построение многоугольника начинается с N_{13} , потом N_{3d} , затем реакция $R_{B(da)}$. После этого из точки a прово-

дится прямая, параллельная N_{a1} . Эта прямая должна прийти в точку 1, так как при правильном построении диаграммы она должна быть замкнутой, что служит проверкой правильности построения взаимной диаграммы.

По завершении построения диаграммы абсолютные значения усилий получают путем измерения длины соответствующей прямой на диаграмме с учетом принятого масштаба сил. Чтобы определить знак усилия, его нужно называть по ходу часовой стрелки относительно конкретного узла и смотреть, на какое направление это название указывает. Если это направление от рассматриваемого узла, то стержень растянут, если к узлу, то – стержень сжат. Например, относительно узла 7 усилие в нижнем горизонтальном стержне читается как N_{a1} . На диаграмме a находится правее узла 1, т. е. сила направлена от узла 7 на схеме фермы, что свидетельствует о растяжении стержня $a1$. Определять знак усилия можно относительно любого узла, к которому примыкает стержень. Так, относительно узла A усилие в нижнем горизонтальном стержне читается как N_{1a} . Узел 1 на диаграмме находится левее узла a , т. е. усилие направлено от узла, что опять подтверждает растяжение стержня $a1$.

Аналогично определяются знаки усилий и в других стержнях. Например, усилие в стержне 4-2 относительно узла 4 на схеме фермы читается как N_{42} , т. е. оно направлено справа налево – к узлу 4. Следовательно, стержень сжат и т. д.

Диаграмма усилий и схема фермы (см. рис. 1.16) называются взаимными диаграммами, так как между ними имеют место следующие зависимости:

1. Все линии диаграммы соответственно параллельны осям стержней фермы и направлениям внешних сил, включая опорные реакции.

2. Каждому узлу фермы на диаграмме соответствует замкнутый многоугольник сил, а каждому полю на схеме фермы на диаграмме соответствует вершина многоугольника.

1.2.4. Определение усилий способом сечений

Способ последовательного вырезания узлов и графический способ применяются весьма успешно, когда требуется определить усилия во всех стержнях фермы. Если же по той или иной причине

нужно определить усилия в каких-либо отдельных стержнях, то для этих целей удобно использовать способ сечений, когда ферма делится на две части по тем стержням, в которых необходимо найти усилия. Покажем реализацию этого способа на примере определения усилий в стержнях 1, 2, 3 фермы, изображенной на рис. 1.17, а. Так как ферма балочная, то предварительно следует определить опорные реакции. Они находятся из трех уравнений равновесия, составленных, как для балки.

Далее проводится сечение по стержням 1, 2, 3. Поскольку для плоской системы сил, не пересекающихся в одной точке, можно составить лишь три уравнения равновесия, то сечение должно разрезать не более трех стержней. В полученном сечении задаются положительным направлением усилий – от узла. Если усилие получится с минусом, то, следовательно, стержень сжат.

После деления фермы можно рассматривать равновесие любой ее части. Обычно берется та часть, где меньше сил, что сокращает объем вычислений. В данном случае возьмем правую часть (рис. 1.17, б) и составим для нее три уравнения равновесия. Уравнения составляются так, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное усилие. Для каждого стержня это достигается путем составления уравнений моментов относительно точек, где пересекаются оси двух других стержней. Такие точки называются *моментными*.

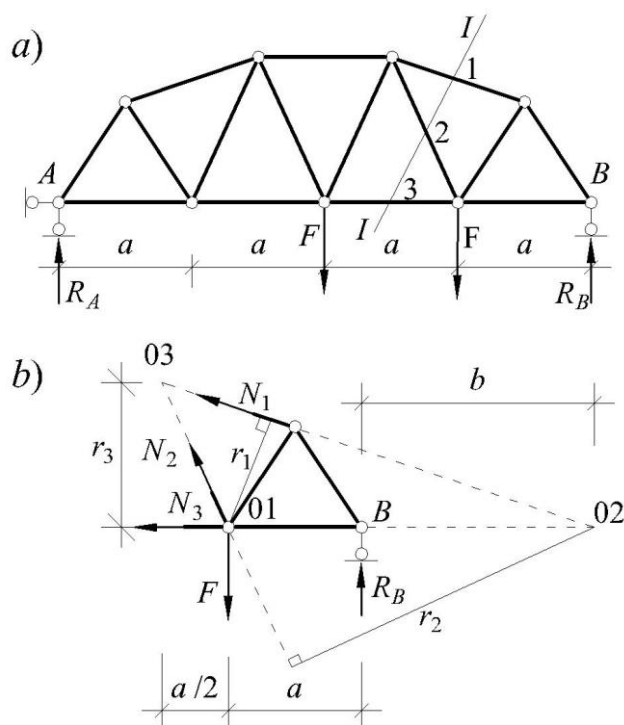


Рис. 1.17. Полигональная ферма с треугольной решеткой

Например, для N_1 моментной точкой является 01, для $N_2 - 02$ и для $N_3 - 03$ (см. рис. 1.17, б). По этому рисунку составим уравнения

$$\sum M_{01} = -N_1 r_1 - R_B \cdot a = 0;$$

$$\sum M_{02} = -F(a+b) + R_B \cdot b + N_2 r_2 = 0;$$

$$\sum M_{03} = F(a/2) - R_B \cdot 1,5a + N_3 r_3 = 0.$$

Из этих уравнений получим усилия

$$N_1 = -\frac{R_B \cdot a}{r_1}; \quad N_2 = \frac{F(a+b) - R_B \cdot b}{r_2}; \quad N_3 = \frac{R_B \cdot 1,5a - 0,5Fa}{r_3}.$$

Изложенная процедура нарушается при определении усилий в стержнях фермы с параллельными поясами (рис. 1.18, а). Здесь при определении усилий в стойках и раскосах нужно составлять не уравнения моментов, а суммы проекций всех сил, приложенных к отсеченной части, на ось, перпендикулярную к поясам. Определим, например, усилие N_1 . Предварительно найдем опорные реакции, как в балке, а затем сделаем сечение I – I и рассмотрим равновесие левой части (рис. 1.18, б). Составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = R_A - F - N_1 \cos \alpha = 0, \text{ отсюда } N_1 = (R_A - F) / \cos \alpha .$$

Таким же путем находится усилие N_2 в стойке. Сделаем сечение II – II и рассмотрим равновесие правой части (рис. 1.18, в).

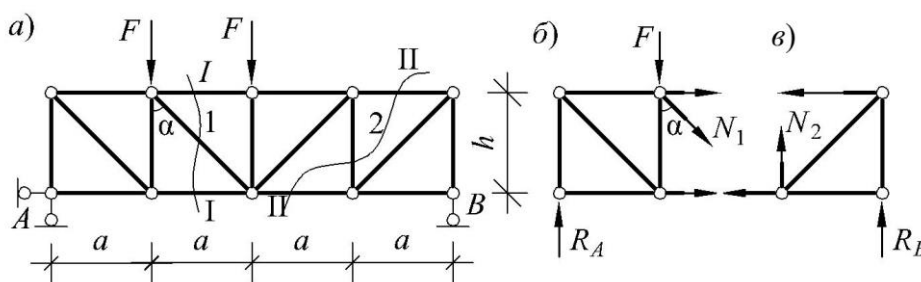


Рис. 1.18. Определение усилий в стержнях фермы с параллельными поясами

Составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = R_B + N_2 = 0 \text{ или } N_2 = -R_B.$$

Определяя усилия, всегда нужно стремиться к сокращению объема вычислений. При этом совершенно не обязательно придерживаться какого-либо одного способа, тем более что это не всегда и удается. Комбинирование способов расчета зависит от геометрической структуры фермы.

1.3. Контрольные вопросы

1. Расчетная схема сооружений. Определение, классификация расчетных схем.
2. Требования к расчетной схеме сооружений.
3. Типы связей плоских расчетных схем. Их статические и кинематические характеристики.
4. Кинематический анализ расчетных схем.
5. Необходимое условие геометрической неизменяемости. Условия прикрепления диска к основанию.
6. Требования к образованию многодисковых расчетных схем.
7. Уравнения равновесия на плоскости и их рациональное использование при определении опорных реакций в однодисковых расчетных схемах.
8. Определение усилий в произвольном сечении расчетной схемы.
9. Дифференциальные зависимости при изгибе и их графическая интерпретация при построении эпюр усилий.
10. Общие правила определения реакций в связях многодисковых расчетных схем.
11. Шарнирно-консольные балки, их образование и расчет.
12. Способы рационального определения реакций в связях многодисковых статически определимых рам.
13. Проверки правильности построения эпюр усилий в рамах.
14. Статически определимые плоские фермы. Определение и классификация ферм.
15. Условие геометрической неизменяемости и его статический смысл для плоских простейших ферм.
16. Определение усилий в стержнях ферм способом вырезания узлов. Частные случаи равновесия узлов.
17. Определение усилий в стержнях ферм способом сечений. Рациональное составление разрешающих уравнений для определения усилий.
18. Определение усилий в стержнях ферм графическим способом. Диаграмма усилий и её особенности.

1.4. Контрольная работа № 1.

Расчёт статически определимой многодисковой системы на статическую нагрузку

Задание. Построить эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил в раме. Исходные данные определяются из табл. 1.1 и расчетным схемам, представленным на рис. 1.19.

Таблица 1.1

Исходные данные к задаче контрольной работе № 1

Первая цифра шифра	F_1 , кН	F_2 , кН	Вторая цифра шифра	q , кН/м	Третья цифра шифра (№ схемы)	h , м	l , м
0	2	0	0	3	0	2	4
1	0	5	1	5	1	3	2
2	3	0	2	2	2	4	3
3	0	6	3	6	3	5	2
4	4	0	4	4	4	4	5
5	0	4	5	3	5	2	4
6	5	0	6	5	6	3	2
7	0	2	7	4	7	5	3
8	6	0	8	6	8	2	5
9	0	3	9	2	9	4	2

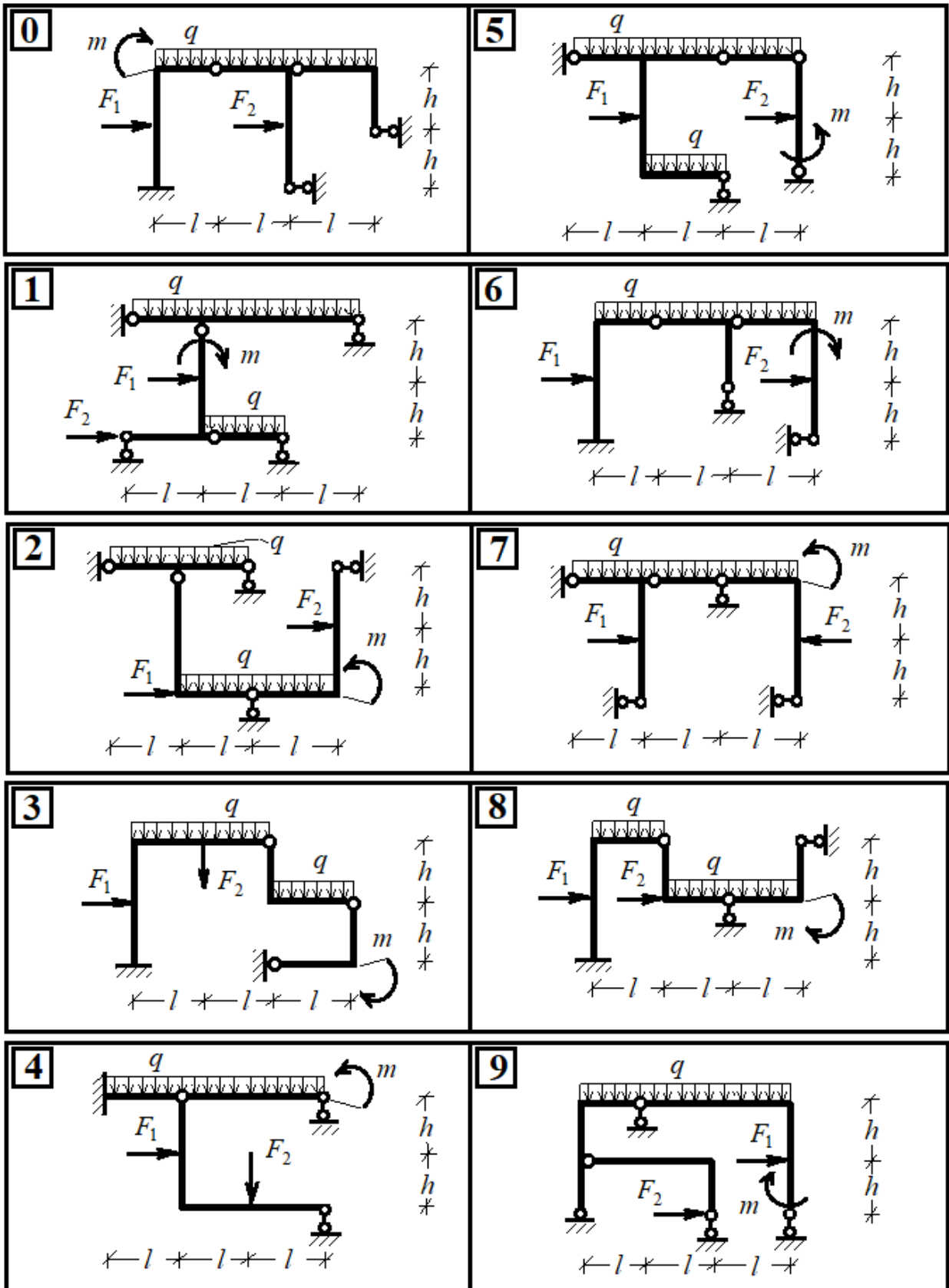


Рис. 1.19. Схемы заданий к контрольной работе № 1

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.
2. Определить степень свободы расчётной схемы по формуле: $W = 3K - Ш$, где K – количество замкнутых контуров, $Ш$ – количество простых шарниров. Произвести анализ геометрической структуры (кинематический анализ) расчётной схемы.
3. Определить опорные реакции из уравнений равновесия.
4. Построить эпюры N , Q и M для всей системы.
5. Произвести проверку правильности построения эпюр, рассмотрев равновесие узлов.
6. Произвести проверку правильности построения эпюр на всех участках, используя дифференциальные зависимости:

$$q = -dQ/dx \text{ и } Q = dM/dx.$$

Пример решения задачи. Построить эпюры N , Q и M в раме (рис. 1.20).

• *Проверка геометрической неизменяемости системы*

Степень статической неопределимости: $n_{ст.} = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 6 = 0$. (замкнутых контуров $K=2$, простых шарниров $Ш=6$).

Или таким образом. Степень свободы системы:

$W = 3Д - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$, где дисков $Д = 3$ (AKD , BLE , EC); шарниров $Ш = 2$ (E и D); опорных стержней $C_{оп} = 5$ (шарниры C и B – шарнирно-неподвижные опоры, имеющие по два опорных стержня).

Анализ геометрической структуры. Диски BLE и EC соединены между собой и с основанием при помощи трёх шарниров, не лежащих на одной прямой. Следовательно, $BLEC$ – диск. К нему присоединён диск AKD (диада) по тому же признаку. Следовательно, вся рама – геометрически неизменяемая система.

• *Освобождаем раму от связей* и определяем опорные реакции, используя уравнения равновесия.

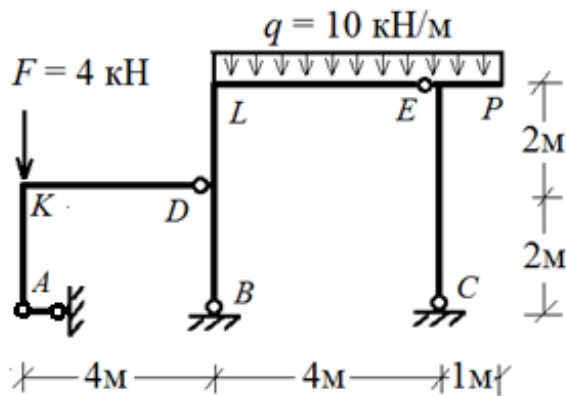


Рис. 1.20. Исходные данные для примера расчета

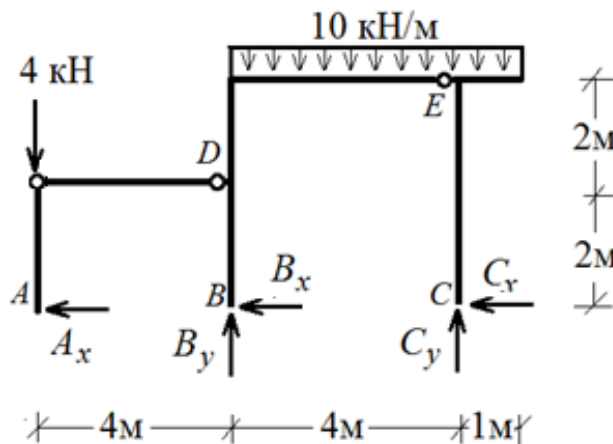


Рис. 1.21. Расчетная схема определения опорных реакций

1) вариант с разделением рамы на отдельные диски

$$\sum M_B = 0; -4 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - C_y \cdot 4 = 0; C_y = 27,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; -4 \cdot 8 - 10 \cdot 5 \cdot 1,5 + B_y \cdot 4 = 0; B_y = 26,75 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 26,75 + 27,25 - 4 - 10 \cdot 5 = 0.$$

Для определения горизонтальных реакций делаем сечения в местах установки шарниров, разбивая раму на отдельные диски.

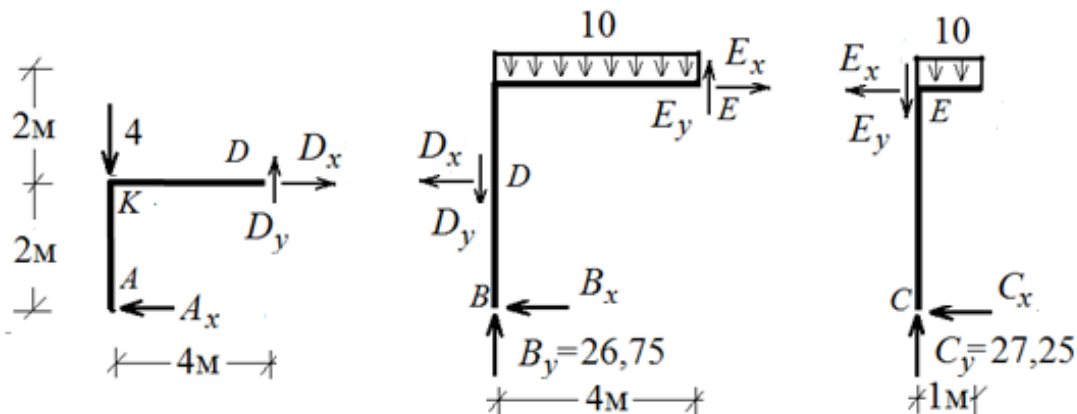


Рис. 1.22. Расчетная схема определения реакций в связях

Диск AD : $\sum M_D = 0$; $-4 \cdot 4 + A_x \cdot 2 = 0$; $A_x = 8$ кН;
 $\sum X = 0$; $D_x - A_x = 0$; $D_x = 8$ кН;
 $\sum Y = 0$; $D_y - 4 = 0$; $D_y = 4$ кН;
 Проверка: $\sum M_A = D_x \cdot 2 - D_y \cdot 4 = 8 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 0$;
 Диск EC : $\sum M_E = 0$; $10 \cdot 1 \cdot 0,5 + C_x \cdot 4 = 0$; $C_x = -1,25$ кН;
 $\sum X = 0$; $C_x + E_x = 0$; $E_x = -C_x = 1,25$ кН;
 $\sum Y = 0$; $C_y - 10 \cdot 1 - E_y = 0$; $E_y = 27,25 - 10 = 17,25$ кН;
 Диск BE : $\sum X = 0$; $E_x - D_x - B_x = 0$;
 $B_x = E_x - D_x = 1,25 - 8 = -6,75$ кН;
 Проверка: $\sum Y = 0$; $26,75 + 17,75 - 4 - 10 \cdot 4 = 0$;

2) вариант без разделения рамы на отдельные диски

$\sum M_B = 0$; $-4 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - C_y \cdot 4 = 0$; $C_y = 27,25$ кН;
 $\sum M_C = 0$; $-4 \cdot 8 - 10 \cdot 5 \cdot 1,5 + B_y \cdot 4 = 0$; $B_y = 26,75$ кН;
 $\sum M_D^{\text{лев.}}$ = 0; $-4 \cdot 4 + A_x \cdot 2 = 0$; $A_x = 8$ кН;
 $\sum M_E^{\text{низ.}}$ = 0; $10 \cdot 1 \cdot 0,5 + C_x \cdot 4 = 0$; $C_x = -1,25$ кН;
 $\sum X = 0$; $A_x + B_x + C_x = 0$; $B_x = -A_x - C_x = -8 - (-1,25) = -6,75$ кН;
 Проверка: $\sum M_E^{\text{лев.}}$ = 0; $-4 \cdot 8 + A_x \cdot 4 + B_y \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 + B_x \cdot 4 =$
 $= -32 + 8 \cdot 4 + 26,75 \cdot 4 - 6,75 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0$.

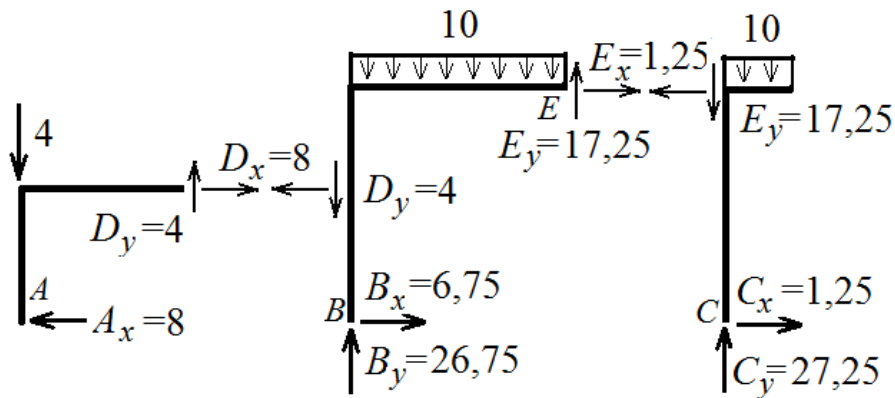


Рис. 1.23. Проверка равновесия дисков

- Строим эпюры усилий в раме N , Q и M (рис. 1.24).
- Определяем M_{max} на эпюре M : $Q_x = -17,25 + 10 \cdot x = 0$; $x = 1,725$ м.
 $M_{max} = \sum M_i = 17,25 \cdot 1,725 - 10 \cdot 1,725 \cdot (1,725/2) = 14,88$ кН·м (растянуты нижние волокна).

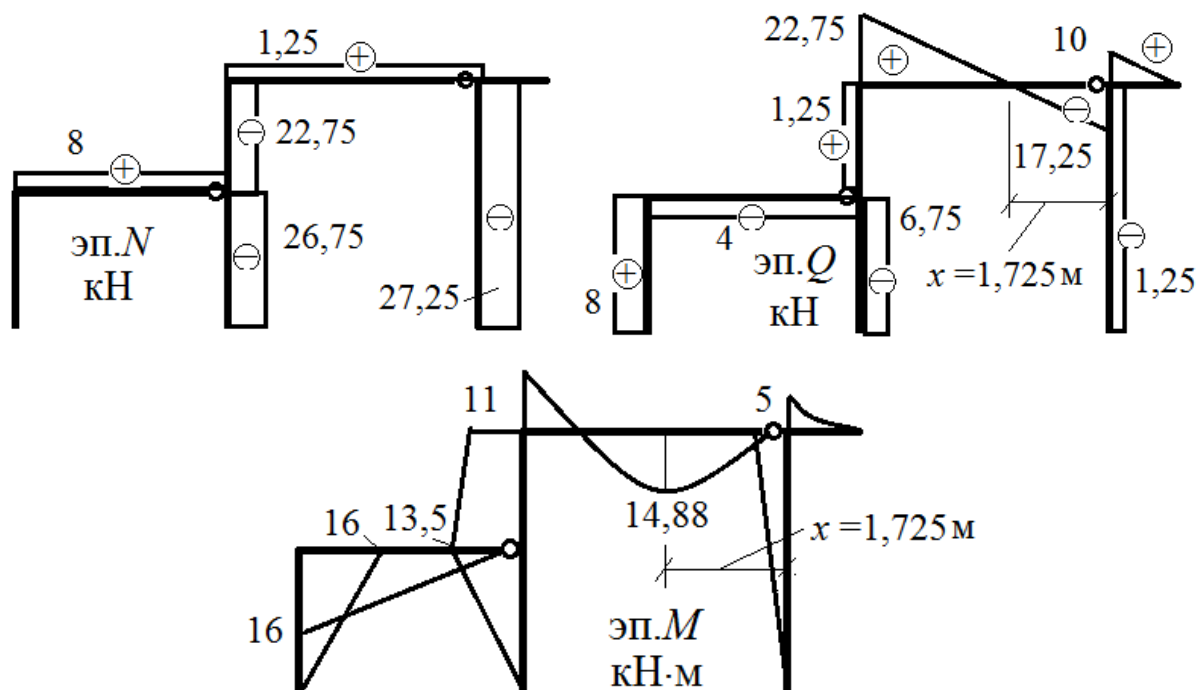


Рис. 1.24. Эпюры усилий в раме

- Проверяем правильность построения эпюр по дифференциальным зависимостям $Q = -\frac{dM}{dx}$; $Q = Q^{\text{б}} - \frac{M_{\text{пр}} + M_{\text{лев}}}{\ell}$.

$$Q_{AK} = \frac{16}{2} = 8 \text{ кН};$$

$$Q_{DK} = -\frac{16}{4} = -4 \text{ кН}; \quad Q_{BD} = -\frac{13,5}{2} = -6,75 \text{ кН}; \quad Q_{CE} = -\frac{5}{4} = -1,25 \text{ кН};$$

$$Q_{DL} = \frac{13,5 - 11}{2} = 1,25 \text{ кН}; \quad Q_{LE}^{\text{лев}} = \frac{10 \cdot 4}{2} - \frac{-11}{4} = 22,75 \text{ кН};$$

$$Q_{LE}^{\text{пр}} = -\frac{10 \cdot 4}{2} - \frac{-11}{4} = -17,25 \text{ кН};$$

- Рассмотрим для проверки равновесие узлов рамы.

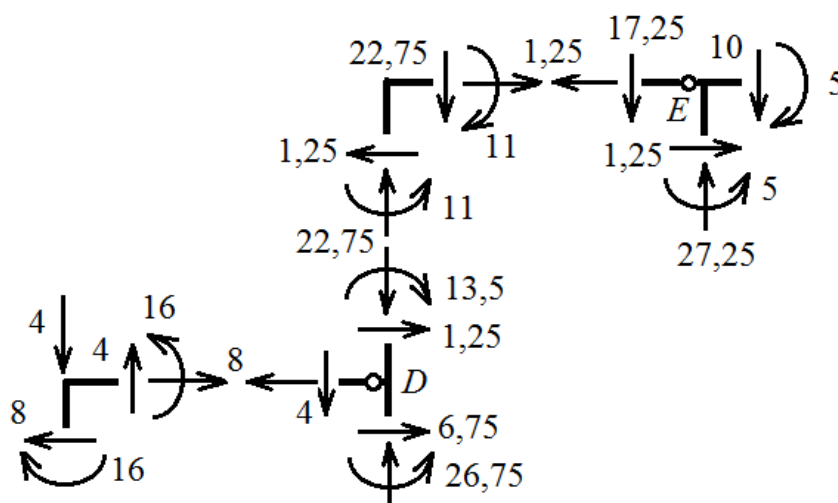


Рис. 1.27. Проверка равновесия узлов рамы

1.5. Контрольная работа № 2.

Определение усилий в стержнях плоской простейшей фермы

1.5.1. Задача 2.1. Расчет плоской простейшей фермы на статическую нагрузку

Задание. Способом сечений, а при необходимости способом вырезания узлов, определить усилия во всех стержнях заданной плоской простейшей фермы. Исходные данные к задаче определить по табл. 1.2 и расчетным схемам, представленным на рис. 1.28.

Таблица 1.2

Исходные данные к контрольной работе № 2

Первая цифра шифра	F_1 , кН	№ панели	Вторая цифра шифра	a , м	Третья цифра шифра (№ схемы)	h , м
0	20	5	0	4	0	4
1	30	3	1	5	1	6
2	40	4	2	6	2	4
3	50	5	3	4	3	4
4	60	4	4	5	4	5
5	70	3	5	6	5	3
6	80	4	6	4	6	3
7	100	5	7	5	7	2
8	40	3	8	6	8	4
9	50	4	9	4	9	3

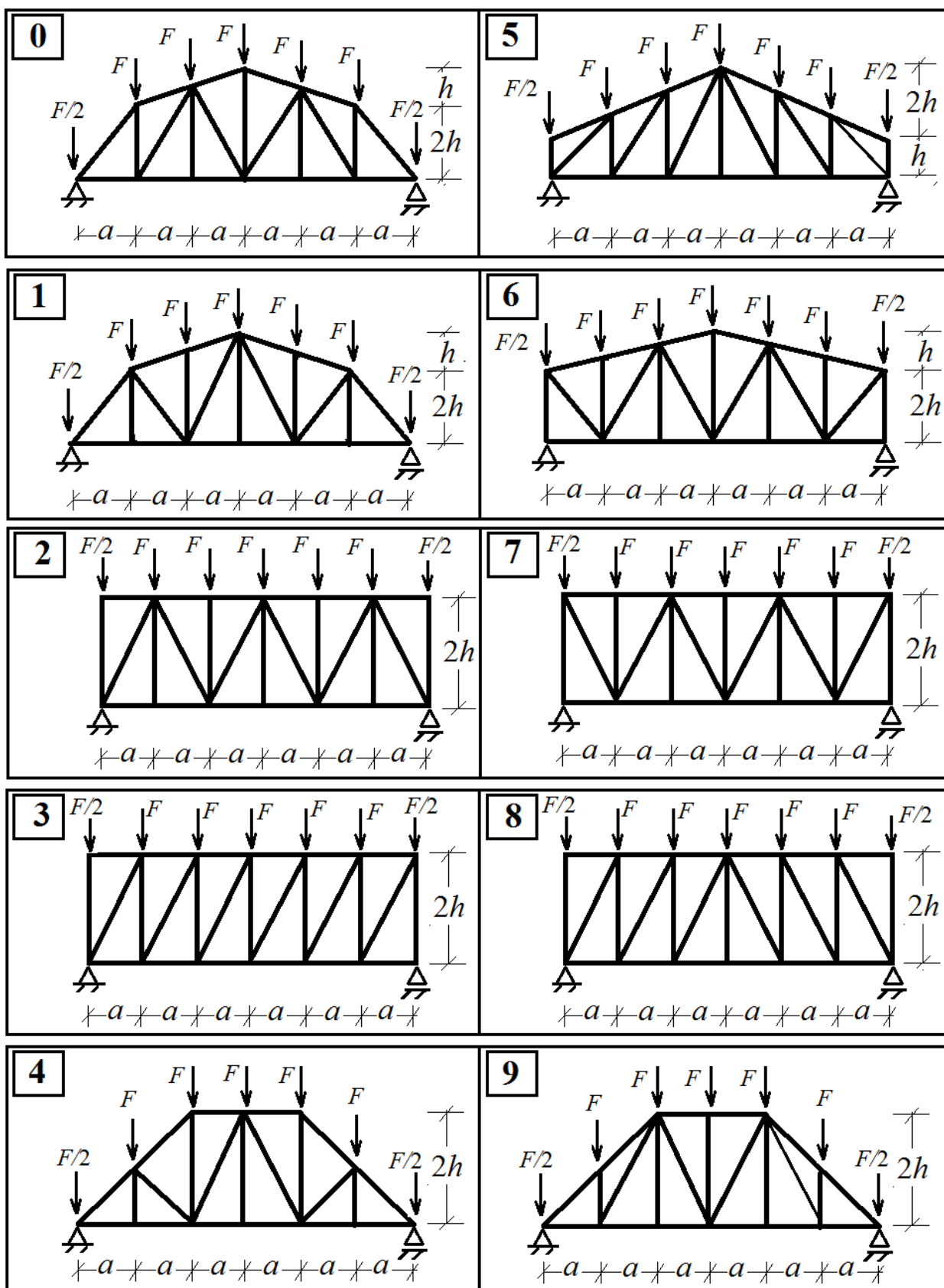


Рис. 1.28. Схемы заданий к контрольной работе № 2

Пример решения задачи 2.1. Определить усилия в стержнях четвёртой панели фермы, а также в правой и левой стойках (в стержнях №№ 1-5).

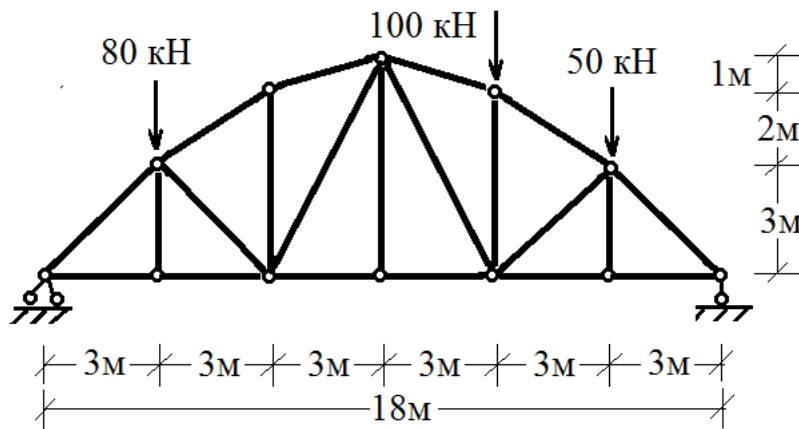


Рис. 1.29. Исходные данные для примера расчета 1.3

• Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0; 80 \cdot 3 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 15 - B_y \cdot 18 = 0; B_y = 121,667 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -80 \cdot 15 - 100 \cdot 6 - 50 \cdot 3 + A_y \cdot 18 = 0; A_y = 108,333 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 108,333 + 121,667 - 80 - 100 - 50 = 0.$$

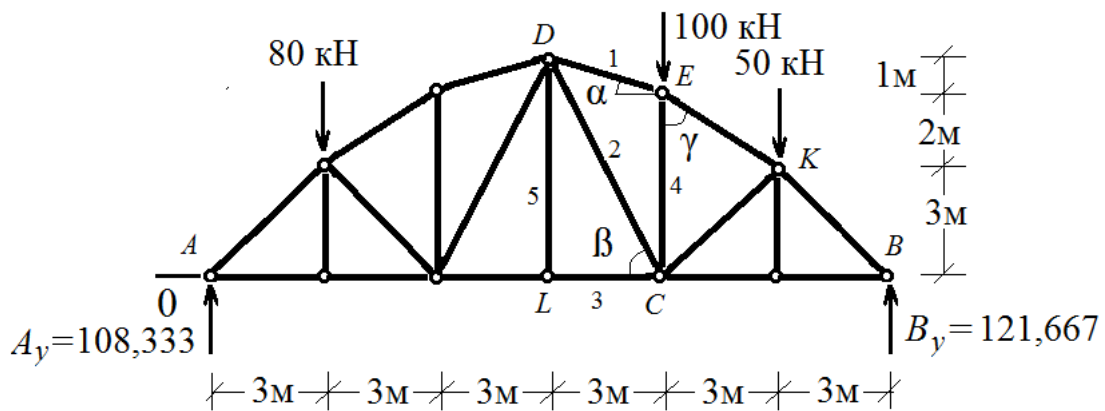


Рис. 1.30. Расчетная схема фермы

• Выявляем «нулевые стержни». $N_5 = 0$ (по признаку).

• Определяем необходимые тригонометрические величины:

$$\text{Из треугольника } DEe': DE = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3,162;$$

$$\cos \alpha = 3/3,162 = 0,949; \sin \alpha = 1/3,162 = 0,316;$$

$$\text{Из треугольника } DLC: DC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,708;$$

$$\cos \beta = 3/6,708 = 0,447; \sin \beta = 6/6,708 = 0,894;$$

$$\text{Из треугольника } KEk': KE = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,606;$$

$$\cos \gamma = 2/3,606 = 0,555; \sin \gamma = 3/3,606 = 0,832;$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707;$$

- Разрезаем ферму по заданной панели. Определяем усилия в стержнях: $\sum M_C^{\text{пр}} = 0; -N_1 \cos \alpha \cdot 5 + 50 \cdot 3 - 121,667 \cdot 6 = 0;$
 $-N_1 \cdot 0,949 \cdot 5 + 150 - 730 = 0; N_1 = -122,234 \text{ кН (стержень сжат);}$

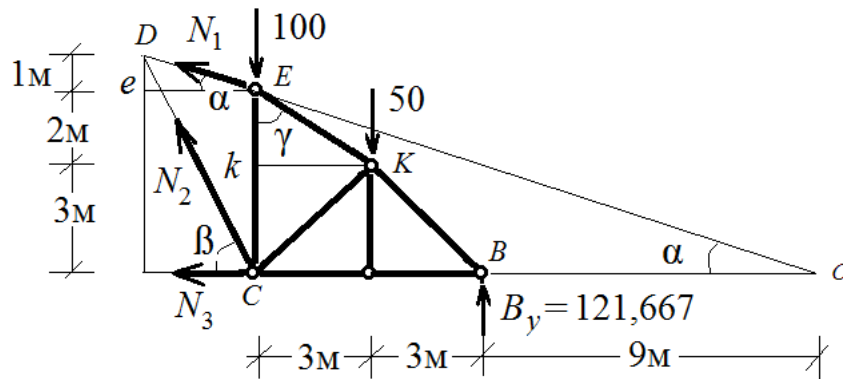


Рис. 1.31. Схема отсеченной части фермы

$$\sum M_O^{\text{пр}} = 0; N_2 \cdot \sin \beta \cdot 15 - 100 \cdot 15 - 50 \cdot 12 + 121,667 \cdot 9 = 0;$$

$$N_2 \cdot 0,894 \cdot 15 - 1500 - 600 + 1095 = 0;$$

$$N_2 = 74,944 \text{ кН (стержень растянут);}$$

$$\sum M_D^{\text{пр}} = 0; N_3 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 6 - 121,667 \cdot 9 = 0;$$

$$N_3 = 82,5 \text{ кН (стержень растянут);}$$

Проверка равновесия отсеченной части:

$$\sum X = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta + N_3 = 122,234 \cdot 0,949 + 74,944 \cdot 0,447 + 82,5 = 0.$$

- Вырезаем узел E и находим усилия N_6 и N_4 :

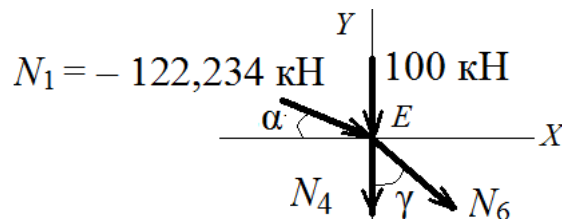


Рис. 1.32. Узел E

$$\sum X = 0; N_1 \cdot \cos \alpha + N_6 \cdot \sin \gamma = 0; 122,234 \cdot 0,949 + N_6 \cdot 0,832 = 0;$$

$$N_6 = -139,423 \text{ кН (стержень сжат);}$$

$$\sum Y = 0; -100 - 122,234 \cdot \sin \alpha - N_6 \cdot \cos \gamma - N_4 = 0;$$

$$-100 - 122,234 \cdot 0,316 - (-139,423) \cdot 0,555 - N_4 = 0;$$

$$N_4 = -61,246 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Глава 2. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ СТАТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

При расчете сооружений часто приходится иметь дело с подвижной нагрузкой разнообразного вида. К такой нагрузке относится давление от автомобилей, поездов, кранов и т. п. Во всех этих случаях нагрузка чаще всего состоит из системы параллельных вертикальных сил, расстояние между которыми при движении остается постоянным. Самой простой из всех возможных нагрузок является одна сосредоточенная сила.

Подвижная нагрузка по своей природе является динамической, так как она меняет свое положение, а иногда и величину, во времени. Динамические нагрузки при своем воздействии вызывают колебание сооружений, и в итоге расчет становится сложнее, чем при действии неподвижной статической нагрузки. Расчет на действие динамических нагрузок относится к специальному курсу строительной механики.

С целью упрощения решения рассматриваемой задачи принимается, что нагрузка движется медленно, плавно, без толчков и не меняет своей величины. Такую нагрузку будем называть подвижной статической нагрузкой и пренебрегать ее динамическим эффектом.

Особенность воздействия подвижной статической нагрузки состоит в том, что усилия от этой нагрузки в элементах системы, будут переменными. Они будут зависеть от положения груза на системе. Поэтому, чтобы подобрать сечение в элементах конструкции, нужно выявить самое невыгодное положение нагрузки, при котором усилие в рассматриваемом сечении будет максимальным. Перебрать все возможные постановки грузов для более или менее сложного сооружения представляется весьма трудоемкой процедурой даже при наличии вычислительной техники. Для выявления положения грузов, вызывающих наибольшие усилия в сечении, создан специальный подход, который сводится к построению линий влияния.

Линией влияния называется график, изображающий закон изменения какой-либо величины (например, опорной реакции, изгибающего момента и т. п.), возникающей в определенном месте сооружения, в зависимости от положения движущегося по сооружению единичного груза, сохраняющего постоянное направление.

Таким образом, линия влияния оказывается как бы обратной величиной по отношению к эпюре усилий. Эпюра показывает изменение усилий по всему сооружению, а линия влияния – только в определенном месте. Для анализа другого сечения необходимо строить другую линию влияния. С другой стороны, эпюра строится от нагрузки, приложенной в определенном месте, а линия влияния – от нагрузки, движущейся по всему сооружению.

Линия влияния строится от самой простой нагрузки – от единичной безразмерной силы, имеющей, как правило, вертикальное направление, хотя это и не обязательно. Линии влияния строят статическим или кинематическим способами.

2.1. Статический способ построения линий влияния

Статический способ построения линий влияния состоит в следующем: груз $F = 1$ устанавливается в произвольное положение и абсцисса его точки приложения в произвольно выбранной системе координат обозначается какой-либо буквой, например x . Считая груз неподвижным, определяют любым способом искомую величину, которая выразится некоторой формулой, куда в общем случае может войти x . Далее, считая x переменным, строят график, который и будет линией влияния.

Иногда, чтобы построить линию влияния для всего сооружения, необходимо ставить груз поочередно на нескольких различных участках и для каждого из них составлять свое уравнение равновесия. При построении линий влияния усилий изложенный способ справедлив по отношению к любой конструкции.

2.1.1. Однопролетные балки

Рассмотрим однопролетную балку с консолью (рис. 2.1). Штриховой линией покажем зону движения груза. Линия влияния (л. вл.) строится только под этой зоной, поэтому и изображать ее следует для наглядности под балкой, а не рядом, как это имеет место при построении эпюр. Приложим вертикальную единичную безразмерную силу в произвольном месте и обозначим ее кружком, чтобы показать, что она подвижная.

Сначала построим линии влияния опорных реакций. Зададимся их направлением (снизу вверх, см. рис. 2.1, *а*). Горизонтальная

опорная реакция при вертикальной нагрузке равна нулю. Возьмем за начало координат опору A и обозначим расстояние от нее до силы через x (рис. 2.1, a). Далее, считая груз неподвижным, определим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_B = R_A \cdot l - 1(l - x) &= 0; & R_A &= (l - x) / l. \\ \sum M_A = 1 \cdot x - R_B \cdot l &= 0; & R_B &= x / l. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В результате получили аналитические выражения для реакций как функций от x . Выражения (2.1) показывают, что реакции изменяются по линейному закону, так как x входит в выражение в первой степени. Из (2.1) также видно, что ординаты линий влияния реакций являются безразмерными. Забегая вперед, отметим, что линейность линий влияния усилий является общим свойством статически определимых систем. Линейность выражений (2.1) позволяет построить графики по двум ординатам

$$\begin{aligned} x = 0; & \quad R_A = 1; & \quad R_B = 0. \\ x = l; & \quad R_A = 0; & \quad R_B = 1. \end{aligned}$$

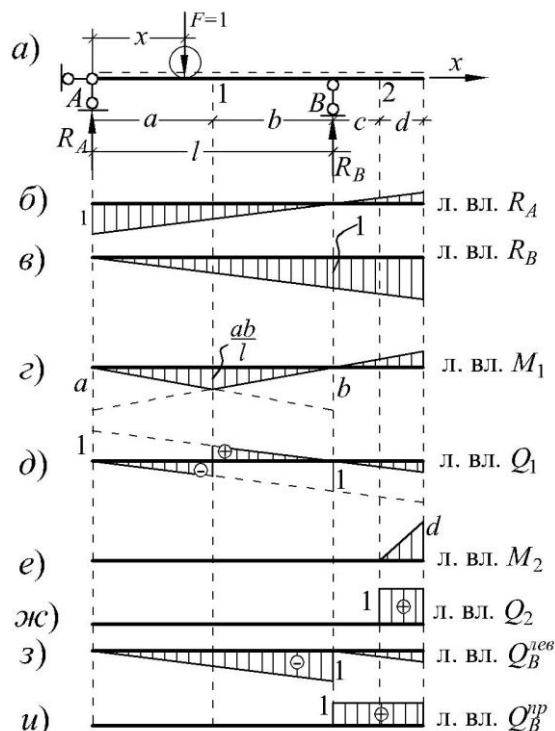


Рис. 2.1. Построение линий влияния в однопролетной балке с консолью

Графики линий влияния изображены под балкой (рис. 2.1, б, в). Ординаты в других сечениях находятся либо из (2.1) путем подстановки соответствующих значений x , либо из подобия соответ-

ствующих треугольников. По линии влияния R_A видно, что она меняет знак при переходе силы вправо за опору B .

Теперь построим линии влияния усилий в сечении 1. При заданном нагружении в этом сечении будут лишь изгибающий момент и поперечная сила. Если при построении линий влияния опорных реакций разрезались опорные стержни, и груз всегда находился по одну сторону от сечения, что позволяло ограничиться составлением одного уравнения равновесия, то при вычислении усилий в сечении 1 единичная сила проходит через это сечение. Это обстоятельство вынуждает рассматривать две постановки груза: груз слева и груз справа от сечения. Объясняется это тем, что при переходе груза через сечение меняется вид уравнения равновесия, которое составляется для всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Если одна из сил исчезнет, то, естественно, изменится и вид уравнения, а, следовательно, и вид выражения усилия, которое определяется из этого уравнения.

Итак, проведем сечение, зададимся направлением усилий (рис. 2.2) и рассмотрим две постановки единичного груза.

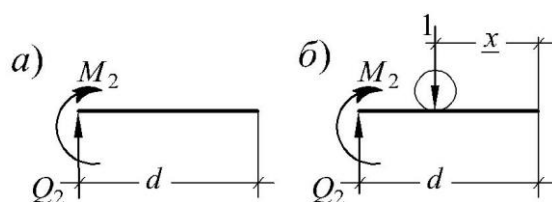


Рис. 2.2. Использование способа сечений при построении линий влияния

1. Груз слева от сечения 1. По-прежнему возьмем начало координат над опорой A . При определении усилий можно составлять уравнения равновесия для любой отсеченной части. Обычно выбирается та часть, где меньше приложено сил. В данном случае целесообразнее рассмотреть правую часть, так как к ней приложено меньше сил, но при этом следует помнить, что полученное уравнение справедливо только для заданного вида нагружения, т. е. для случая, когда единичная сила приложена левее сечения 1.

С целью определения M_1 составим сумму моментов всех сил, расположенных правее сечения 1, относительно нейтральной оси сечения 1, а для определения Q_1 составим сумму проекций всех сил, приложенных к правой части, на нормаль к оси стержня.

$$M_1 - R_B \cdot b = 0; \quad M_1 = R_B \cdot b.$$

$$Q_1 + R_B = 0; \quad Q_1 = -R_B.$$

Подставим сюда значение R_B из формулы (2.1). Тогда усилия

$$M_1 = \frac{b}{l} x; \quad Q_1 = -\frac{x}{l}.$$

Выражения опять получились линейными от x . Ординаты изгибающего момента имеют размерность длины, а ординаты поперечной силы – безразмерные. Для полученных выражений построим графики. Их можно построить по любым двум ординатам, при этом, не забывая, что полученные выражения справедливы только для положения груза слева от сечения 1, т. е. полученные прямые будут действительны только на участке от А до сечения 1. Чтобы подчеркнуть этот факт, построим линии влияния по ординатам в этих двух сечениях:

$$x = 0; \quad M_1 = 0; \quad Q_1 = 0.$$

$$x = a; \quad M_1 = \frac{ab}{l}; \quad Q_1 = -\frac{a}{l}.$$

Графики изображены на рис. 2.1, з, д. Если взять $x = l$, то $M_1 = b$, $Q_1 = -1$. Но эти величины уже фиктивные. Их можно использовать только для построения линии влияния (см. штриховые линии на рис. 2.1).

2. Груз справа от сечения 1. При этом положении груза целесообразнее составить уравнение равновесия для левой части, так как к ней приложено меньше сил.

$$R_A \cdot a - M_1 = 0; \quad M_1 = R_A \cdot a, \quad \text{или} \quad M_1 = \frac{l-x}{l} a.$$

$$R_A - Q_1 = 0; \quad Q_1 = R_A, \quad \text{или} \quad Q_1 = \frac{l-x}{l}.$$

Полученные выражения справедливы только для правой части от сечения 1 до конца балки. Но для построения линий влияния можно использовать любые значения x , в том числе и $x \leq a$.

$$x = a; \quad M_1 = \frac{l-a}{l} a = \frac{ab}{l}; \quad Q_1 = \frac{b}{l}.$$

$$x = l; \quad M_1 = 0; \quad Q_1 = 0.$$

Если подставить $x = 0$, то $M_1 = a$, $Q_1 = 1$. Эти фиктивные значения можно использовать для построения линий влияния на

участке от сечения 1 вправо. Окончательные графики или линий влияния для M_1 и Q_1 приведены на рис. 2.1, з, д.

Таким образом, построены линии влияния для опорных реакций и для M и Q в произвольном сечении между опорами. Нет надобности каждый раз проводить такие подробные построения, так как все линии влияния для однопролетной балки будут однотипными и их можно строить более простым путем.

Например, чтобы построить линии влияния опорной реакции, нужно под этой опорой отложить ординату, равную единице, и от этой ординаты провести прямую так, чтобы под другой опорой ордината была равна нулю.

Линия влияния изгибающего момента в сечении между опорами имеет вид треугольника с максимальной ординатой под сечением, равной ab/l , и с нулевыми ординатами под опорами. Направлением изгибающего момента задаются произвольно. Если из уравнения равновесия он получится со знаком минус, то это будет свидетельствовать о том, что волокна растянуты с другой стороны.

Для построения линии влияния поперечной силы нужно провести две параллельные прямые, как показано на рис. 2.1, д штриховой линией, с расстоянием между ними, равным единице. Под сечением будет скачок, равный единице, так как $a/l + b/l = 1$. Знак слева от сечения всегда будет минус, а справа – плюс.

Иными будут линии влияния в консольной балке или в сечениях на консоли однопролетной балки. Возьмем, например, сечение 2. Так как груз проходит через это сечение, то опять рассмотрим две постановки груза. Проведем сечение и зададимся направлениями усилий M_2 и Q_2

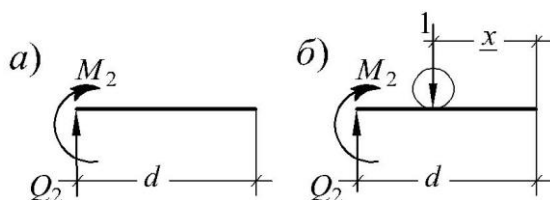


Рис. 2.3. Определение усилий в сечении на консоли балки

1. Сила слева от сечения 2. Целесообразно рассмотреть правую часть (рис. 2.3, а). Составим уравнения равновесия: $M_2 = 0$, $Q_2 = 0$, т. е. ординаты равны нулю. Это означает, что при силе, расположенной слева от сечения 2, усилия в правой части консольной балки отсутствуют.

2. Сила справа от сечения 2 (рис. 2.3, в). При данной постановке груза опять имеет смысл рассмотреть правую часть. Поскольку согласно статическому способу построения линий влияния начало координат можно назначать в любом месте, примем его на правом конце балки, а отсчет будем вести влево. Чтобы не путать эту координату с предыдущей, отметим ее чертой снизу.

Чтобы определить M_2 , составим сумму моментов относительно нейтральной оси сечения 2, что позволяет не включать в уравнение Q_2 . Для ее определения составим сумму проекций всех сил на нормаль к оси стержня.

$$M_2 + 1(d - \underline{x}) = 0; M_2 = - (d - \underline{x}).$$

$$Q_2 - 1 = 0; Q_2 = 1.$$

Интересно отметить, что поперечная сила на консоли получилась постоянной. График для M_2 легко построить по двум ординатам. При $\underline{x} = 0$ $M_2 = -d$; при $\underline{x} = d$ $M_2 = 0$ (см. рис. 2.1, е). Минус показывает, что растянуты не нижние волокна, как задавались, а верхние. Линия влияния Q_2 изображена на рис. 2.1, ж.

Сечения 1 и 2 были взяты произвольно. Если их сдвигать к опоре B , то получим линии влияния для опорного сечения B . Для изгибающего момента линия влияния получается одинаковой для сечений справа и слева от опоры, так как опорная реакция R_B не дает приращения момента в этом сечении (плечо действия силы равно нулю). А вот линия влияния поперечной силы будет различной для сечений слева и справа от опоры. Объясняется это тем, что в одном случае R_B входит в уравнение равновесия (сечение слева от опоры B), а в другом – нет (сечение справа от опоры B). На рис. 2.1, з, и приведены эти линии влияния. Эти линия влияния строятся путем перемещения сечения к опоре.

2.1.2. Многопролетные шарнирные балки

При построении линий влияния усилий в многопролетных шарнирных балках можно использовать либо статический, либо кинематический способ. В случае применения статического способа, как и при расчете на неподвижную нагрузку, предварительно строится схема взаимодействия балок, а затем рассматриваются различные постановки единичной силы.

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 2.4, а. Схема взаимодействия отдельных балок представлена на рис. 2.4, б. Линии

влияния по-прежнему строятся под грузовой линией (см. штриховую линию на рис. 2.4, а).

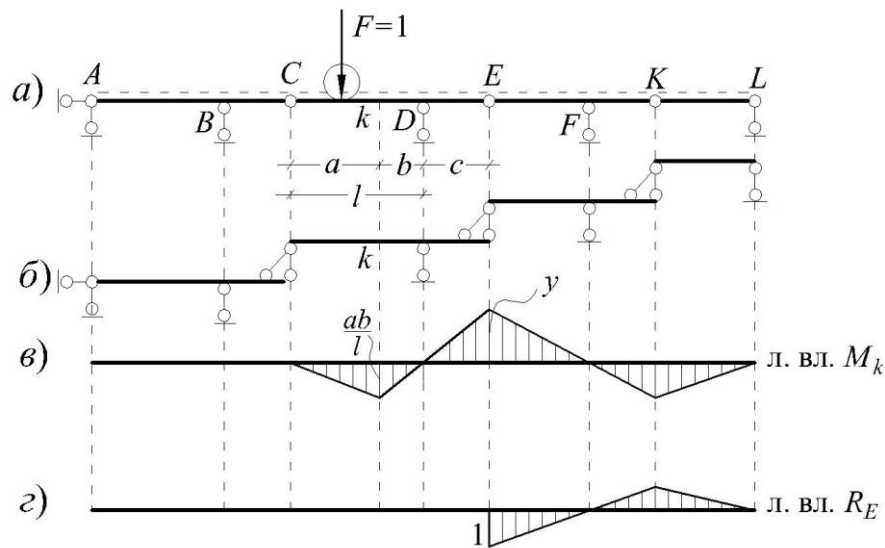


Рис. 2.4. Использование схемы взаимодействия при построении линий влияния

Допустим, что нужно построить линию влияния изгибающего момента в сечении k , которое находится на балке CE . Пока груз находится на этой балке, линия влияния ничем не будет отличаться от л. вл. M_k , построенной для однопролетной консольной балки, так как на других участках груза нет и их можно не принимать во внимание.

После того как построена линия влияния для рассматриваемой балки, где находится искомое усилие, груз перемещают вправо или влево от рассматриваемой балки. В результате возможны две постановки груза по схеме взаимодействия: либо груз находится ниже рассматриваемой балки, либо выше.

Если груз находится *ниже*, например, на балке AC , то по схеме видно, что его влияние вверх не передается. Следовательно, все усилия в вышележащих балках будут равны нулю, в том числе и в сечении k . Линии влияния будут совпадать с осью абсцисс, так как ее ординаты равны нулю.

Новой в данном случае будет постановка груза *выше* рассматриваемой балки, например, на балке EK . При составлении уравнений равновесия для усилий в балке CE в них войдет реакция R_E , через которую передается влияние отброшенной части. В результате все усилия в балке CE будут изменяться пропорционально реакции R_E , потому что других воздействий на балку нет.

Л. вл. реакции R_E строится уже как для однопролетной балки EK при грузе на этой балке (рис. 2.4, z). Определим ординату y над шарниром E . Из подобия треугольников $(ab/l)/y = b/c$, отсюда $y = ac/l$. Теперь определим M_k из уравнения равновесия, составленного при нахождении груза над шарниром E . Рассмотрим балку CE . Возьмем правую часть с реакцией R_E на конце.

$$M_k = -R_E(b + c) + R_B \cdot b.$$

Когда груз находится над шарниром E , $R_E = 1$; $R_B = (l + c)/l$. Подставляя эти значения, получим $M_k = -ac/l = y$, т. е. то же самое значение, что и из подобия треугольников. Следовательно, линия влияния в шарнире E не имеет разрыва.

Если груз находится еще выше, например, на балке KL , то она рассматривается отдельно и, как для отдельной балки, строится линия влияния реакции R_K . Полученная линия влияния замыкается с уже построенной линией влияния, т. е., в отличие от расчета при неподвижной нагрузке, процедура вычислений идет не сверху вниз, а наоборот – снизу вверх.

Итак, при построении линий влияния усилий в многопролетных шарнирных балках имеют место три постановки единичного груза на схеме взаимодействия:

1) груз находится на балке, для усилий которой строятся линии влияния; линии влияния на этом участке строятся как в однопролетной балке;

2) груз находится ниже, т. е. на балке, на которую опирается рассматриваемая балка; ординаты линии влияния будут равны нулю;

3) груз находится выше, т. е. на балке, которая опирается на рассматриваемую балку. Вначале строится линия влияния смежной опорной реакции, и эта линия влияния замыкается с уже частично построенной линией влияния.

На рис. 2.5, a приведен пример построения линий влияния статическим способом. По рисунку видно, что для самой нижней части балки линии влияния распространяются по всей ее длине. А для верхней части – ненулевые ординаты только под ней. В остальной части ординаты линии влияния равны нулю.

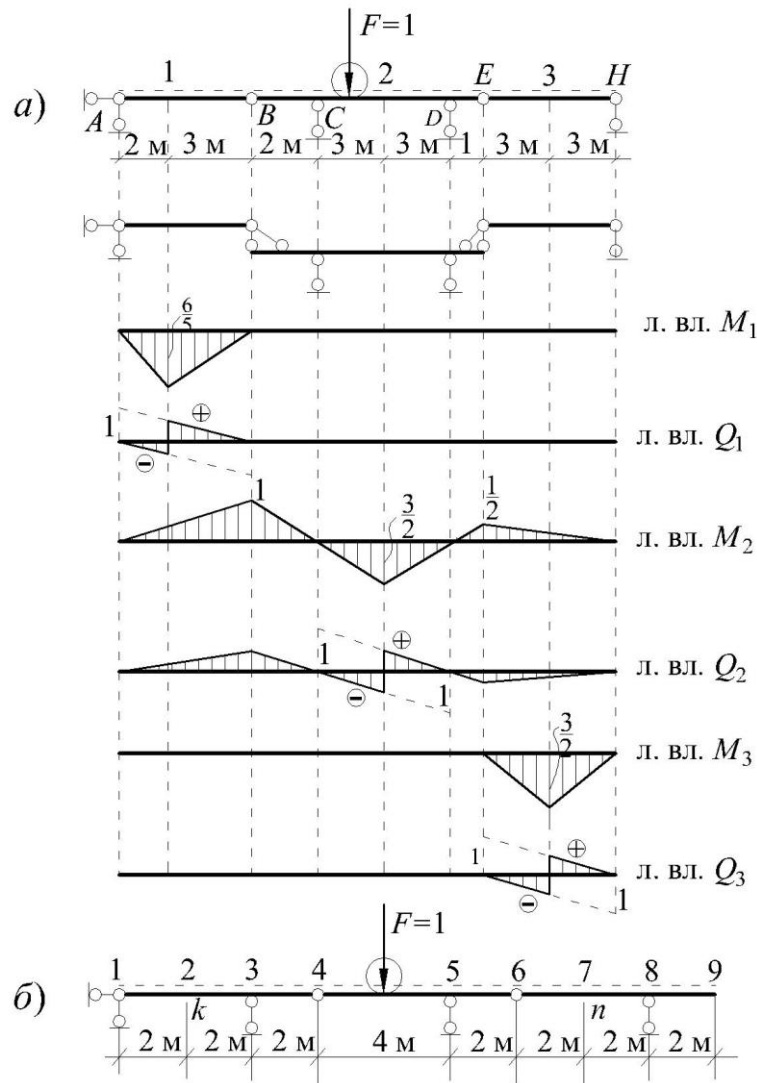


Рис. 2.5. Построение линий влияния усилий в многопролетных балках

Упражнение 2.1. Постройте самостоятельно линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для сечений k и n балки, приведенной на рис. 2.5, б.

2.2. Кинематический способ построения линий влияния

Линии влияния можно строить и кинематическим способом. Он позволяет легко изобразить общий вид линии влияния (без ординат), что удобно при проверке линий влияния, построенных статическим способом. Использование кинематического способа целесообразно при построении линий влияния в многопролетных шарнирных балках, для которых весьма просто изобразить схемы возможных перемещений.

Кинематический способ основан на принципе возможных перемещений. Во всякой неизменяемой статически определимой си-

стеме все связи являются абсолютно необходимыми. Это значит, если удалить одну связь, то получится система с одной степенью свободы или механизм, перемещения всех точек которого определяются перемещениями одной какой-либо его точки.

Усилие, для которого строится линия влияния, представляет собой усилие в одной из связей системы. Удалив эту связь и заменив ее влияние искомым усилием, получим механизм, на который действуют искомое усилие и подвижный груз $F = 1$. Полученному механизму задается бесконечно малое возможное перемещение и на этом перемещении составляется уравнение возможных работ, приравненное нулю, так как система находится в равновесии. Из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Построим, например, линию влияния R_A для однопролетной балки, изображенной на рис. 2.6, а. Удаляем связь по направлению R_A (рис. 2.9, б). Задаем возможное перемещение (можно и вверх) (рис. 2.6, в). Составляем уравнение возможных работ сил на соответствующих перемещениях $1 \cdot y - R_A \cdot a = 0$, отсюда $R_A = y/a$.

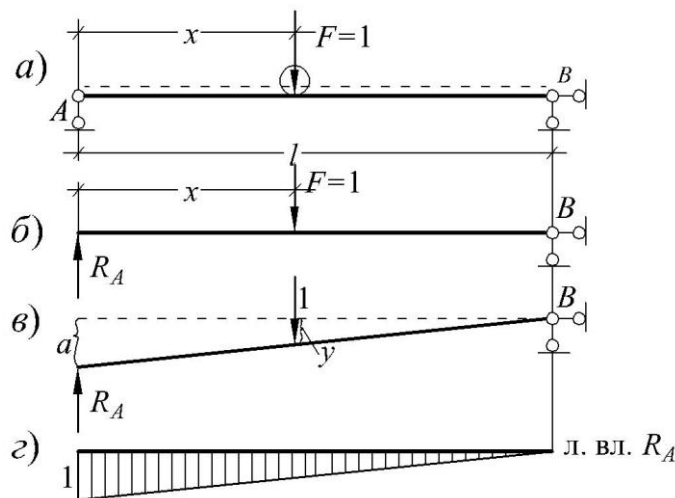


Рис. 2.6. Построение линии влияния кинематическим способом

В полученном выражении a величина постоянная, а y зависит от положения груза. Следовательно, изменение реакции будет пропорционально y . Таким образом, ординаты бесконечно малых возможных перемещений будут представлять в некотором масштабе ординаты линии влияния искомого усилия, что позволяет сделать следующий вывод: *форма линии влияния определяется эюрой перемещений грузовой линии по направлению единичной силы*. На рис. 2.6, з эта форма заштрихована. Для определения ординат выразим y через a , используя подобие треугольников,

$$\frac{l}{a} = \frac{l-x}{y}, \text{ отсюда } y = \frac{a(l-x)}{l}.$$

После подстановки этого значения получим $R_A = (l-x)/l$, т. е. то же самое уравнение, что и при статическом способе построения линии влияния.

Аналогично строятся линии влияния для других усилий. При построении линий влияния изгибающих моментов в конструкцию вводится шарнир, что равносильно удалению одной связи, а при построении линий влияния поперечных сил в сечении удаляется наклонный стержень 2 (см. рис. 1.1), после чего два диска могут перемещаться относительно друг друга, оставаясь параллельными. Ординаты же определяются, как при статическом способе.

При построении линий влияния усилий в многопролетных шарнирных балках для проверки можно использовать следующие положения, которые имеют место после превращения балки в механизм,

- 1) каждому диску соответствует прямая на линии влияния;
- 2) под опорой (абсолютным мгновенным центром вращения) ординаты линии влияния равны нулю;
- 3) под шарниром (относительным мгновенным центром вращения) на линии влияния имеет место перелом, если линия влияния не совпадает с осью абсцисс.

Проверим эти положения на примере построения линии влияния изгибающего момента в сечении k балки, приведенной на рис. 2.7, а. На рис. 2.7, б изображен механизм, а на рис. 2.7, в – линия влияния M_k .

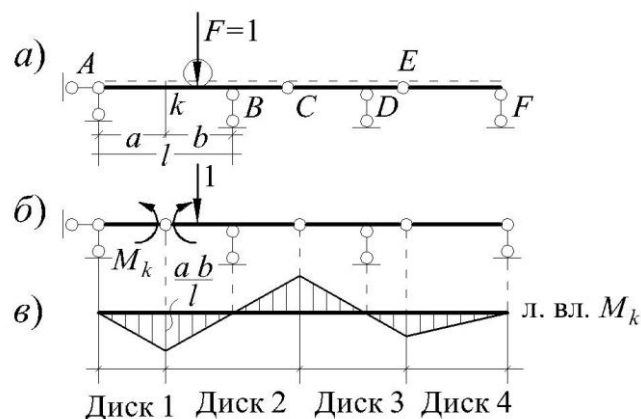


Рис. 2.7. Процесс построения линии влияния кинематическим способом

По рисунку видно что, каждому диску (а их после введения шарнира – четыре) соответствует прямая линия. Под опорами А, В,

D и F на линии влияния ординаты равны нулю, а под шарнирами C и E – переломы, что служит подтверждением правильности построения линии влияния.

2.3. Определение усилий по линиям влияния от неподвижной нагрузки

Основное назначение линий влияния состоит в нахождении самого невыгодного положения подвижной нагрузки, т. е. положения, при котором усилия от заданной нагрузки будут максимальными. Но на основе принципа независимости действия сил, линии влияния также можно использовать и для вычисления усилий от неподвижной нагрузки.

Рассмотрим, например, произвольную балку, для которой построена линия влияния усилия S (рис. 2.8, а). Пусть балка нагружена сосредоточенными силами, показанными на рис. 2.8, а. Если бы к балке была приложена только одна сила $F_1 = 1$, то $S = y_1$. Но так как в общем случае $F_1 \neq 1$, то $S = F_1 \cdot y_1$, а при наличии нескольких сил на основании принципа независимости действия сил

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots - F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i.$$

Знак минус будет в тех случаях, когда ордината y_i – отрицательная, либо сила F_i направлена снизу вверх.

На рис. 2.8, б приведена балка, нагруженная двумя силами, и для сечения k этой балки построена линия влияния M_k . Этот момент от заданного нагружения равен $M_k = F \frac{2l}{9} + 2F \frac{l}{9} = \frac{4}{9} Fl$.

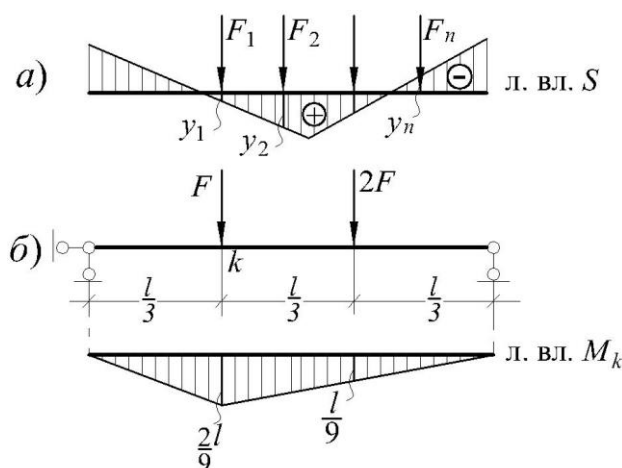


Рис. 2.8. Определение усилий по линии влияния от сосредоточенных сил

Рассмотрим теперь произвольную часть балки, нагруженную распределенной нагрузкой $q(x)$ (рис. 2.9, а). Для балки построена линия влияния усилия S . Обозначим интенсивность нагрузки в произвольной точке через q_x . Выделим полоску шириной dx и площадь нагрузки $q_x \cdot dx$ примем за сосредоточенную силу. Влияние этой силы будет равно произведению $dS = q_x \cdot dx \cdot y$. Суммируя влияние всех элементарных нагрузок, в пределе, вместо суммы получим интеграл. Если участков интегрирования несколько, то перед интегралом ставится знак суммы, т. е.

$$S = \sum_i \int_{A_i}^{B_i} q_x y dx.$$

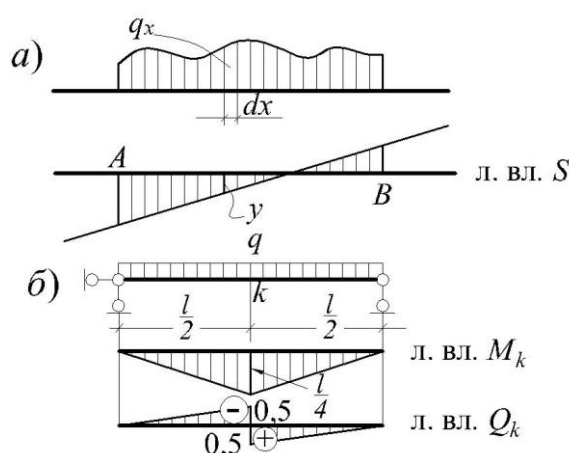


Рис. 2.9. Определение усилий по линии влияния от распределенной нагрузки

Это выражение упрощается в случае равномерно распределенной нагрузки, так как постоянное значение q можно вынести из-под знака интеграла и интеграл будет представлять собой площадь линии влияния, находящейся под нагрузкой,

$$S = \sum_i q \int_A^B y dx = q \sum_i \omega_i.$$

Таким образом, *влияние равномерно распределенной нагрузки равно произведению площади загруженного участка линии влияния на интенсивность нагрузки*. Под $\sum \omega_i$ всегда понимается алгебраическая сумма площадей, т. е. обязательно учитываются их знаки.

На рис. 2.9, б изображены балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, и две линии влияния для середины пролета. Определим по ним значения M_k и Q_k от заданного нагружения

$$M_k = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{4} \cdot q = \frac{ql^2}{8}; \quad Q_k = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot q = 0.$$

В заключение вычислим влияние сосредоточенного момента, находящегося над прямолинейным участком линии влияния (рис. 2.10, а). Изгибающий момент заменяется парой сил, т. е. принимается, что $M = F \cdot a$, где a имеет произвольное значение, не выходящее за пределы прямолинейного участка. Далее применяется принцип независимости действия сил

$$S = Fy_{\text{п}} - Fy_{\text{л}} = F (y_{\text{п}} - y_{\text{л}}).$$

Подставим сюда значение силы $F = M/a$. В результате получим

$$S = M (y_{\text{п}} - y_{\text{л}})/a = M \operatorname{tg} \alpha .$$

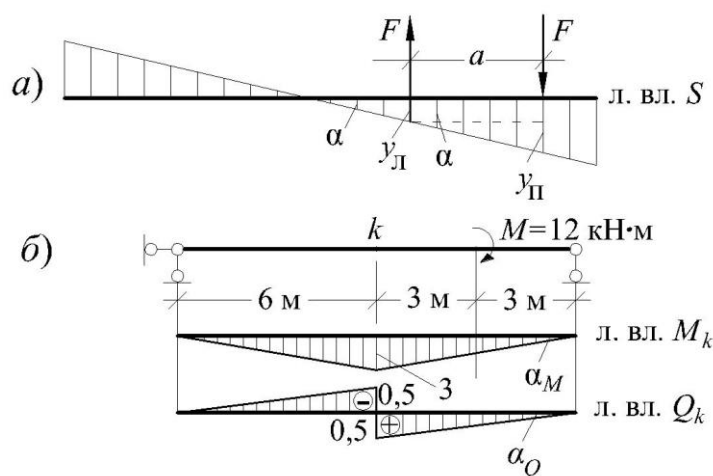


Рис. 2.10. Определение усилий по линии влияния от сосредоточенного момента

Если угол поворота прямого участка линии влияния совпадает с направлением вращения момента, то усилие будет иметь знак плюс, если не совпадает – знак минус.

В качестве примера рассмотрим балку, приведенную на рис. 2.10, б. К балке приложен момент $M = 12$ кН·м. Определим значения M_k и Q_k от этого момента. Прямая под моментом для обеих линий влияния поворачивается против хода часовой стрелки, а момент вращает плоскость по ходу часовой стрелки, следовательно, значения M_k и Q_k будут со знаком минус (растянуты верхние волокна).

$$M_k = -12 \cdot \operatorname{tg} \alpha_M = -12 \cdot \frac{3}{6} = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_k = -12 \cdot \operatorname{tg} \alpha_Q = -12 \frac{1}{2 \cdot 6} = -1 \text{ кН}.$$

2.4. Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм

Построение линий влияния усилий в стержнях ферм имеет следующие особенности:

- 1) в фермах будут линии влияния только продольных усилий;
- 2) так как фермы нагружаются лишь в узлах, то имеет место узловая передача нагрузки;
- 3) подвижная нагрузка может перемещаться как по верхнему, так и по нижнему поясу фермы, что приводит в ряде случаев к различным линиям влияния, поэтому на линии влияния нужно указывать пояс, на котором находится единичный подвижный груз.

Для построения линий влияния в фермах используется статический способ. При определении усилий либо вырезаются узлы, либо проводятся сечения. По-прежнему, если груз проходит над разрезом, то необходимо составлять два уравнения равновесия: для груза слева и для груза справа от сечения. Как обычно, при вычислении усилий вначале принимается, что стержень растянут. Если в результате расчета усилие получится со знаком минус, то это будет свидетельствовать о том, что стержень сжат. В качестве примера рассмотрим ферму с параллельными поясами (рис. 2.11).

Поскольку ферма балочная, то линии влияния опорных реакций будут такими же, как для балки такого же пролета (рис. 2.11).

Для определения N_1 проводится сечение 1-1 и составляется уравнение моментов относительно точки D . Момент относительно этой точки составляется как для груза слева от сечения 1-1, так и для груза справа от него. В этих уравнениях члены, учитывающие только вертикальную нагрузку, обозначим через M_D^0 . Эти члены представляют собой изгибающий момент в сечении под точкой D балки того же пролета, что и ферма. Вследствие этого вместо двух достаточно составить одно уравнение равновесия

$$\Sigma M_D = M_D^0 + N_1 \cdot h = 0 \text{ или } N_1 = - M_D^0 / h .$$

Следовательно, величина N_1 будет изменяться пропорционально M_D^0 , нужно лишь все ординаты разделить на h .

При построении линии влияния можно изобразить обе прямые: для груза слева и для груза справа от сечения 1-1 (см. рис. 2.11). Эти две прямые пересекутся под моментной точкой. На участке EC будет соединительная прямая, так как в фермах имеет

место узловая передача нагрузки. Ординаты определяются либо из уравнений равновесия (фиктивные участки с ординатами под опорами, равными $3b/h$), либо через изгибающий момент в балке-аналоге под сечением ($N_1 = (3b \cdot 3b)/(6b \cdot h) = 3b/2 h$).

Аналогично вычисляется усилие N_2 . С этой целью составляется уравнение моментов относительно точки E .

$$\Sigma M_E = M_E^0 - N_2 \cdot h = 0, \text{ отсюда } N_2 = M_E^0 / h.$$

Построение линии влияния N_2 приведено ниже на рис. 2.11.

Несколько иначе определяются усилия в стержнях решетки. Для вычисления N_3 составляется сумма проекций всех сил на вертикальную ось. В данном случае все члены уравнений равновесия, кроме члена с N_3 , для груза слева и для груза справа от сечения I – I обозначим через Q_3^0 . В результате можно ограничиться одним уравнением $\Sigma Y = Q_3^0 - N_3 \sin \alpha = 0$, отсюда $N_3 = Q_3^0 / \sin \alpha$.

При построении линии влияния N_3 , как для поперечной силы в балке, проводятся две параллельные прямые, но между ними расстояние будет не единица, а $1/\sin \alpha$. Кроме того, вместо скачка под сечением будет соединительная прямая между узлами, в связи с узловой передачей нагрузки в фермах. Линия влияния N_3 изображена на рис. 2.11. Построенные три линии влияния не зависят от того, по какому поясу перемещается нагрузка, так как сечение I – I разрезает верхний и нижний пояс в одной и той же панели.

Другая картина возникает при построении линий влияния усилий в стойках. Например, чтобы определить N_4 , необходимо сделать сечение II – II, которое разрезает верхний и нижний пояс в разных панелях. В этом основное отличие от построения предыдущих линий влияния. Опять обозначим все члены уравнений равновесия, кроме члена с N_4 , через Q_4^0 и составим сумму проекций на вертикальную ось. $\Sigma Y = Q_4^0 + N_4 = 0$, или $N_4 = - Q_4^0$, т. е. линия влияния строится как для поперечной силы соответствующей балки, лишь вместо скачка под сечением будет переходная прямая, обусловленная узловой передачей нагрузки (рис. 2.11). Эта переходная прямая будет под разными панелями в зависимости от того, по какому поясу фермы перемещается груз (рис. 2.11).

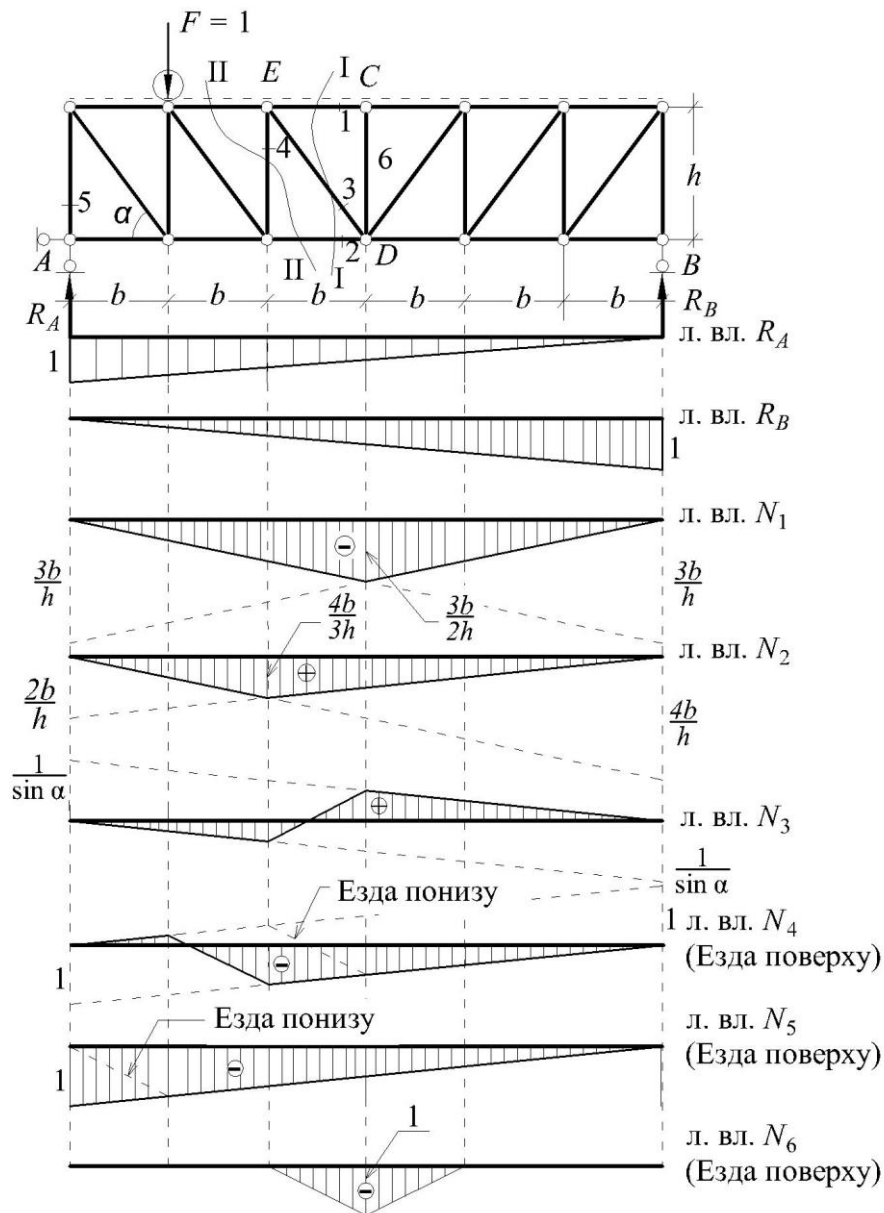


Рис. 2.11. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм

Для определения N_5 вырезается узел A . Если езда поверху, то из уравнения $\sum Y = 0$ $N_5 = -R_A$, т. е. линия влияния N_5 ничем не будет отличаться от линии влияния R_A . Но если езда понизу, то уравнение $\sum Y = 0$ примет вид $R_A - 1 + N_5 = 0$. В результате под опорой $N_5 = 0$, поэтому при узловой нагрузке будет иметь место переходная прямая в первой панели (см. рис. 2.11).

Для определения N_6 вырезается узел C и составляется сумма проекций всех сил на вертикальную ось. При езде поверху она примет вид $\sum Y = -1 - N_6 = 0$ или $N_6 = -1$. Эта ордината откладывается под точкой C , и затем проводятся две переходные прямые, соединяющие эту ординату с нулевыми значениями (см. рис. 2.11). При езде понизу $N_6 = 0$.

В случае полигональных ферм, т. е. ферм с непараллельными поясами, при определении усилий в раскосах и стойках так же, как и для поясов, составляются уравнения суммы моментов относительно точки, где пересекаются верхний и нижний пояс. Остальная процедура построения линий влияния остается прежней (рис. 2.12).

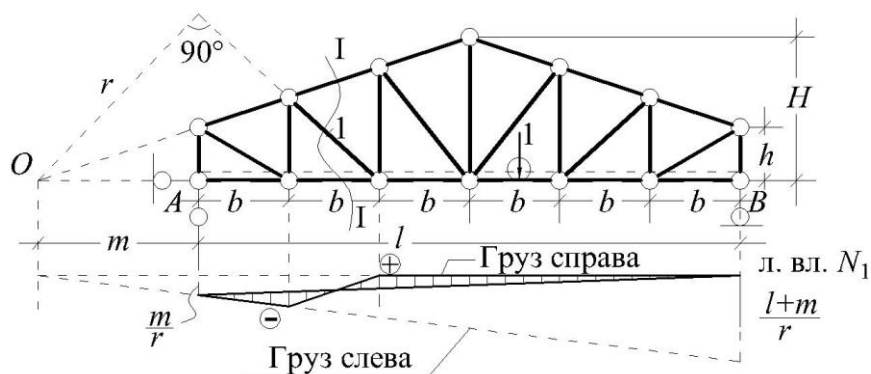


Рис. 2.12. Построение линии влияния усилия в раскосе полигональной фермы

2.5. Определение усилий от подвижной статически приложенной нагрузки

Под подвижной нагрузкой подразумевается система сосредоточенных сил, сохраняющих при движении постоянное расстояние между собой.

Величина искомого усилия по-прежнему определяется путем умножения значения сосредоточенных сил на ординаты линии влияния под этими силами. Но здесь возникает вопрос, куда поставить эти силы, чтобы получить наибольшее по абсолютной величине значение искомого усилия. В случае одной силы она ставится над наибольшей ординатой. При наличии нескольких сил задача усложняется. Если линия влияния представлена одной прямой, то задача решается относительно просто. На рис. 2.13 изображена балка, по которой перемещается система грузов, и построена линия влияния R_A . Максимальное и минимальное значения реакции R_A будут представлены суммами:

$$R_{A \max} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3,$$

$$R_{A \min} = F_1 \cdot \overline{y_1} + F_2 \cdot \overline{y_2} + F_3 \cdot \overline{y_3}.$$

Здесь под минимумом подразумевается наибольшее значение усилия с другим знаком.

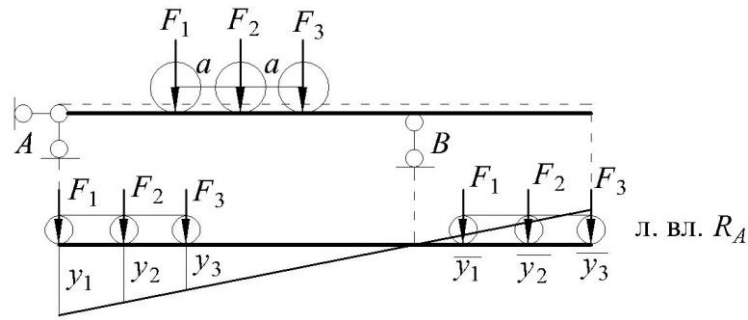


Рис. 2.13. Нагружение прямолинейной линии влияния

При реализации постановок грузов, изображенных на рис. 2.13, следует помнить, что если они представляют собой воздействие не разворачивающегося крана, то решение будет окончательным. Но если это транспорт, то возможны другие варианты, например, когда силы развернутся на 180° .

При наличии ломаной линии влияния, в частности треугольной, вопрос определения положения системы сил становится более сложным. Решение этой задачи требует некоторого числа попыток. Поскольку треугольные линии влияния встречаются часто, то рассмотрим вопрос определения оптимального положения системы грузов подробно. Пусть заданы треугольная линия влияния и система подвижных грузов (рис. 2.14).

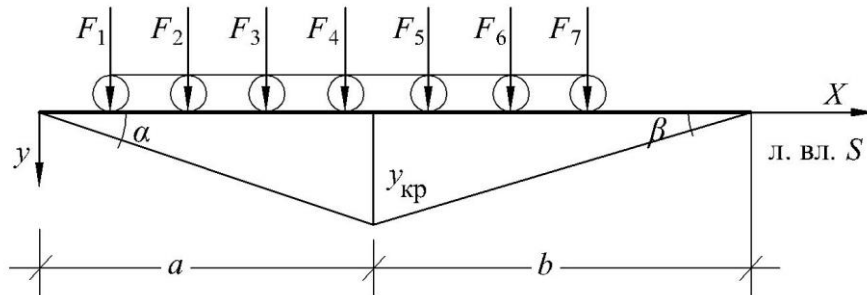


Рис. 2.14. Нагружение треугольной линии влияния

Предположим, что ни один из грузов не находится над вершиной линии влияния S . Пусть силы F_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) находятся слева от вершины, а силы F_j ($j = 6, 7$) – справа от нее. Тогда искомое усилие

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + F_4 y_4 + F_5 y_5 + F_6 y_6 + F_7 y_7 = \sum_1^5 F_i y_i + \sum_6^7 F_j y_j,$$

где y_i и y_j – соответствующие ординаты линии влияния S . Требуется найти экстремальное значение S . С этой целью вычислим первую

производную по координате x . Производная для грузов, находящихся левее вершины линии влияния, будет равна $dy/dx = \operatorname{tg} \alpha$, а для грузов, находящихся правее, $-dy/dx = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$.

В результате получаем

$$\frac{dS}{dx} = (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5)\operatorname{tg} \alpha - (F_6 + F_7)\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \sum_1^5 F_i - \operatorname{tg} \beta \sum_6^7 F_j.$$

Допустим, что поезд из грузов движется слева направо. Если $dS/dx > 0$, то S будет возрастать. Если же $dS/dx < 0$, то наиболее невыгодное положение грузов уже было пройдено, т. е. наибольшее значение усилия будет в момент перемены знака производной. Так как в выражении для производной оба члена постоянные, то, очевидно, знак может измениться лишь в том случае, когда один из грузов будет переходить через вершину линии влияния S . Полученный вывод имеет важное следствие: *наиболее невыгодное положение системы грузов имеет место тогда, когда один из грузов находится над вершиной линии влияния. Этот груз, переход которого через вершину линии влияния меняет знак производной, называется критическим.* Это следствие сокращает число попыток.

Находится критический груз с помощью неравенств. Допустим, что критическим грузом является F_5 . Следовательно, должно выполняться следующее: если F_5 находится слева от вершины, то $dS/dx > 0$, а если — справа, то $dS/dx < 0$. Введем обозначения:

$$R_{\text{лев}} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4; R_{\text{пр}} = F_6 + F_7.$$

$$\text{Тогда } (R_{\text{лев}} + F_5) \operatorname{tg} \alpha - R_{\text{пр}} \operatorname{tg} \beta > 0,$$

$R_{\text{лев}} \operatorname{tg} \alpha - (F_5 + R_{\text{пр}}) \operatorname{tg} \beta < 0$. Подставим сюда значения $\operatorname{tg} \alpha = y_{\text{кр}}/a$ и $\operatorname{tg} \beta = y_{\text{кр}}/b$ и сократим на $y_{\text{кр}}$. В результате получим следующие неравенства

$$\frac{R_{\text{лев}} + F_{\text{кр}}}{a} > \frac{R_{\text{пр}}}{b}; \quad \frac{R_{\text{лев}}}{a} < \frac{F_{\text{кр}} + R_{\text{пр}}}{b}. \quad (2.2)$$

Эти неравенства справедливы, если ни один из грузов не сходит с треугольной линии влияния. В противном случае для определения критического груза нужно делать несколько попыток.

Критический груз можно найти сразу графическим способом без попыток. С этой целью необходимо вычертить линию влияния в масштабе длин. Затем из левого ее конца вниз в масштабе сил откладываются сосредоточенные силы в заданной последовательно-

сти их соединения. В качестве примера на рис. 2.15, *а* приведена треугольная линия влияния, нагруженная подвижной системой из четырех сил. На рис. 2.15, *б* приведено графическое построение, позволяющее определить критический груз. Построение состоит в следующем: точки *B* и *C* соединяются прямой линией, из точки *D* (под вершиной линии влияния) проводится прямая *DE*, параллельная линии *BC*. Точка *E* этой прямой попадает на критический груз.

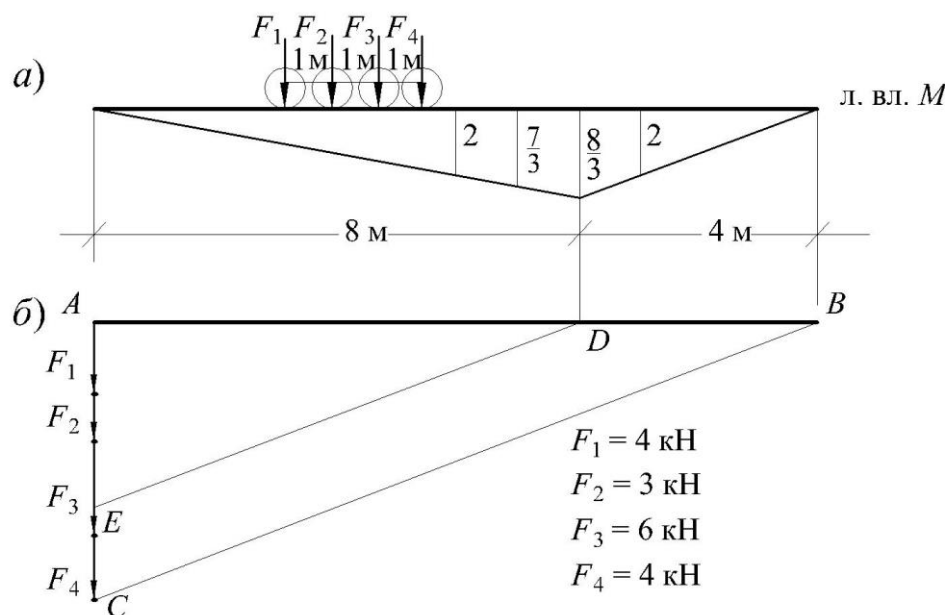


Рис. 2.15. Графическое определение критического груза

В рассматриваемом случае $F_{кр} = 6 \text{ кН}$. Этот факт легко доказывается и с помощью неравенств (2.2).

$$M_{\max} = 4 \cdot 2 + 3 \cdot (7/3) + 6 \cdot (8/3) + 4 \cdot 2 = 39 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2.6. Контрольные вопросы

1. Расчет статически определимых систем на подвижную нагрузку. Линии влияния усилий и реакций в простых балках.
2. Расчет статически определимых систем на подвижную нагрузку. Линии влияния усилий и реакций в консольных балках.
3. Построение линий влияния реакций и усилий в сечениях шарнирно-консольных балок.
4. Построение линий влияния реакций и усилий в стержнях статически определимых простейших ферм.
5. Определение усилий по линиям влияния при действии неподвижной статически приложенной нагрузки.

6. Определение усилий по линиям влияния при действии подвижной статически приложенной нагрузки.
7. Какой груз называется критическим?
8. Графический способ определения критического груза.

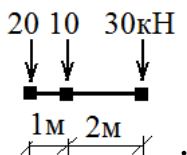
2.7. Контрольная работа №2.

Определение усилий в стержнях плоской простейшей фермы от подвижной нагрузки

2.7.1. Задача 2.2. Построение линий влияния реакций и усилий в плоской простейшей ферме

Задание. Построить линии влияния для опорных реакций и для усилий в стержнях заданной панели фермы, а также в стойках справа и слева от указанной панели при езде поверху и понизу. Определить значения реакций в указанных опорах и усилия в указанных стержнях. Сравнить результаты с соответствующими результатами, полученными в задаче 2.1.

Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакций и продольных сил в стержнях указанной панели от заданной системы связанных подвижных грузов



Исходные данные для задачи 2.2. определяются из таблицы 1.2 и по схемам, представленным на рис. 1.28.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе схему фермы. Указать размеры и узловую нагрузку.
 2. Построить линии влияния опорных реакций.
 3. Построить линии влияния продольных сил для заданных стержней при езде поверху, затем при езде понизу.
 4. По построенным линиям влияния определить величины опорных реакций и усилий в заданных стержнях от неподвижной нагрузки по формуле $S = \sum F_i \cdot y_i$, где y_i – ордината линии влияния под точкой приложена сила F_i .
- Ординаты линии влияния вводятся в формулу со своими знаками.

Полученные значения сравнить в табличной форме с результатами решения задачи 2.1.

5. Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакций и усилий в указанных стержнях от заданной системы связанных подвижных грузов.

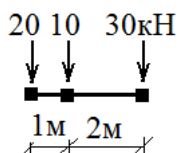
Таблица 2.1

Величины усилий и погрешностей

Определяемая величина	Значение определяемой величины при аналитическом расчёте, кН	Значение определяемой величины по линии влияния, кН	Погрешность к аналитическому расчёту, %
N_1			
N_2			
N_3 и т. д.			

Пример решения задачи 2.2.

Задание. Построить линии влияния для опор A и B , линии влияния продольных сил в стержнях четвёртой панели фермы, а также в правой и левой стойках. Определить значения реакций в опорах и усилия в заданных стержнях. Сравнить результаты с результатами, полученными аналитическим путём. Определить по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакции и усилий в заданных стержнях от системы связанных подвижных грузов.



- Определяем необходимые тригонометрические функции:
 $\cos\alpha = 3/3,162 = 0,949$; $\sin\alpha = 1/3,162 = 0,316$; $\cos\beta = 3/6,708 = 0,447$;
 $\sin\beta = 6/6,708 = 0,894$; $\cos\gamma = 2/3,606 = 0,555$; $\sin\gamma = 3/3,606 = 0,832$;
 $\cos(\alpha + \gamma) = 0,2635$;
- Строим линии влияния опорных реакций A и B при езде по верхнему поясу фермы.
- Строим линию влияния усилия N_1 при верхнем ездовом поясе:
 1. Груз слева: $\sum M_C^{пр} = 0$; $-N_1 \cdot \cos\alpha \cdot 5 - B \cdot 6 = 0$; $N_1 = 1,2645B$.
 2. Груз справа: $\sum M_C^{лев} = 0$; $A \cdot 12 + N_1 \cdot \cos\alpha \cdot 6 - N_1 \cdot \sin\alpha \cdot 3 = 0$;

$N_1 = -2,5284 A$. Линия влияния усилия N_1 при нижнем ездовом поясе такая же, как при верхнем, так как разрез проходит через ту же панель фермы.

• Строим линию влияния усилия N_2 при верхнем ездовом поясе:

1. Груз слева: $\sum M_O^{\text{пр}} = 0; N_2 \cdot \sin\beta \cdot 15 + B \cdot 9 = 0; N_2 = -0,671B$.

2. Груз справа: $\sum M_O^{\text{лев}} = 0; A \cdot 27 + N_2 \cdot \cos\beta \cdot 6 - N_2 \cdot \sin\beta \cdot 18 = 0;$

$N_2 = 2,013 A$. Линия влияния усилия N_2 при нижнем ездовом поясе такая же, как при езде по верхнему поясу.

• Строим линию влияния усилия N_3 при верхнем ездовом поясе:

1. Груз слева: $\sum M_D^{\text{пр}} = 0; N_3 \cdot 6 - B \cdot 9 = 0; N_3 = 1,5B$.

2. Груз справа: $\sum M_D^{\text{лев}} = 0; A \cdot 9 - N_3 \cdot 6 = 0; N_3 = 1,5 A$. Линия влияния усилия N_3 при нижнем ездовом поясе такая же, как при верхнем.

• Строим линию влияния усилия N_4 при верхнем ездовом поясе:

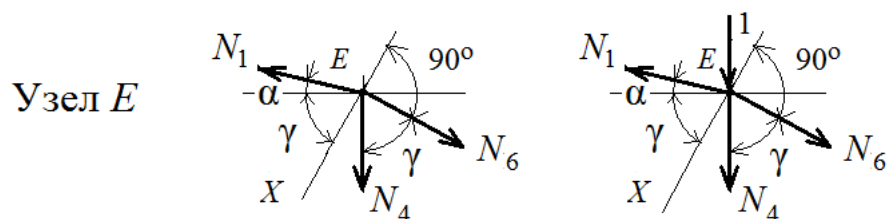


Рис. 2.18. Узел E

1. Груз везде, кроме узла E: (проводим ось X перпендикулярно N_6).

$\sum X = 0; N_4 \cdot \sin\gamma + N_1 \cdot \cos(\alpha + \gamma) = 0; N_4 \cdot 0,832 + N_1 \cdot 0,2635 = 0;$

$N_4 = -0,3167 N_1$.

2. Груз в узле E: $\sum X = 0; 1 \cdot \sin\gamma + N_4 \cdot \sin\gamma + N_1 \cdot \cos(\alpha + \gamma) = 0;$

$1 \cdot 0,832 + N_4 \cdot 0,832 + (-0,843) \cdot 0,82635 = 0; N_4 = -0,733$.

Линия влияния усилия N_4 при нижнем ездовом поясе такая же, как при грузе везде, кроме узла E.

• Линия влияния усилия N_5 при верхнем ездовом поясе: $N_5 = 0$.

• Строим линию влияния N_5 при нижнем ездовом поясе:

1. Груз везде, кроме узла L: $\sum Y = 0; N_5 = 0$.

2. Груз в узле L: $\sum Y = 0; 1 + N_5 = 0; N_5 = -1$.

• Определяем значения опорных реакций и усилия в заданных стержнях. Сравниваем результаты с соответствующими результатами, полученными аналитическим путём в задаче 2.1.

$A = 80 \cdot 0,833 + 100 \cdot 0,333 + 50 \cdot 0,167 = 108,29$ кН;

$B = 80 \cdot 0,167 + 100 \cdot 0,667 + 50 \cdot 0,833 = 121,171$ кН;

$N_1 = -80 \cdot 0,21 - 100 \cdot 0,8428 - 50 \cdot 0,421 = -122,13$ кН.

$N_2 = -80 \cdot 0,112 + 100 \cdot 0,671 + 50 \cdot 0,3355 = 74,915$ кН.

$$N_3 = 80 \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,25 = 82,5 \text{ кН.}$$

$$N_4 = 80 \cdot 0,066 - 100 \cdot 0,733 + 50 \cdot 0,133 = - 61,37 \text{ кН.}$$

$$N_5 = 0.$$

- Определяем по линиям влияния максимальные и минимальные значения опорных реакции и усилий в заданных стержнях от системы связанных подвижных грузов. Для этого в необходимых случаях определяем графически положение критического груза.

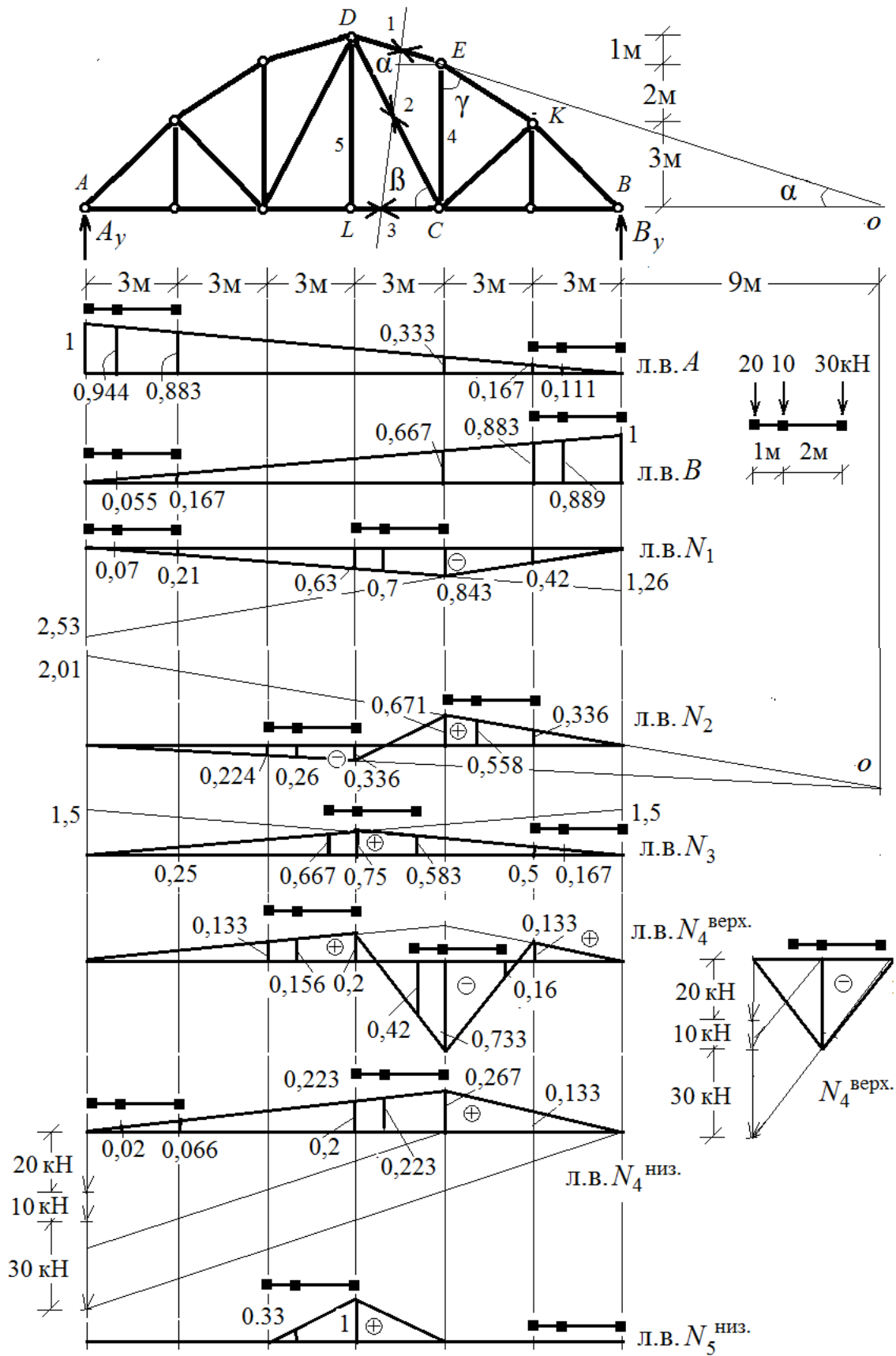


Рис. 2.19. Линии влияния реакций и усилий в ферме

$$A^{\max} = 20 \cdot 1 + 10 \cdot 0,889 + 30 \cdot 0,833 = 53,88 \text{ кН};$$

$$A^{\min} = 20 \cdot 0,167 + 10 \cdot 0,111 = 4,45 \text{ кН};$$

$$B^{\max} = 20 \cdot 0,833 + 10 \cdot 0,889 + 30 \cdot 1 = 55,55 \text{ кН};$$

$$B^{\min} = 10 \cdot 0,055 + 30 \cdot 0,167 = 5,56 \text{ кН};$$

$$N_1^{\max} = -20 \cdot 0,421 - 10 \cdot 0,28 = -8,43 \text{ кН};$$

$$N_1^{\min} = -20 \cdot 0,63 - 10 \cdot 0,7 - 30 \cdot 0,8428 = 44,88 \text{ кН};$$

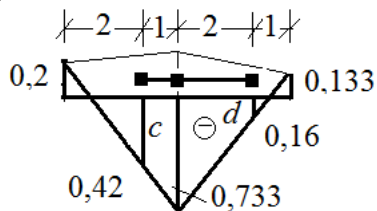
$$N_2^{\max} = 20 - 0,671 + 10 \cdot 0,558 + 30 \cdot 0,3355 = 29,06 \text{ кН};$$

$$N_2^{\min} = -20 \cdot 0,224 - 10 \cdot 0,261 - 30 \cdot 0,3355 = 17,15 \text{ кН};$$

$$N_3^{\max} = 20 \cdot 0,667 + 10 \cdot 0,75 + 30 \cdot 0,583 = 38,33 \text{ кН};$$

$$N_3^{\min} = 20 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,167 = 6,67 \text{ кН}.$$

При верхнем ездовом поясе



из подобия треугольников:

$$(0,733 + 0,2)/3 = (c + 0,2)/2, \quad c = 0,42\text{м};$$

$$(0,733 + 0,133)/3 = (d + 0,133)/1, \quad d = 0,16\text{м};$$

$$N_4^{\max} = 20 \cdot 0,133 + 10 \cdot 0,156 + 30 \cdot 0,2 = 10,22 \text{ кН};$$

$$N_4^{\min} = -20 \cdot 0,42 - 10 \cdot 0,733 - 30 \cdot 0,16 = 20,53 \text{ кН}; \quad N_5 = 0.$$

При нижнем ездовом поясе

$$N_4^{\max} = 20 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,223 + 30 \cdot 0,267 = 14,24 \text{ кН};$$

$$N_4^{\min} = 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0,022 + 30 \cdot 0,066 = 2,2 \text{ кН};$$

$$N_5^{\max} = 0; \quad N_5^{\min} = -10 \cdot 0,33 - 30 \cdot 1 = -33,3 \text{ кН};$$

Значения величин реакций и усилий

Определяемая величина	Значение определяемой величины при аналитическом расчёте, кН	Значение определяемой величины по линии влияния, кН	Погрешность к аналитическому расчёту, (%)
A	108,33	108,29	0,03
B	121,667	121,171	0,4
N_1	-122,234	- 122,13	0,08
N_2	74,944	74,915	0,04
N_3	82,5	82,5	0
N_4	- 61,246	- 61,37	0,2
N_5	0	0	0

Раздел 2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

3.1. Свойства статически неопределимых систем

Рассматриваемые до сих пор конструкции были представлены статически определимыми расчетными схемами. Реальные конструкции большей частью являются статически неопределимыми. *Статически неопределимой называется такая система, в которой при действии произвольной нагрузки не все реакции и внутренние усилия могут быть определены из уравнений равновесия твердого тела или системы твердых тел.*

Из сказанного ясно, что для определения усилий в статически неопределимых системах уравнений равновесия уже недостаточно. Нужно составлять дополнительные уравнения, в общем случае уже учитывающие свойства материала конструкции, что, естественно, делает расчет статически неопределимых систем более трудоемким. Более того, здесь и постановка задачи другая. При расчете статически определимых систем задавались геометрическая схема и нагрузка, а в результате расчета определялись усилия, по которым подбирались сечения. При расчете же статически неопределимых систем необходимо знать не только геометрическую схему и нагрузку, но и сечения стержней или хотя бы их соотношение (только при расчете на действие внешних сил). Таким образом, сначала задаются сечениями стержней, а затем делают расчет с целью проверки соответствия напряжений и перемещений нормативным значениям. Первоначальные значения поперечных сечений стержней назначаются или по интуиции из опыта проектирования подобных сооружений, либо из сравнения с существующими конструкциями, либо из предварительного ориентировочного расчета, рассматривающего конструкцию как статически определимую. Если в принятых сечениях напряжения значительно отличаются от нормативных, то размеры сечений изменяются, и делается повторный расчет. В некотором роде – это как бы метод последовательных приближений.

Статически неопределимые системы обладают рядом особенностей, которыми они отличаются от систем статически определимых. Так, в статически неопределимых системах возникают усилия от теплового воздействия, от неравномерной осадки опор и неточности изготовления отдельных элементов, что наглядно продемонстрировано на рис. 3.1.

Статически неопределимые системы по сравнению со статически определимыми имеют ряд положительных качеств, а именно:

1) они более жесткие, что играет важную роль при эксплуатации сооружений;

2) они более надежные при эксплуатации. Выход из строя одного из элементов еще не исчерпывает их несущей способности, если это не абсолютно необходимая связь;

3) они обладают приспособляемостью при нагружении. Стержни с большим поперечным сечением воспринимают и более значительные усилия, облегчая напряженное состояние стержней с меньшим поперечным сечением;

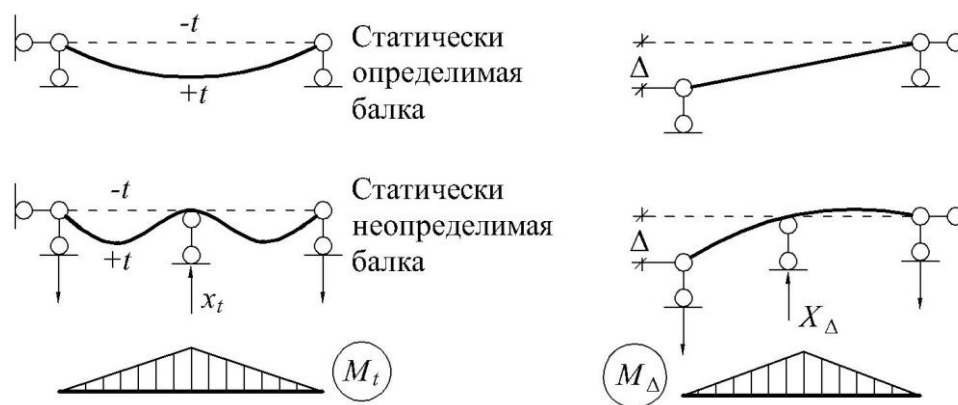


Рис. 3.1. Наличие усилий в статически неопределимых системах от температуры и неравномерных осадок

4) они проще в изготовлении, так как конструкция шарнира сложнее, чем жесткое соединение дисков;

5) нередко они экономичнее, в частности за счет снижения расходов на их изготовление.

Основное же отличие статически неопределимых систем от статически определимых состоит в том, что они имеют так называемые *лишние* связи, которые можно удалить, не нарушая геометрической неизменяемости системы. При этом следует помнить, что не каждая связь может быть лишней. Например, на рис. 3.2 изображены две статически неопределимые системы. В балке (рис. 3.2, а)

нельзя удалить горизонтальный опорный стержень, так как после его удаления балка приобретет подвижность в горизонтальном направлении. В ферме (рис. 3.2, б) нельзя удалить ни одной опорной связи и ни одного стержня из правой панели, поскольку их удаление приведет к геометрической изменяемости конструкции.

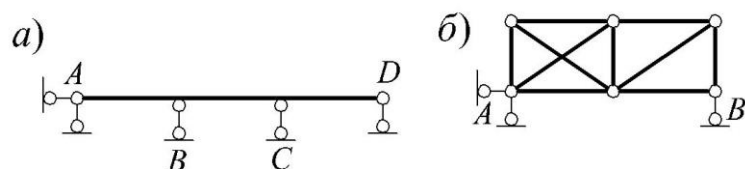


Рис. 3.2. Статически неопределимые системы с абсолютно необходимыми связями

Таким образом, статически неопределимые системы могут иметь два типа связей. Одни называются условно необходимыми или условно лишними связями, а другие – абсолютно необходимыми связями. Здесь уместно отметить, что *все связи статически определимых систем являются абсолютно необходимыми*. И второе не менее важное замечание – *усилия в абсолютно необходимых связях статически неопределимых систем определяются из уравнений равновесия*. Вопрос о том, какая связь является абсолютно необходимой, и какая – лишней, решается путем анализа геометрической схемы конструкции. Абсолютно необходимые связи имеют место далеко не в каждой статически неопределимой системе.

Число лишних связей, удаление которых превращает систему в статически определимую, называется степенью статической неопределимости системы. Степень статической неопределимости расчетной схемы является глубокой и незыблемой характеристикой конструкции, которая не только в какой-то мере отражает ее свойства, но и существенно сказывается на трудоемкости расчета методом сил.

Поскольку для определения усилий в статически неопределимых системах уравнений равновесия недостаточно, то для их расчета были созданы специальные методы. Методы расчета различаются, в частности, выбором основных неизвестных. *Если основными неизвестными служат усилия в лишних связях – это будет метод сил*. В методе перемещений неизвестными служат перемещения узлов системы. Эти два метода являются основными, или классическими. Остальные методы, в какой – то мере базируются на этих двух методах.

Изучение методов расчета начинается с метода сил, являющимся естественным способом расчета статически неопределимых систем. Он полностью зависит от степени статической неопределимости и не может быть выполнен без точного ее определения.

3.2. Определение степени статической неопределимости

Степень статической неопределимости вычисляется относительно просто. Для плоских ферм можно использовать условие статической определимости $C = 2U$. Если стержней, а, следовательно, и неизвестных усилий больше, то

$$n_{ст.} = C - 2U. \quad (3.1)$$

Например, для фермы, изображенной на рис. 3.2, б, $n_{ст.} = 13 - 2 \cdot 6 = 1$, т. е. ферма один раз статически неопределима. Аналогичная формула получается для пространственных ферм $n_{ст.} = C - 3U$, где, по-прежнему, C – число стержней, включая опорные.

Для плоских конструкций из изгибаемых стержней выведем общую формулу. Рассмотрим один замкнутый контур (рис. 3.3, а). Совершенно очевидно, что он имеет шесть связей (на рис. 3.3, а показаны шесть опорных реакций в этих связях). Однако для закрепления одного диска в плоскости достаточно трех связей. Следовательно, три связи являются лишними, что позволяет сделать вывод: *каждый замкнутый контур в плоскости является трижды статически неопределимым.*

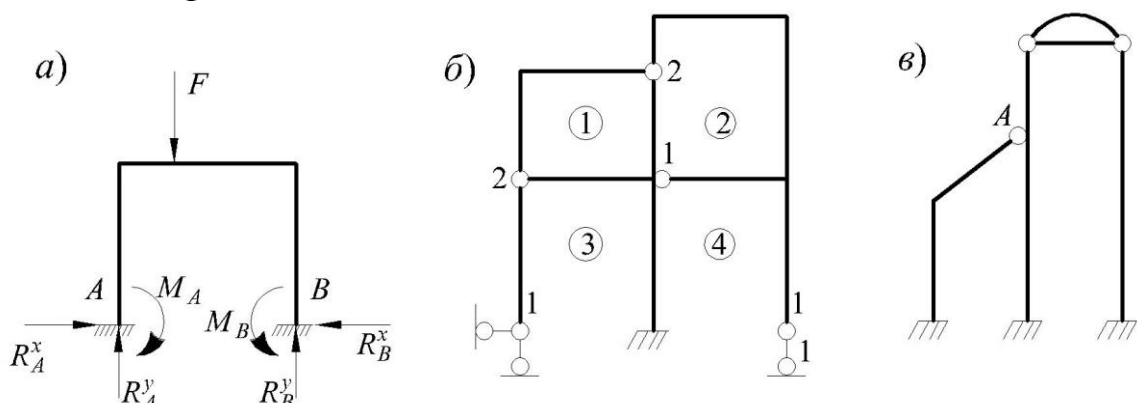


Рис. 3.3. Определение степени статической неопределимости рам

Введем теперь один шарнир в замкнутый контур. Введение шарнира соответствует удалению одной связи. После введения

шарнира контур стал дважды статически неопределимым. В результате приходим к формуле

$$n_{\text{ст.}} = 3K - Ш \quad (3.2)$$

где K – число замкнутых контуров; $Ш$ – число удаленных связей, или число простых шарниров.

Контурные могут быть внутренними и внешними. Внутренние контуры подсчитываются элементарно, а число внешних контуров равно числу опор минус единица. При подсчете шарниров они сводятся к простым. *Простым, или одиночным, называется шарнир, соединяющий только два стержня.* Если в узле сквозной или полный шарнир, то число простых шарниров в нем равно числу стержней, примыкающих к узлу, минус единица. Примыкающий шарнир (см. узел A на рис. 3.3, $в$) является простым. По формуле (3.2) можно подсчитывать степень статической неопределимости и ферм, но использование формулы (3.1) гораздо проще.

Определим степень статической неопределимости рамы, изображенной на рис. 3.3, $б$. Контурные пронумерованы числами в кружках. Рядом с шарнирными узлами указано число простых шарниров в узле. В итоге по формуле (3.2) $n_{\text{ст.}} = 3 \cdot 4 - 8 = 4$.

3.3. Идея метода сил

Рассмотрим n раз статически неопределимую систему, нагруженную внешними силами. Требуется определить внутренние усилия, т. е. построить эпюры M , Q и N . Так как непосредственно в такой системе определить усилия не удастся, то поступают следующим образом: из заданной системы удаляют n лишних связей так, чтобы она оказалась не только статически определимой, но и геометрически неизменяемой. Эти требования не обязательны, но предпочтительны на начальном этапе ознакомления с методом. Полученная система называется *основной*.

3.4. Выбор основных систем метода сил

Итак, *основная система метода сил должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.* Основных систем из заданной теоретически можно получить сколько угодно. Этот,

казалось бы, положительный факт желаемого выбора основной системы, является и основным недостатком при реализации расчета методом сил на ЭВМ. Поэтому ни в один вычислительный комплекс, например, ЛИРА, SCAD, STARK и др. расчет методом сил не входит. При ручном же расчете следует стремиться к тому, чтобы число побочных коэффициентов было как можно меньше. Классическим примером служит неразрезная балка. На рис. 3.4, а при выборе основной системы удалены все промежуточные опоры, а на рис. 3.4, б введены шарниры над промежуточными опорами. В первом случае матрица коэффициентов при основных неизвестных будет полной, т. е. ни один побочный элемент не будет нулевым, а во втором – матрица коэффициентов будет ленточной – трехчленной независимо от числа неизвестных. Иногда при расчете рам с целью получения ленточных матриц применяют групповые неизвестные и самоуравновешенные эпюры.

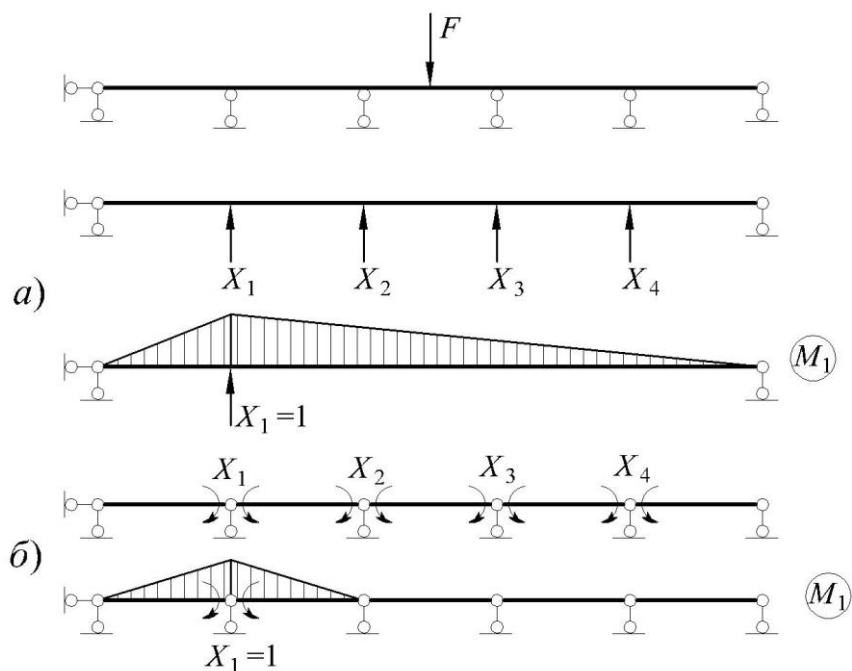


Рис. 3.4. Примеры выбора основных систем

В выбранной основной системе уже можно определять как усилия, так и перемещения. В качестве основных неизвестных, обозначаемых через X_i (здесь $i = 1, 2, \dots, n$), принимаются усилия в удаленных лишних связях.

В результате оказывается, что на основную систему, кроме внешней нагрузки, действуют еще пока неизвестные силы X_i . Эти силы подбираются из условия, чтобы перемещения по направлению удаленных связей в основной системе были равны нулю. Тем са-

мым, основная система по своему напряженному и деформированному состоянию будет соответствовать заданной системе, т. е. она будет эквивалентна ей. В этом и заключается основная идея метода сил.

Для реализации метода сил в основной системе последовательно строятся эпюры усилий (как правило, только эпюры изгибающих моментов для рам и балок и эпюры продольных сил – для ферм) от единичных безразмерных сил, приложенных по направлению удаленных связей. Направление сил назначается произвольно. Если в результате расчета усилие X_i окажется со знаком минус, то это свидетельствует о том, что оно на самом деле направлено в другую сторону. Кроме указанных эпюр, строится еще эпюра тех же усилий (моментов или продольных сил) от внешней нагрузки (одна при одном варианте нагружения).

Затем по формулам типа (3.4) и (3.5) определяются перемещения по направлению всех удаленных связей от каждой единичной силы и от внешней нагрузки отдельно. Пусть δ_{ik} – перемещение по направлению удаленной связи i от единичной силы, приложенной по направлению отброшенной связи k , а δ_{iF} – перемещение по направлению связи i от внешней нагрузки.

3.5. Система канонических уравнений

Запишем математическое выражение условия эквивалентности основной и заданной системы, которое выражается уравнениями совместности деформаций. Например, для первой связи в уравнении первый индекс будет единица, для второй – двойка и т. д.

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \delta_{2F} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Что дает систему линейных алгебраических уравнений относительно X_i , число которых равно числу удаленных лишних связей. Уравнения (3.3) называются *каноническими уравнениями метода сил*, так как они записываются по определенной схеме и их вид зависит только от степени статической неопределимости. *Геометрический смысл канонических уравнений метода сил состоит в том, что они*

отрицают наличие перемещений по направлению удаленных связей в основной системе.

В уравнениях (3.3) коэффициенты с одинаковыми индексами типа δ_m называются главными коэффициентами податливости. Они всегда положительные. Остальные коэффициенты при неизвестных называются побочными. Члены типа δ_{iF} называются свободными членами. Побочные коэффициенты и свободные члены могут быть либо положительными, либо отрицательными, либо равными нулю. Матрица коэффициентов при неизвестных на основании теоремы о взаимности перемещений получается симметричной. Она является положительно определенной, и ее определитель не равен нулю. Поэтому система уравнений (3.3) для каждого варианта нагружения имеет одно единственное решение, которое можно представить по правилу швейцарского математика Г. Крамера (1704 – 1752) в следующем виде

$$X_i = -\frac{|D_i|}{|D|},$$

где $|D|$ – определитель матрицы из коэффициентов при неизвестных; $|D_i|$ – тот же определитель, но в нем столбец i заменен столбцом свободных членов. Практически же система линейных уравнений решается либо на ЭВМ, либо при ручном счете методом последовательного исключения неизвестных, предложенным немецким математиком К.Ф. Гауссом (1777 – 1855).

После определения неизвестных X_i задачу можно считать решенной. В основной системе вместе с нагрузкой прикладывают найденные значения X_i и строят эпюры внутренних усилий в любой последовательности, как в статически определимой системе.

Более универсальным является подход, когда используют уже построенные эпюры от единичных значений X_i . На основании принципа независимости действия сил составляется выражение, например, для изгибающих моментов

$$M_F = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n + M_F^0,$$

где M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – эпюры от $X_i = 1$;

M_F^0 – эпюра моментов от внешней нагрузки.

Затем по эпюре M_F , используя дифференциальную зависимость, известную из курса сопротивления материалов, $Q = -dM/dx$ (где x – координата вдоль оси стержня), строят эпюру поперечных сил Q_F . Эпюру продольных сил легко построить по эпюре Q_F с по-

мощью уравнений равновесия узлов. Изложенный универсальный подход расчета пригоден и для других методов. Для метода сил он является обязательным.

3.6. Контрольные вопросы

1. Статически неопределимые расчетные схемы.
2. Степень статической неопределимости и ее определение для различных расчетных схем. Статический смысл расчетных формул.
3. Свойства статически неопределимых систем, их преимущества по сравнению со статически определимыми.
4. Идея метода сил. Основная система метода и способы её получения для различных расчетных схем.
5. Система канонических уравнений метода сил, её физический смысл и особенности. Размерности коэффициентов при неизвестных и свободных членах.
6. Общий порядок расчета методом сил на действие внешней нагрузки для балок и рам.
7. Построение эпюр поперечных и продольных сил при расчете балок и рам методом сил.
8. Проверки расчета, выполняемые при расчете статически неопределимых балок и рам методом сил.

3.7. Контрольная работа №3.

Расчет статически неопределимой рамы методом сил

Задание. Рассчитать статически неопределимую раму методом сил. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Определить опорные реакции. Исходные данные к задаче определить по табл. 3.1 и схемам на рис. 3.5.

Таблица 3.1

Исходные данные к контрольной работе № 3

Первая цифра шифра	F_1 , кН	F_2 , кН	ℓ , м	Вторая цифра шифра	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	Третья цифра шифра № схемы	$I_2:I_1$	h_1 , м	h_2 , м
0	2	0	5	0	4	0	0	2	3	2
1	0	2	3	1	0	2	1	3	2	4
2	3	0	4	2	3	0	2	4	4	2
3	0	3	6	3	0	5	3	3	3	3
4	4	0	5	4	5	0	4	2	5	2

5	0	4	3	5	0	2	5	4	4	1
6	5	0	4	6	6	0	6	2	3	2
7	0	5	6	7	0	3	7	3	2	4
8	2	0	3	8	2	0	8	4	4	2
9	0	2	4	9	0	3	9	2	5	2

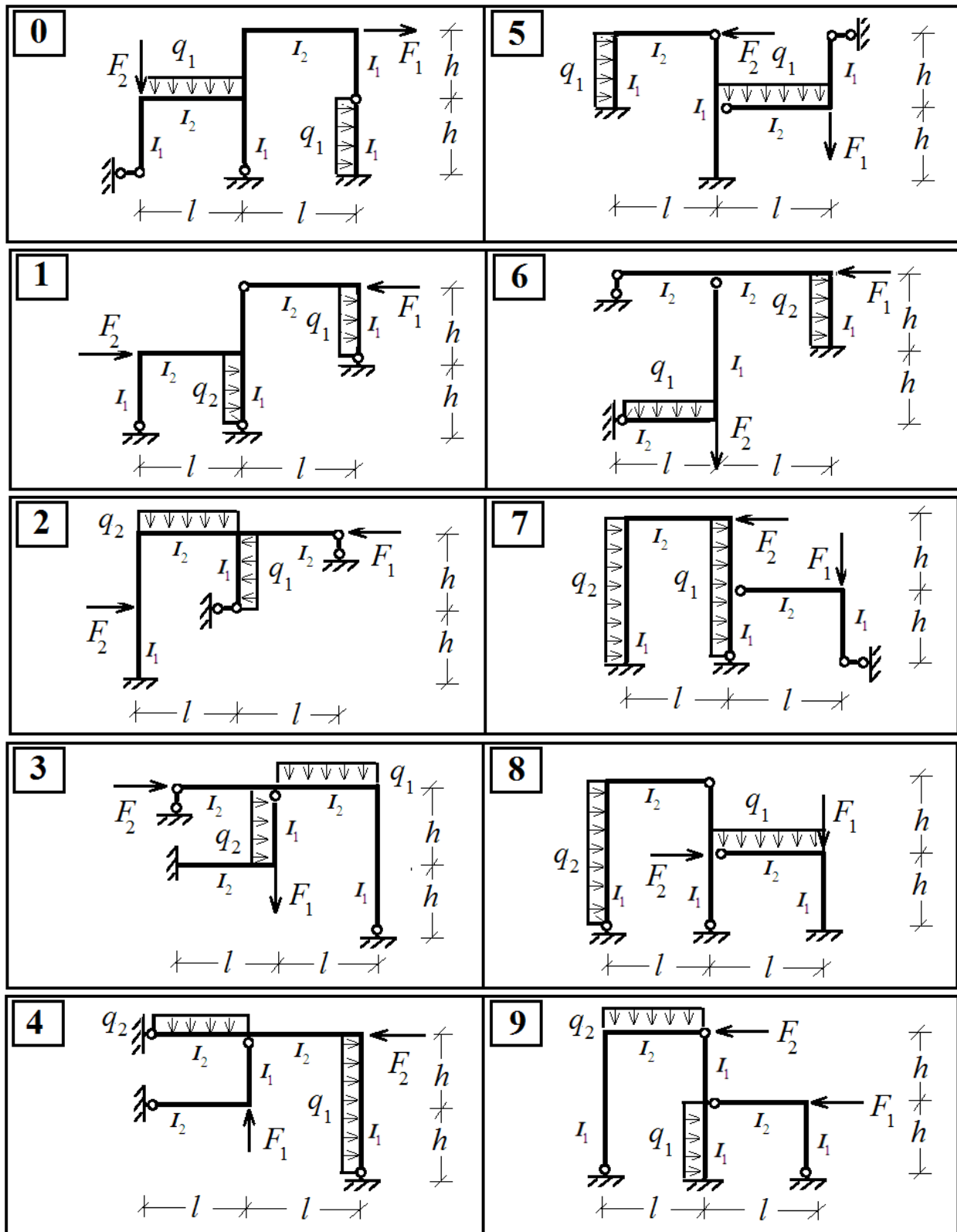


Рис. 3.5. Схемы заданий к контрольной работе № 3

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин заданную расчётную схему рамы с указанием размеров и нагрузок.
2. Определить степень статической неопределимости рамы по формуле $n_{ст.} = 3K - Ш$, где K – количество замкнутых контуров; $Ш$ – количество простых шарниров, включая опорные.
3. Выбрать две статически определимые и геометрически неизменяемые основные системы. По направлению удалённых «лишних» связей приложить неизвестные реакции: X_1, X_2, \dots, X_n . Одну основную систему использовать для расчёта, другую – для деформационной проверки.
4. Записать в общем виде систему канонических уравнений метода сил для данной расчётной схемы.
5. Показать расчетные схемы основной системы при последовательном нагружении ее единичными безразмерными силами, приложенными по направлению удаленных связей. На расчетных схемах показать опорные реакции, определить их и построить эпюры изгибающих моментов $M_1^0, M_2^0, \dots, M_{1n}^0$.
6. Показать расчетную схему основной системы при нагружении ее внешней нагрузкой, определить опорные реакции и построить в основной системе эпюру изгибающих моментов M_F^0 .
7. Определить коэффициенты при неизвестных системы канонических уравнений

$$\delta_{ik} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_i^0 M_k^0}{EI} dx,$$

где m – число участков интегрирования.

8. Определить свободные члены системы канонических уравнений

$$\Delta_{iF} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_i^0 M_F^0}{EI} dx.$$

Примечание. При перемножении простых эпюр (прямоугольники, треугольники) допускается применение правила Верещагина, а для перемножения более сложных эпюр рекомендуется воспользоваться формулой перемножения трапеций или вычислять интеграл Мора по формуле Симпсона.

9. Подставить найденные значения коэффициентов и свободных членов в систему канонических уравнений и решить ее относительно неизвестных X_i .

10. Построить эпюры изгибающих моментов от действительных значений реакций в удаленных связях. Для этого все ординаты эпюр M_i^0 ($i = 1 \dots n$) умножаются на соответствующую величину X_i .

11. Построить эпюру изгибающих моментов в заданной расчетной схеме на основании принципа независимости действия сил

$$M_F = M_1^0 X_1 + M_2^0 X_2 + \dots + M_n^0 X_n + M_F^0.$$

12. Произвести деформационную проверку расчета. Для этого берется любая другая статически определимая основная система (например, вторая из выбранных в п. 3), в которой строится эпюра изгибающих моментов \bar{M}_S^0 от одновременного действия на нее всех единичных сил, приложенных по направлению удаленных связей. При правильно выполненном расчете должно выполняться условие

$$\sum_1^m \int_0^l \frac{\bar{M}_S^0 M_F^0}{EI} dx = 0.$$

Деформационная проверка будет выполняться и в том случае, если в приведенной формуле вместо \bar{M}_S^0 использовать любую из эпюр \bar{M}_i^0 поверочной основной системы.

Примечание. Деформационная проверка имеет смысл, если выбранная для проверки новая основная система дает эпюры \bar{M}_i^0 , линейно независимые (не подобные) эпюрам M_i^0 , использованным ранее в расчете.

13. Построить эпюру поперечных сил Q_F в заданной системе, используя дифференциальную зависимость $Q_F = -dM/dx$.

14. Построить эпюру продольных сил N_F . Значения продольных сил в стержнях рамы определяются из условий равновесия ее узлов. К вырезанным узлам кроме неизвестных продольных сил прикладываются найденные поперечные силы и известные узловые нагрузки.

15. Произвести проверку равновесия системы. При выполнении данного пункта рекомендуется рассмотреть два сечения: сечение, проведенное по опорным связям (рассматривается равновесие всей рамы), и сечение, проведенное в любом месте расчетной схемы (рассматривается равновесие отсеченной части).

При правильном построении эпюр для любой отсеченной части системы должны выполняться уравнения равновесия $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_c = 0$, где c — любая точка на плоскости.

Пример расчёта статически неопределимой рамы методом сил

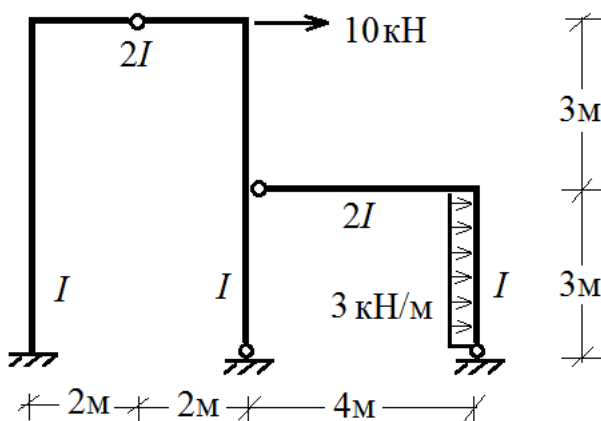


Рис. 3.6. Исходные данные для примера расчета

- Определяем степень статической неопределимости рамы по формуле: $n_{ст.} = 3K - \Pi = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.
- Выбираем две статически определимые геометрически неизменяемые основные системы (рис. 3.7). Одну – для расчёта, другую – для проверки.
- Записываем систему канонических уравнений метода сил:
 $\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0;$
 $\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0.$
- Строим эпюры моментов M_1^0 от $X_1 = 1$, M_2^0 от $X_2 = 1$ и M_F^0 , предварительно определив для каждой схемы опорные реакции.

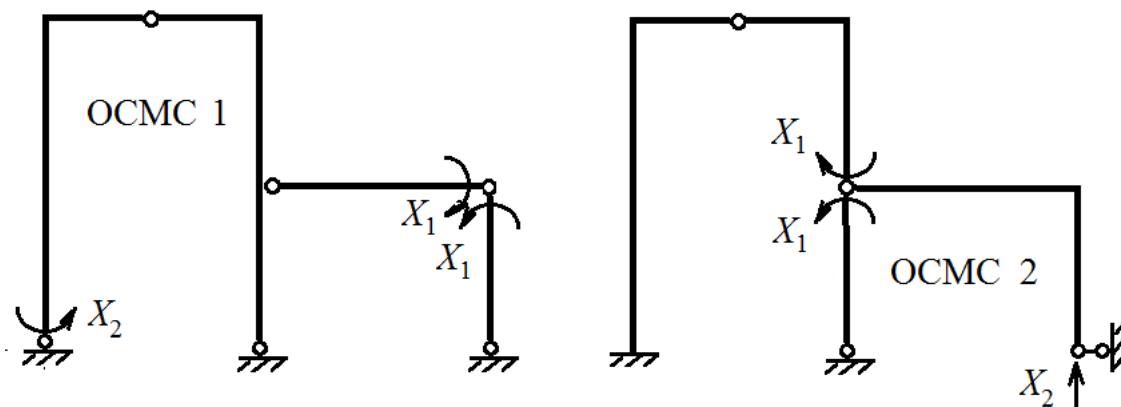


Рис. 3.7. Основные системы метода сил

• Определяем коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.

$$\delta_{11} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_1^0 M_1^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 4,083 \frac{1}{EI} \frac{\text{М}}{\text{кН}};$$

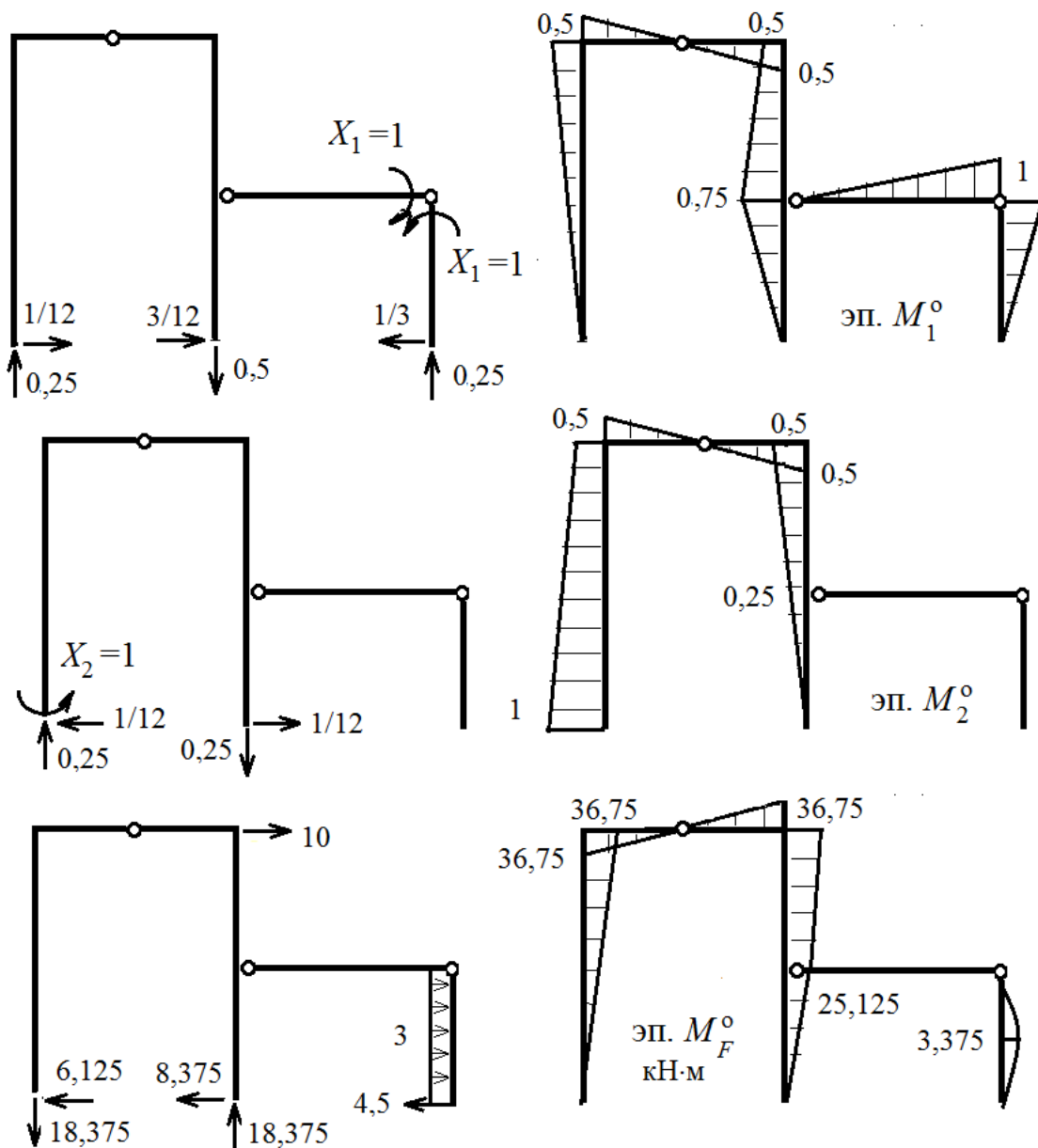


Рис. 3.8. Эпюры изгибающих моментов в основной системе

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_1^0 M_2^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1) + \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,75 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 = 2,042 \frac{1}{EI} \frac{\text{М}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_2^0 M_2^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2) = 4,167 \frac{\text{М}}{\text{кН}};$$

$$\Delta_{1F} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_1^0 M_F^0}{EI} dx = - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 36,75 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,125 -$$

$$- \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (2 \cdot 25,125 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 36,75 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 25,125) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (4 \cdot 0,5 \cdot 3,375) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 36,75 \cdot 2 = - 121,75 \frac{1}{EI} \text{ м};$$

$$\Delta_{2F} = \sum_1^m \int_0^l \frac{M_2^0 M_F^0}{EI} dx = - \frac{1}{EI} \frac{1}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 36,75 \cdot 1) - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 25,125 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot$$

$$0,25 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 2 \cdot 0,25 \cdot 25,125 + 25,125 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 36,75) -$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 36,75 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 = - 127,56 \frac{1}{EI} \text{ м}.$$

• Решаем канонические уравнения метода сил

$$\frac{4,083}{EI} X_1 + \frac{2,042}{EI} X_2 - \frac{121,75}{EI} = 0; X_1 = 19,218 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\frac{2,042}{EI} X_1 + \frac{4,167}{EI} X_2 - \frac{127,56}{EI} = 0; X_2 = 21,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Проверка решения $2,042 \cdot 19,218 + 4,167 \cdot 21,2 - 127,56 = 0,01$.

Погрешность расчета $0,01 / 127,56 \cdot 100 \% = 0,008 \%$.

• Строим исправленные эпюры $M_1^0 \cdot X_1$ и $M_2^0 \cdot X_2$.

• Строим эпюру изгибающих моментов в заданной системе

$$M = M_1^0 \cdot X_1 + M_2^0 \cdot X_2 + M_F^0$$

• Выполняем деформационную проверку, построив во второй основной системе метода сил единичную эпюру моментов

$$\sum_1^m \int_0^l \frac{\overline{M}_1^0 M_F}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{6}{6} (2 \cdot 2 \cdot 16,54 - 2 \cdot 4 \cdot 21,199 + 4 \cdot 16,54 - 21,199 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,412 + \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (2 \cdot 2 \cdot 16,54 + 2 \cdot 1 \cdot 5,412 + 1 \cdot 16,54 + 2 \cdot 5,412) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,54 = \frac{1}{EI} (-79,67 + 79,64) = \frac{1}{EI} 0,03.$$

Определяем погрешность расчета: $\frac{0,03}{79,67} 100 \% = 0,04 \% < 1 \%$.

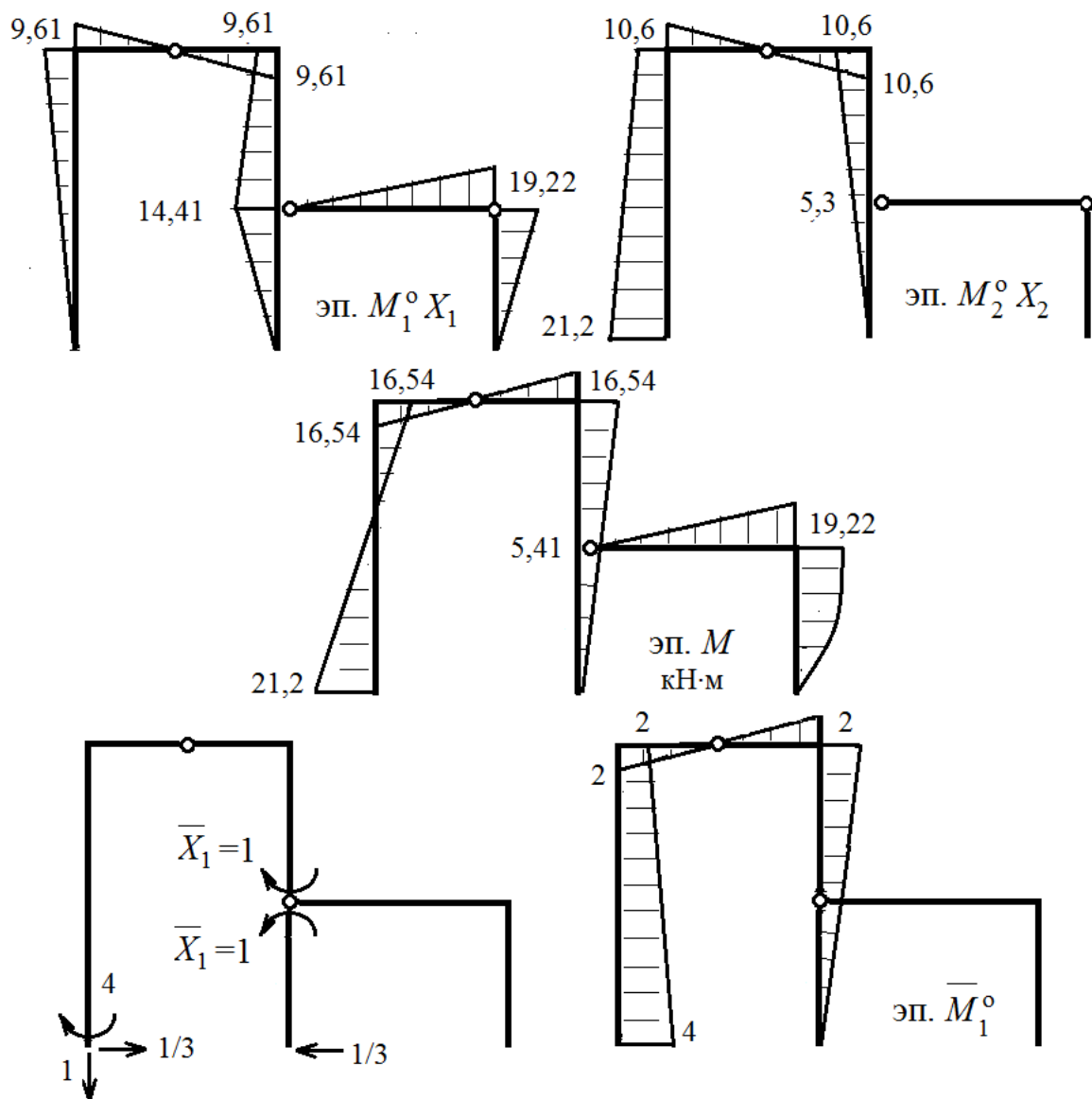


Рис. 3.9. Эпюры изгибающих моментов

- Строим эпюру Q в заданной расчётной схеме, используя дифференциальную зависимость $Q = -dM/dx$.
- Строим эпюру продольных сил N . Величины и направления продольных сил определяются из условий равновесия узлов рамы.
- Проверяем равновесие узлов.
- Определяем опорные реакции, используя все эпюры усилий.
- Выполняем статическую проверку всей системы:

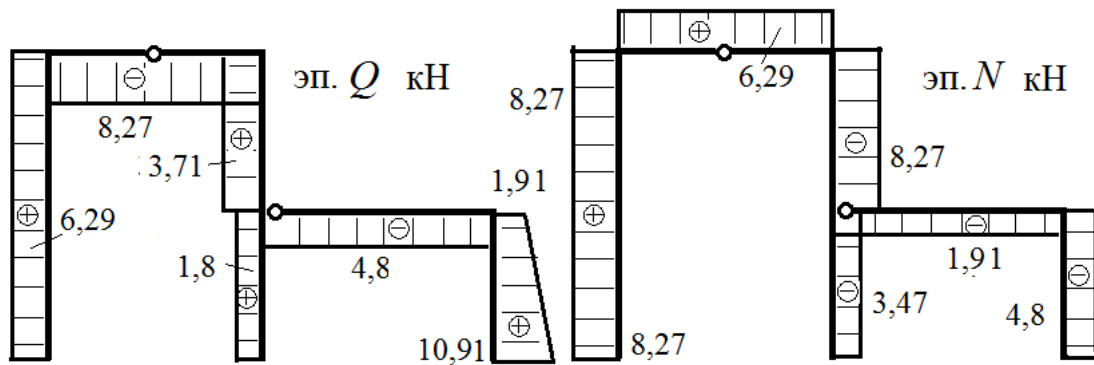


Рис. 3.10. Эпюры поперечных и продольных усилий

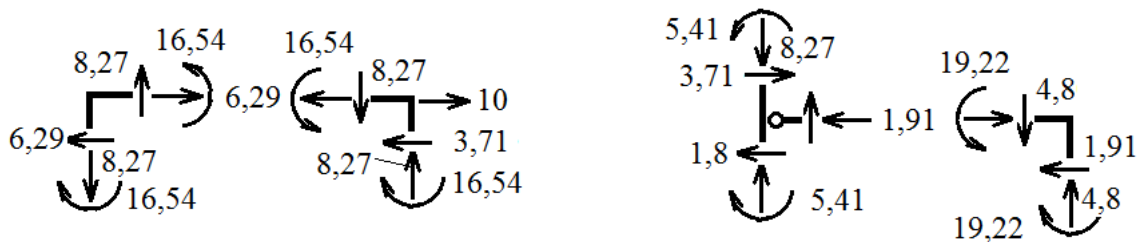


Рис. 3.11. Условия равновесия узлов

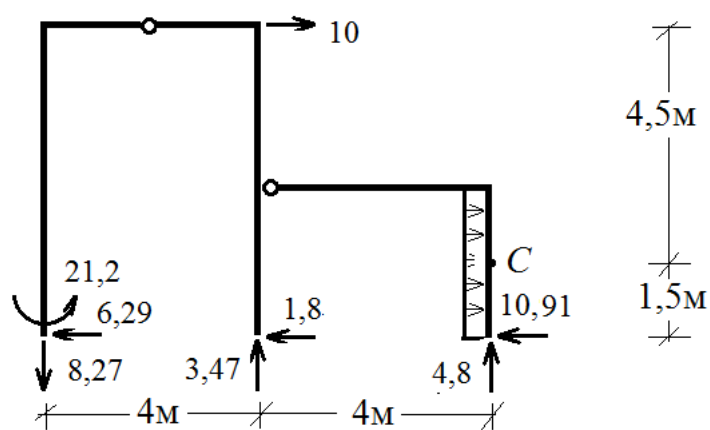


Рис. 3.12. Статическая проверка равновесия рамы

$$\Sigma X = 0; 10 - 6,29 - 1,8 - 10,91 + 3 \cdot 3 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; 4,8 + 3,47 - 8,27 = 0; \Sigma M_c = 0;$$

$$10 \cdot 4,5 + (6,29 + 1,8 + 10,91) \cdot 1,5 + 3,47 \cdot 4 - 8,27 \cdot 8 - 21,2 = 0,02 \approx 0.$$

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЧАСТЬ 2

Общие требования к выполнению контрольных работ

При изучении второй части курса «Строительная механика» во втором семестре студенты выполняют три контрольных работы (КР):

- КР № 4. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений;
- КР № 5. Динамический расчет плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки;
- КР № 6. Расчет плоской рамы на устойчивость.

Порядок получения индивидуального задания. Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведенных в заданиях таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачетной книжки или студенческого билета (например, если номер зачетной книжки 18549, то первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9).

Работы, выполненные не по шифру, к проверке и защите не принимаются!

Оформление контрольных работ

Контрольная работа оформляется на стандартных листах писчей бумаги формата А4, заполняемых только с одной стороны. Образцы показаны в прил. 1, 8. Работа должна быть сброшюрована.

На титульном листе указываются: номер и название работы, фамилия, имя и отчество студента, номера группы и специальности, индивидуальный шифр.

Расчетная схема изображается в масштабе длин. На схеме в численном виде указываются все необходимые данные (размеры, нагрузки и пр.), которые выписываются из таблиц. Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями, всеми требуемыми расчетами и четкими схемами с указанием в необходимых случаях масштабов длин и сил.

Небрежно выполненные работы, оформление которых не соответствует общим требованиям, к проверке и защите не принимаются!

Глава 4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Метод перемещений – это второй основной классический метод расчета статически неопределимых систем после метода сил. Однако, в отличие от последнего, он является формальным. Расчет по нему не зависит от степени статической неопределимости. Метод перемещений применим и к расчету статически определимых систем, хотя это крайне нецелесообразно при решении задач прочности. Основными неизвестными служат линейные смещения и углы поворота узлов Z_i , благодаря чему метод и получил свое название.

При ручном счете преимущество отдавалось тому методу, который приводит к меньшему числу основных неизвестных. При переходе же к расчетам на ЭВМ метод перемещений оказался непревзойденным по легкости программирования.

Метод перемещений положен в основу ряда приближенных методов расчета рам и широко используется при решении задач устойчивости стержневых систем [4]. Кроме того, на его идеях базируется метод конечных элементов, повсеместно применяющийся для расчета не только стержневых систем, но также пластин и оболочек. Поэтому знание метода перемещений совершенно необходимо специалистам, занимающимся расчетом строительных конструкций.

4.1. Допущения, вводимые при расчете рам методом перемещений

Рассмотрим деформированное состояние статически неопределимой плоской рамы при действии внешней нагрузки (рис. 4.1, а).

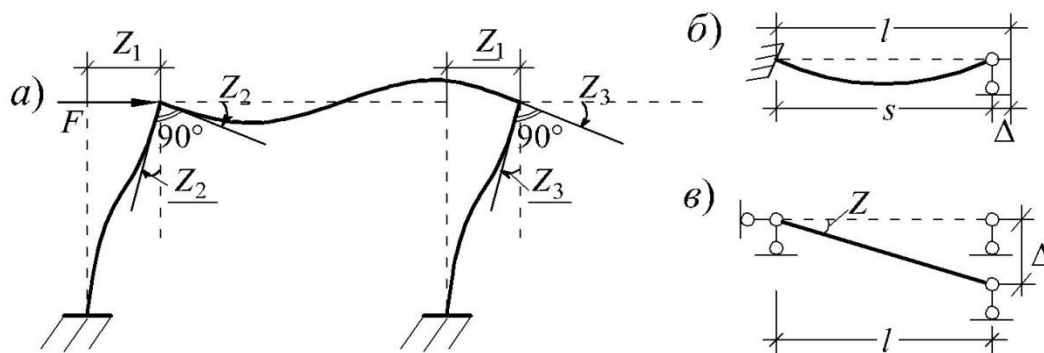


Рис. 4.1. Деформированное состояние рамы

Для упрощения расчета на уровне выбора расчетной схемы введем ряд допущений.

1. Как и в методе сил, будем пренебрегать влиянием деформаций от поперечных и продольных сил на перемещения узлов. Однако, если в методе сил учет этих деформаций не ведет к увеличению числа основных неизвестных, то в методе перемещений учет продольных деформаций существенно повышает число основных неизвестных и вместе с тем трудоемкость расчета. На основании принятого допущения $\underline{Z}_1 = Z_1$ (см. рис. 4.1, а).
2. Будем пренебрегать изменением проекции длины стержня за счет его искривления (рис. 4.1, б): $s = l - \Delta \approx l$. На этом основании $\underline{Z}_1 = Z_1$.
3. Допустим, что концы стержней, примыкающих к жесткому узлу, поворачиваются на один и тот же угол, т. е. $\underline{Z}_2 = Z_2, \underline{Z}_3 = Z_3$.
4. Углы поворота, ввиду их малости, заменим тангенсами, т. е. $Z = \Delta / l$ (рис. 4.1, в).

При расчете плоских и пространственных ферм приведенные допущения отсутствуют, так как перемещения в фермах возникают лишь вследствие деформаций от продольных сил.

4.2. Степень кинематической неопределимости. Основная система

Метод перемещений по своему физическому смыслу является как бы обратным отображением метода сил (что подтверждает наличие дуализма в природе), но по внешней форме методы идентичны. Расчет, как и при методе сил, начинается с определения числа основных неизвестных перемещений. По аналогии с методом сил системы, рассчитываемые методом перемещений, будем называть *кинематически неопределимыми*, а число неизвестных – *степенью кинематической неопределимости*.

Затем выбирается основная система, имеющая такое же назначение, как в методе сил. *Из условия эквивалентности основной и заданной систем находятся основные неизвестные, т. е. смещения и углы поворота узлов.* И вот здесь уже начинается содержательное отличие. Вместо удаления лишних связей, наоборот, ставятся до-

полнительные связи по направлению искомым перемещений. Обозначим эти связи двойными линиями в отличие от основных связей.

Для плоских ферм ставятся одна линейная связь в подвижных опорах и по две взаимно перпендикулярных связи в свободных узлах. В фермах со значительным количеством свободных узлов получается большое число неизвестных, поэтому плоские фермы редко рассчитывают методом перемещений.

Для пространственных ферм ставится по три взаимно перпендикулярных связи в свободных узлах. В узлах, где имеются одна или две связи, их дополняют до трех (рис. 4.2). Расчет пространственных ферм графическим способом оказывается весьма громоздким, поэтому их проще рассчитывать методом перемещений на компьютере с помощью соответствующих программ.

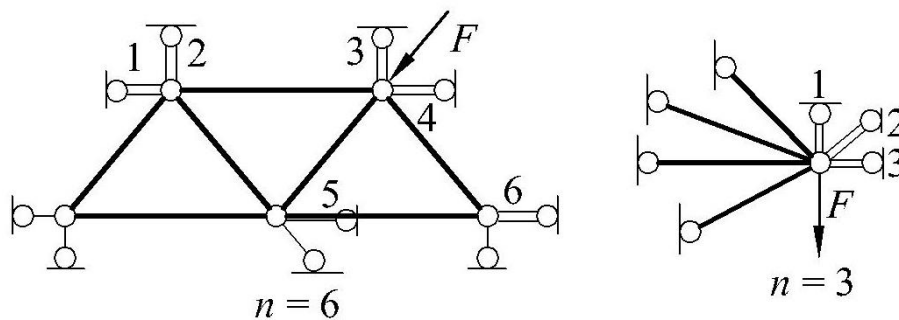


Рис. 4.2. Степень кинематической неопределимости ферм

При расчете плоских рамных систем, содержащих как жесткие, так и шарнирные узлы, для получения основной системы с учетом принятых допущений нужно

- поставить угловые связи, препятствующие повороту, во все узлы, где нет полных (сквозных) шарниров (далее такие связи мы будем изображать квадратиками, хотя возможны и другие обозначения);
- поставить линейные связи, препятствующие линейным смещениям узлов рамы.

Степень линейной подвижности узлов определяется по шарнирной схеме, которую получают из заданной путем введения полных шарниров во все узлы, включая опорные.

Общее число неизвестных метода перемещений

$$n = n_{\text{уг}} + n_{\text{л}}. \quad (4.1)$$

Для определения числа линейных связей можно использовать условие геометрической неизменяемости плоских ферм

$$n_{л} = 2У - С, \quad (4.2)$$

которое (за редким исключением) дает число недостающих связей, обеспечивающих геометрическую неизменяемость системы.

На рис. 4.3 и 4.4 приведены примеры выбора основной системы (хотя при установке угловых связей выбора нет и лишь несущественный выбор имеет место при установке линейных связей).

Первая схема рамы (рис. 4.3, а) имеет два узла, где нет полных шарниров, что она дает два неизвестных угла поворота – Z_1 и Z_2 .

Шарнирная схема показана на рис. 4.3, б. Согласно формуле (4.2) $n_{л} = 2 \cdot 3 - 5 = 1$, т. е. необходима одна линейная связь. Поставить ее можно либо слева (горизонтально), либо справа (перпендикулярно наклонному стержню).

Основная система изображена ниже на рис. 4.3, в.

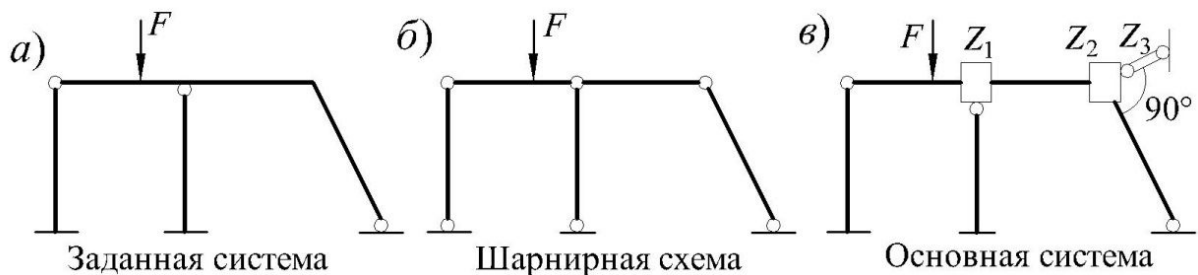


Рис. 4.3. Выбор основной системы метода перемещений. Схема 1

Во второй схеме (рис. 4.4, а) угловых связей три. Число линейных связей по формуле (4.2) $n_{л} = 2 \cdot 4 - 6 = 2$. Основная система метода перемещений показана на рис. 4.4, в.

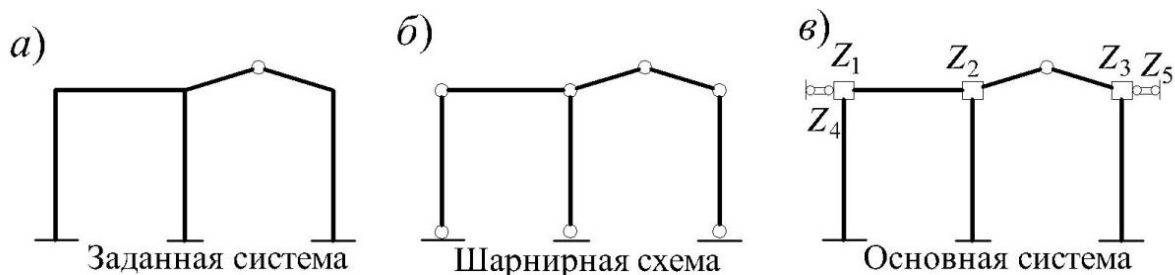


Рис. 4.4. Выбор основной системы метода перемещений. Схема 2

Таким образом, мы, по существу, пришли к методу конечных элементов, в качестве которых выступают отдельные прямолинейные стержни постоянного сечения. В отличие от программных комплексов типа ЛИРА, SCAD и им подобных здесь не учтено влияние продольных деформаций (см. разд. 4.1). Естественно, его можно учесть, поставив дополнительные линейные связи. Например, на рис. 1.5, б изображена обычная основная система, а на рис. 1.5, в – система с учетом продольных деформаций стержней.

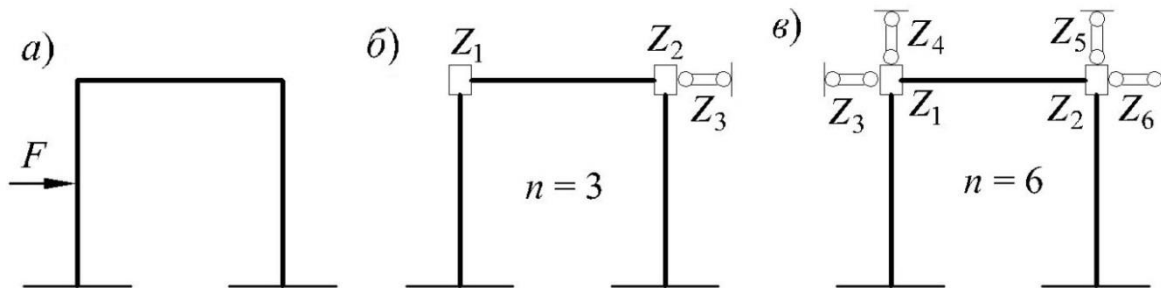


Рис. 4.5. Различные основные системы одной и той же рамы

При расчете пространственных рам введенные допущения остаются. Однако изгиб будет уже в двух плоскостях и дополнительно возникнет кручение стержней, что также увеличивает число неизвестных. При выборе основной системы метода перемещений в каждый узел, где нет полных шарниров, для предотвращения поворота в трех взаимно перпендикулярных направлениях ставится три связи. Число линейных связей определяется по шарнирной схеме. Здесь тоже можно использовать условие геометрической неизменяемости пространственных ферм $C = 3У$, откуда

$$n_{\text{л}} = 3У - C. \quad (4.3)$$

Очевидно, что, в отличие от метода сил, где продольные деформации учитываются одним из членов формулы Мора, в методе перемещений этот учет ведет к заметному увеличению числа основных неизвестных. Но в этом проявляется и преимущество метода конечных элементов – отпадает надобность выбора основной системы, поскольку она единственная при принятых допущениях. Отсюда и удобство программирования.

4.3. Теорема о взаимности реакций

Обозначим реакции, возникающие в дополнительных связях, через r_{ik} . Назначение индексов такое же, как и ранее у перемещений, первый индекс показывает место возникновения реакции, а второй – причину, от которой она возникает.

Для доказательства теоремы о взаимности реакций рассмотрим два состояния i и k одной и той же статически неопределимой системы. В каждом из состояний зададим единичные перемещения по направлению указанных связей (рис. 4.6).

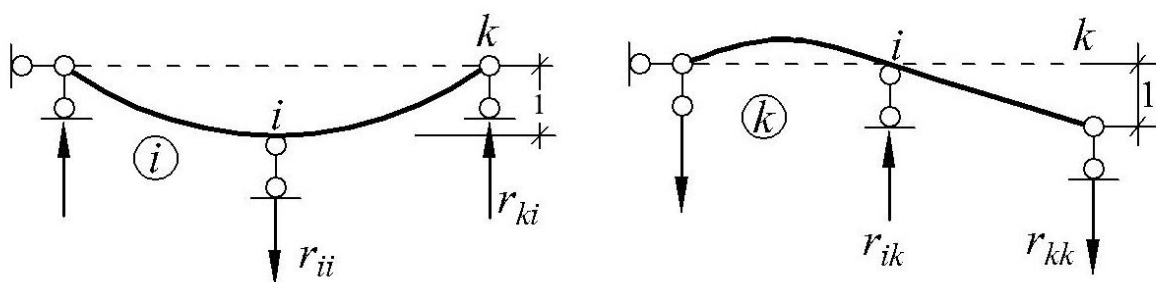


Рис. 4.6. К доказательству теоремы о взаимности реакций

Применим к этим состояниям теорему о взаимности возможных работ. Приравняем работу сил состояния i на перемещениях состояния k к работе сил состояния k на перемещениях состояния i (в левой опоре тоже имеют место реакции, но, поскольку опора не смещается, они не входят в выражение работы)

$$r_{ii} \cdot 0 - r_{ki} \cdot 1 = -r_{ik} \cdot 1 + r_{kk} \cdot 0, \text{ или } r_{ik} = r_{ki}.$$

Реакции равны по величине и совпадают по знакам. Отсюда можно сформулировать следующий вывод: *реакция, возникающая в связи i от единичного перемещения по направлению связи k , равна реакции в связи k , возникающей от единичного перемещения по направлению связи i .*

Теорема была доказана в 1873 г. английским физиком Д. У. Рэлеем (1842–1919).

4.4. Идея метода перемещений. Система канонических уравнений

Для реализации метода перемещений можно использовать ту же последовательность расчета, что и при расчете статически неопределимых систем методом сил.

После выбора основной системы метода перемещений в ней по табл. 4.1 строятся эпюры изгибающих моментов $M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$ от единичных перемещений по направлению добавленных связей и эпюра M_F^0 от внешней нагрузки.

Затем с помощью уравнений равновесия вычисляются реакции во всех дополнительных связях от всех единичных перемещений r_{ik} и реакции R_{iF} от внешней нагрузки. Далее поступают следующим образом. Поскольку в заданной системе дополнительные связи отсутствуют, то, чтобы сделать основную систему метода перемещений эквивалентной заданной, нужно создать условия, при которых реакции в дополнительных связях от всех факторов, действующих на систему, были бы равны нулю.

Достигается это с помощью канонических уравнений метода перемещений. Пусть r_{11} – реакция в связи 1 от единичного перемещения по направлению этой связи. Произведение $r_{11}Z_1$ определяет реакцию в связи 1 от неизвестного пока перемещения Z_1 . Используя принцип независимости действия сил, для связи 1 можно записать сумму реакций от всех факторов, действующих на систему (от перемещений Z_i и внешней нагрузки), $r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1F}$.

Такие же суммы можно записать и для других реакций, возникающих в дополнительных связях. Чтобы сделать основную систему эквивалентной заданной (т. е. чтобы ее напряженно-деформированное состояние стало аналогичным), необходимо приравнять все суммарные реакции к нулю.

Таблица 4.1

Эпюры моментов от единичных перемещений и внешней нагрузки

№ п/п	Схема воздействия	Эпюра моментов	Реакции в опорных связях
1			$M_i = \frac{3EI}{l} Z$ $R_i = -R_k = \frac{3EI}{l^2} Z$
2			$M_i = \frac{3EI}{l^2} Z$ $R_i = R_k = \frac{3EI}{l^3} Z$
3			$M_i = 0,5Fvl(1 - v^2)$ $R_i = 0,5Fv(3 - v^3)$ $R_k = 0,5Fu^2(3 - u)$
4			$M_i = \frac{ql^2}{8}$ $R_i = \frac{5}{8}ql, R_k = \frac{3}{8}ql$
5			$M_i = \frac{4EI}{l} Z; M_k = \frac{2EI}{l} Z$ $R_i = -R_k = \frac{6EI}{l^2} Z$
6			$M_i = M_k = \frac{6EI}{l^2} Z$ $R_i = -R_k = \frac{12EI}{l^3} Z$
7			$M_i = uv^2Fl; M_k = u^2vFl$ $R_i = v^2(1+2u)F$ $R_k = u^2(1+2v)F$
8			$M_i = -M_k = \frac{ql^2}{12}$ $R_i = R_k = \frac{ql}{2}$

В итоге получим систему канонических уравнений метода перемещений

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1F} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + r_{2F} &= 0; \\ &\dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + r_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В уравнениях (4.4) коэффициенты с одинаковыми индексами, называемые *главными коэффициентами жесткости*, всегда положительные. Остальные коэффициенты, называемые *побочными*, и свободные члены r_{iF} могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. *Статический смысл канонических уравнений состоит в том, что они отрицают наличие реакций в дополнительных связях основной системы.*

4.5. Последовательность расчета при действии силовой нагрузки

Решение системы уравнений (4.4) дает перемещения, которые являются основными неизвестными метода. Через них затем определяются усилия.

Первыми вычисляются изгибающие моменты. Для этого ординаты эпюр от единичных значений перемещений умножают на соответствующие найденные величины основных неизвестных и суммируют с ординатами эпюры от внешней нагрузки

$$M_F = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_2Z_2 + \dots + M_nZ_n + M_F^0.$$

Для проверки построения эпюры моментов в заданной системе рассматривается равновесие узлов и выполняется деформационная проверка.

Эпюра поперечных сил строится на каждом стержне по эпюре изгибающих моментов с использованием формулы

$$Q_{ik} = Q_{ik}^0 - \frac{M_i + M_k}{l_{ik}}, \quad (4.5)$$

где Q_{ik}^0 – поперечная сила у опоры i от поперечной нагрузки на стержне (при отсутствии нагрузки на стержне $Q_{ik}^0 = 0$).

Моменты M_i и M_k подставляются в формулу со знаком «+», если они направлены по ходу часовой стрелки.

Эпюра продольных сил строится по эпюре поперечных сил с помощью уравнений равновесия для отдельных узлов. Затем выполняется статическая проверка для заданной системы.

Если требуется определить иные перемещения (помимо найденных Z_i), то, как и при расчете методом сил, используется формула Мора. Причем эпюра от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения, может быть построена в любой статически определимой системе, полученной из заданной.

4.6. Контрольные вопросы

1. Кинематическая неопределимость расчетной схемы.
2. Степень кинематической неопределимости. Получение кинематически определимой основной системы.
3. Идея метода перемещений.
4. Система канонических уравнений: ее физический смысл и особенности, размерности коэффициентов при неизвестных и свободных членах.
5. Особенности стержней основной системы метода перемещений и способы определения усилий в них.
6. Общие принципы определения реакций от различных воздействий в дополнительных связях основной системы метода перемещений.
7. Общий ход расчета методом перемещений при действии внешней нагрузки.
8. Построение эпюр поперечных и продольных сил при расчете балок и рам методом перемещений.
9. Проверки расчета методом перемещений.

4.7. Контрольная работа № 4.

Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Задание. Рассчитать статически неопределимую раму методом перемещений. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Найти опорные реакции. Сделать проверки расчета.

Исходные данные определяются по табл. 4.2 и схемам рис. 4.7.

Таблица 4.2

Исходные данные для контрольной работы № 4

Первая цифра шифра	q_2 , кН/м	q_1 , кН/м	$\frac{I_2}{I_1}$	Вторая цифра шифра	F_1 , кН	F_2 , кН	Третья цифра шифра (№ схемы)	h , м	l_1 , м	l_2 , м
0	0	3	2	0	5	0	0	3	2	4
1	5	0	3	1	0	5	1	4	3	2
2	0	2	4	2	4	0	2	5	4	6
3	4	0	2	3	0	4	3	4	5	2
4	0	4	3	4	3	0	4	3	6	4
5	2	0	4	5	0	3	5	4	3	6
6	0	5	2	6	5	0	6	3	4	6
7	3	0	3	7	0	5	7	4	5	4
8	0	2	4	8	2	0	8	5	6	4
9	2	0	2	9	0	2	9	3	4	6

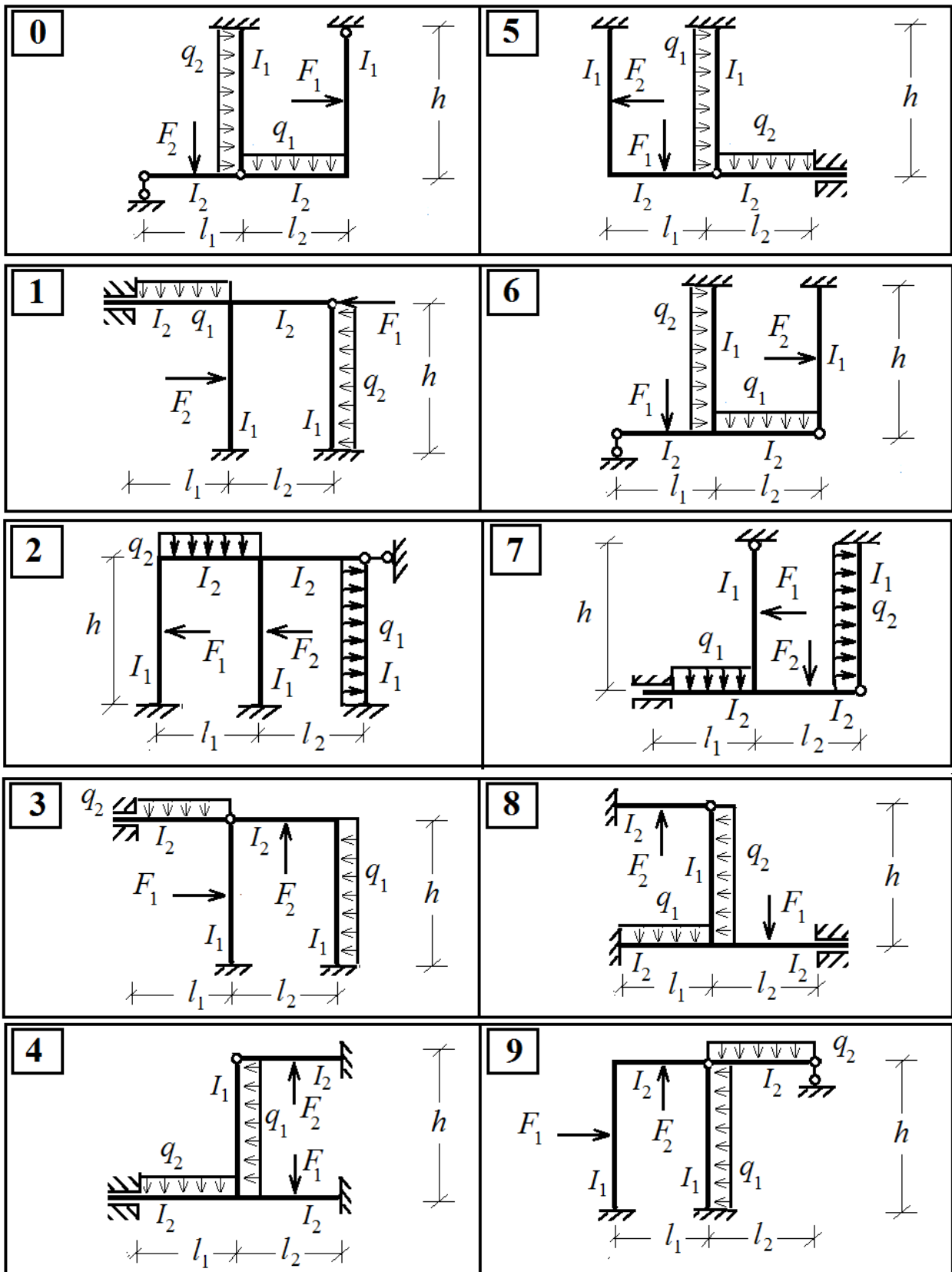


Рис. 4.7. Расчетные схемы для контрольной работы № 4 (сосредоточенная сила приложена в середине участка)

Последовательность расчета

1. Изобразить в масштабе длин расчетную схему с указанием размеров и заданной нагрузки.
2. Вычислить степень кинематической неопределимости рамы по формуле $n_k = n_y + n_l$.
3. Составить систему канонических уравнений метода перемещений

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1F} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2F} = 0.$$

4. Выбрать основную систему метода перемещений, введя дополнительные связи, препятствующие угловым и линейным смещениям жестких узлов.
5. Построить схемы деформации основной системы от последовательно задаваемых единичных смещений по направлению дополнительных связей.
6. Построить в основной системе эпюры моментов M_1^0 и M_2^0 от единичных перемещений в направлении дополнительных связей с помощью таблицы прил. 3.
7. Построить в основной системе эпюру моментов M_F^0 от заданной нагрузки с помощью таблицы прил. 3.
8. Определить свободные члены и коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях, представляющие собой реакции в дополнительных связях. Величины реакций определяются по эпюрам M_1^0 , M_2^0 , M_F^0 . Для этого необходимо вырезать узлы (при угловом перемещении) или часть системы (при линейном перемещении) и рассматривать равновесие вырезанной части. Реакция в дополнительной связи считается положительной, если ее направление совпадает с направлением задаваемого единичного перемещения.
9. Решить систему канонических уравнений и определить неизвестные Z_1 и Z_2 . Проверить решение.
10. Построить эпюры $M_1^0 Z_1$ и $M_2^0 Z_2$. Для этого все ординаты эпюр M_1^0 и M_2^0 необходимо умножить на величины Z_1 и Z_2 , соответственно, (с учетом их знаков).

11. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов

$$M_F = M_1^0 Z_1 + M_2^0 Z_2 + M_F^0.$$

12. Проверить равновесие узлов эпюры M_F .

13. Произвести деформационную проверку правильности построения эпюры M_F . Для этого надо вычислить степень статической неопределимости заданной системы по формуле $n_{ст} = 3K - Ш$, выбрать основную систему метода сил и построить любую единичную эпюру изгибающих моментов. При правильном расчете будет выполнено условие, согласно которому перемещение в заданной системе по направлению удаленной связи равняется нулю

$$\sum_1^m \int_0^l \frac{\bar{M}_1^0 M_F}{EI} dx = 0.$$

14. Построить эпюру поперечных сил с помощью дифференциальной зависимости $Q = -dM/dx = \text{tg } \alpha$.

15. Построить эпюру продольных сил N , рассматривая равновесие узлов рамы.

16. Определить опорные реакции заданной системы.

17. Выполнить статическую проверку расчета

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0.$$

Пример решения

Задание. Рассчитать методом перемещений статически неопределимую раму (рис. 4.8).

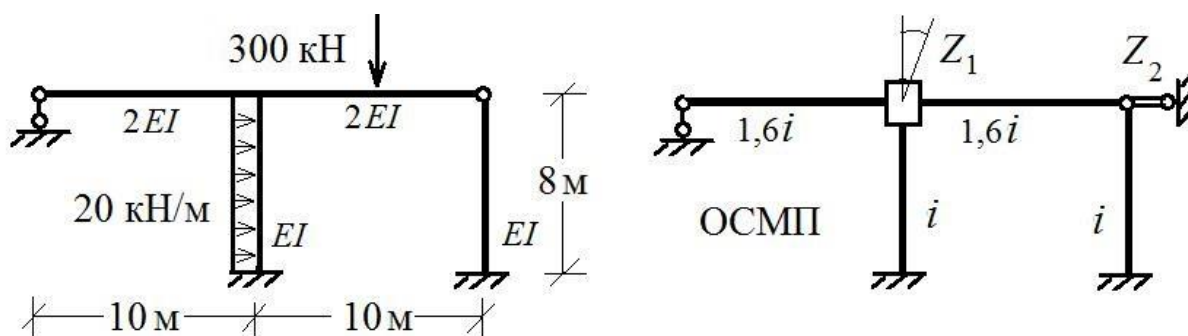


Рис. 4.8. Заданная расчетная схема и основная система метода перемещений

- Вычисляем степень кинематической неопределенности

$$n_k = n_y + n_l = 1 + 1 = 2.$$

- Составляем систему канонических уравнений метода перемещений

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1F} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2F} &= 0. \end{aligned}$$

- Выбираем основную систему метода перемещений (см. рис. 4.8).

- Строим деформированные схемы основной системы от последовательно задаваемых единичных смещений по направлению дополнительных связей.

- Строим в основной системе эпюры изгибающих моментов M_1^0 , M_2^0 от единичных смещений и эпюру моментов M_F^0 от заданной нагрузки, используя таблицу прил. 3 (рис. 4.9 – 4.11).

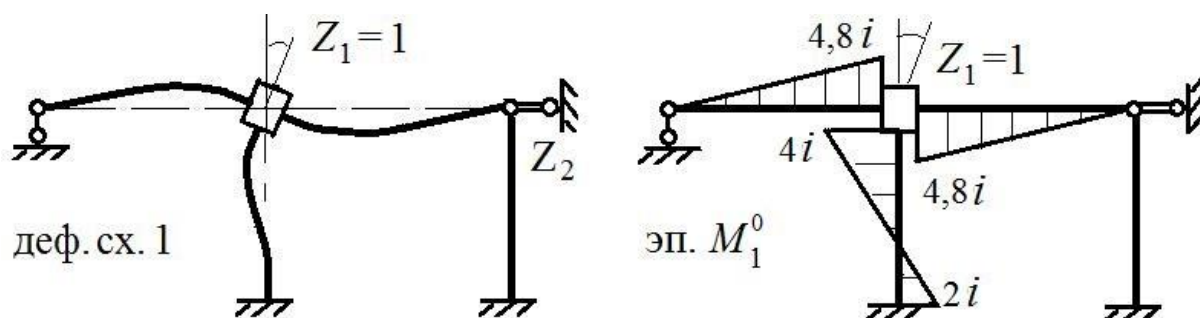


Рис. 4.9. Эпюра моментов от единичного угла поворота

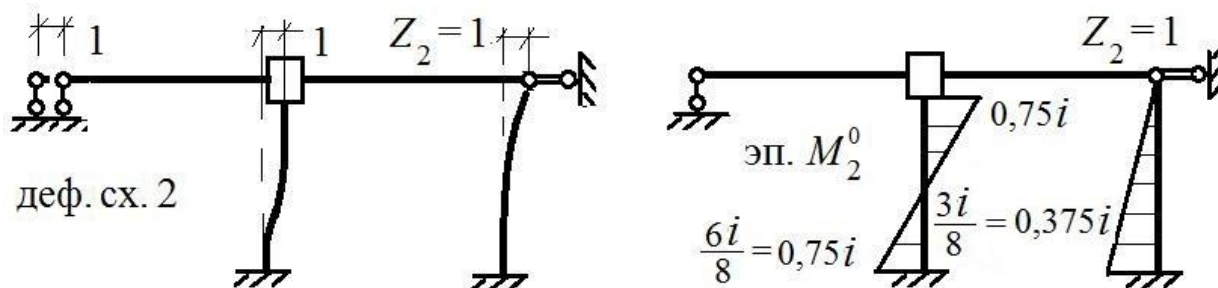


Рис. 4.10. Эпюра моментов от единичного линейного смещения

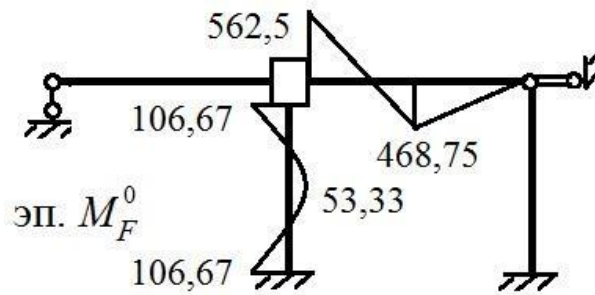


Рис. 4.11. Эпюра моментов в основной системе от внешней нагрузки

- Определяем свободные члены и коэффициенты при неизвестных канонических уравнений, рассматривая равновесие соответствующих отсеченных частей основной системы (рис. 4.12).

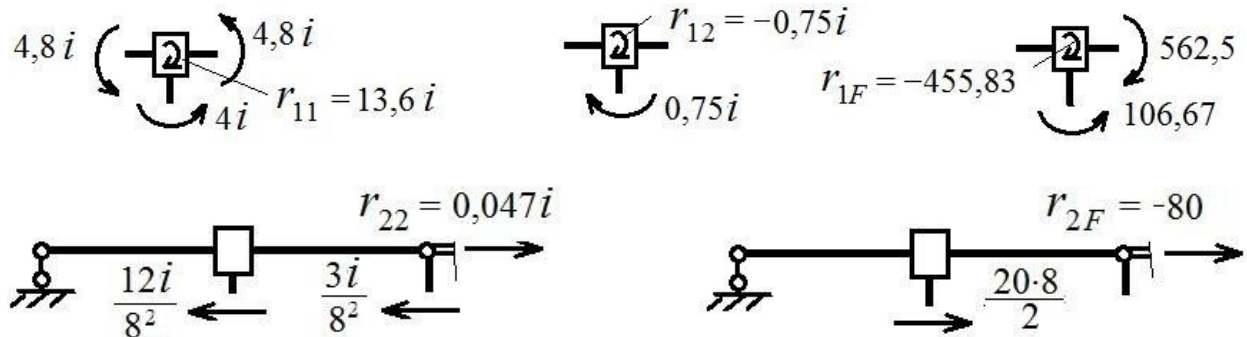


Рис. 4.12. Равновесие отсеченных частей основной системы

- Решаем систему канонических уравнений и определяем Z_1 и Z_2

$$13,6i \cdot Z_1 - 0,75i \cdot Z_2 - 455,833 = 0; Z_1 = 63,556 / i;$$

$$-0,75i \cdot Z_1 + 0,2345i \cdot Z_2 - 80 = 0; Z_2 = 544,714 / i.$$

- Строим эпюры $M_1^0 Z_1$ и $M_2^0 Z_2$. При этом все ординаты эпюр M_1^0 и M_2^0 умножаем на Z_1 и Z_2 , соответственно, (рис. 4.13).

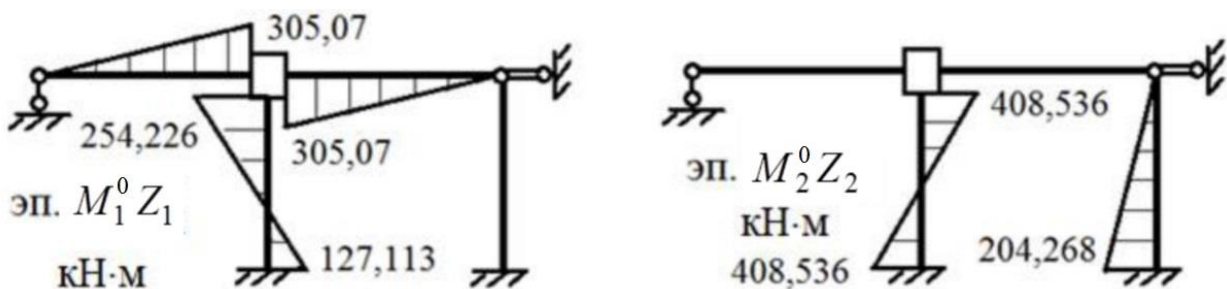


Рис. 4.13. Эпюры моментов от неизвестных метода перемещений

- Строим окончательную эпюру моментов, складывая в расчетных сечениях соответствующие ординаты эпюр

$$M = M_1^0 Z_1 + M_2^0 Z_2 + M_F^0.$$

Проверяем равновесие узлов эпюры M (рис. 4.14).

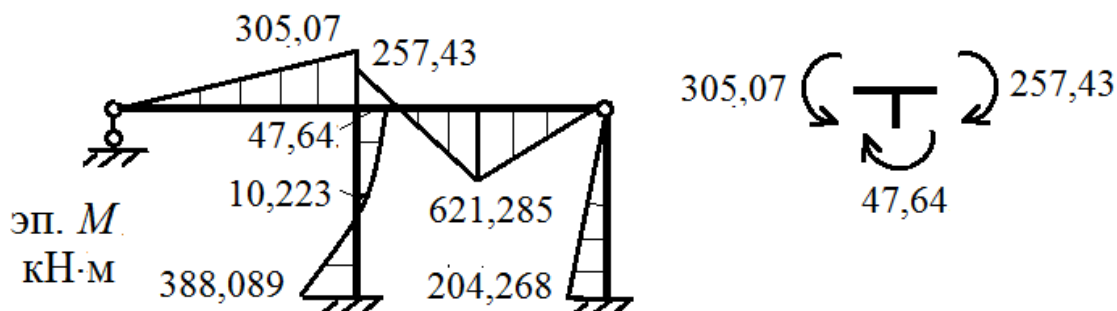


Рис. 4.14. Эпюра моментов в заданной системе от внешней нагрузки

- Производим деформационную проверку правильности построения эпюры M . Для этого вычисляем степень статической неопределимости заданной системы ($n_{ст} = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 3 = 3$), выбираем основную систему метода сил, строим единичную эпюру моментов \bar{M}_1^0 и определяем перемещение в заданной системе по направлению удаленной связи (рис. 4.15). Оно должно отсутствовать, т.е. быть равным нулю.

$$\begin{aligned} \sum \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1^0}{EI} dx &= -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 621,285 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{5}{6} \times \\ &\times (2 \cdot 1 \cdot 257,43 - 2 \cdot 0,5 \cdot 621,285 + 257,43 \cdot 0,5 - 621,285 \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{8}{6} (47,643 \cdot 1 - 388,089 \cdot 1 - 4 \cdot 10,223 \cdot 1) = 0. \end{aligned}$$

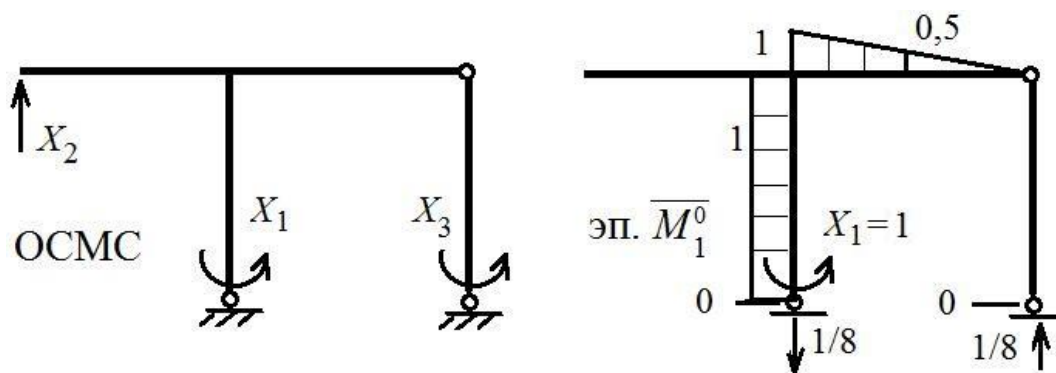


Рис. 4.15. Основная система метода сил и единичная эпюра моментов

- Строим эпюру поперечных сил Q с помощью дифференциальной зависимости $Q = - dM/dx = \text{tg } \alpha$ (рис. 4.16).
- Строим эпюру продольных сил N , рассматривая равновесие узлов рамы (рис. 4.17).

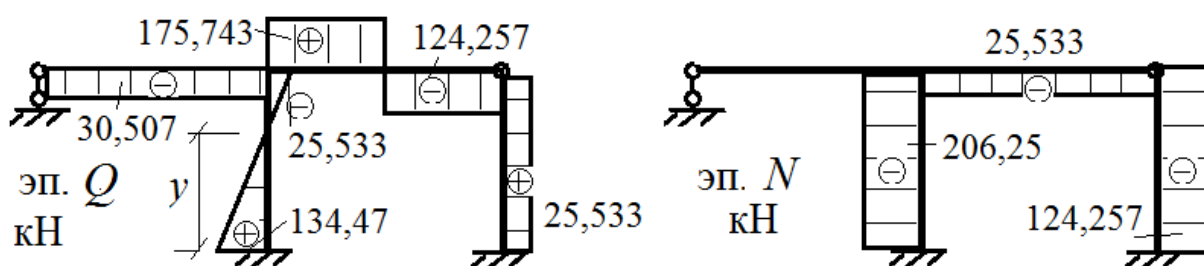


Рис. 4.16. Эпюры поперечных и продольных усилий

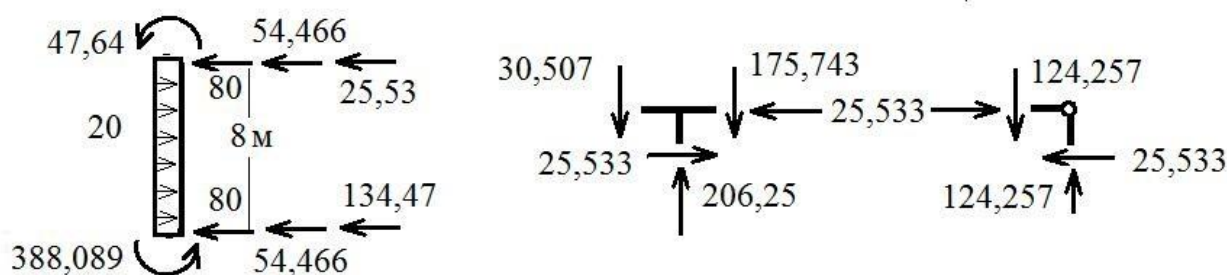


Рис. 4.17. Равновесие отсеченных частей заданной системы

- Определяем опорные реакции в заданной системе по построенным эпюрам M , Q , N (рис. 4.18).

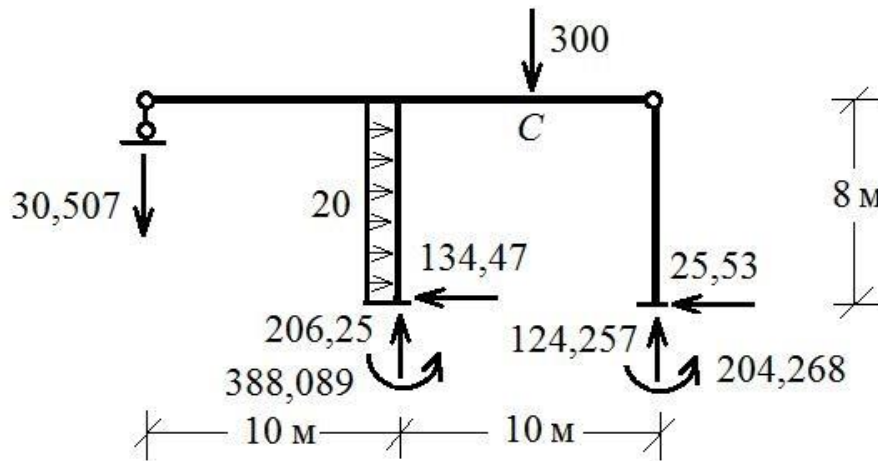


Рис. 4.18. Нагрузки и опорные реакции в заданной системе

- Выполняем для заданной системы статическую проверку расчета

$$\sum X = 25,53 + 134,47 - 20 \cdot 8 = 0;$$

$$\sum Y = 206,25 + 124,257 - 30,507 - 300 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = (25,53 + 134,47) \cdot 8 - 20 \cdot 8 \cdot 4 - 30,507 \cdot 15 + 206,25 \cdot 5 - \\ - 124,257 \cdot 5 - 204,268 - 388,089 = 0,003 \approx 0. \end{aligned}$$

Глава 5. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

5.1. Предмет и задачи динамики сооружений

Воздействия на строительные конструкции зданий и сооружений могут быть силовыми и кинематическими (т. е. вызванными движением основания). Причинами их возникновения служат природные силы или деятельность человека. К главным природным силовым факторам можно отнести давление ветра, особенно опасное для высотных зданий и «гибких» большепролетных сооружений. Другим глобальным бедствием до сих пор являются землетрясения, ежегодно уносящие множество жизней.

Колебания, создающиеся вследствие человеческой деятельности, весьма разнообразны. В основном они формируются неуравновешенными вращающимися частями машин, станков и других механизмов. Большая доля принадлежит и транспорту: трамваям, автомашинам, поездам метро и железной дороги, проходящим по территориям населенных пунктов. Заметные колебания возникают при забивке свай.

От указанных воздействий в строительных конструкциях возникают перемещения переменного знака, что ведет к переменному напряженному состоянию. Ниже будут рассмотрены в основном линейные задачи, т. е. рассчитываемые конструкции принимаются идеально упругими и линейно деформируемыми системами, а их материал следует закону Гука. К линейно деформируемым конструкциям применим принцип независимости действия сил. Вследствие этого расчет ведется отдельно от статических и динамических воздействий, а затем переменное напряженное состояние, вызываемое колебаниями, суммируется с напряженным состоянием от статических нагрузок, присутствующих всегда (например, нагрузок от собственного веса конструкции).

Задача динамики сооружений, как и при статическом расчете, состоит в определении напряженного и деформированного состояния конструкции от совокупности статических и динамических воздействий для последующей оценки ее прочности, жесткости и надежности. При этом следует помнить об особенностях динамического напряженного состояния, т. е. о его переменности. В случае металлических конструкций, материал которых работает одинаково

при растяжении и сжатии, нужно следить лишь за тем, чтобы суммарные напряжения не превышали расчетных. В конструкциях из железобетона, у которых в изгибаемых элементах арматура расположена несимметрично относительно нейтральной оси сечения, при колебаниях растяжение попадает в зону сжатия, а прочность бетона, как известно, в таком случае значительно меньше. Поэтому, если конструкция проектируется под динамическую нагрузку, необходимо скомпенсировать данный фактор путем постановки соответствующей рабочей арматуры в сжатой зоне.

В целом задачи динамики гораздо сложнее, чем расчеты на статическую нагрузку, и требуют от инженера-строителя более глубоких знаний в сфере проектирования и расчета конструкций.

5.2. Виды динамических нагрузок

Динамической называется любая нагрузка, меняющая во времени свою величину, направление или положение (рис. 5.1). Динамической является даже постоянная нагрузка, приложенная к конструкции внезапно, сразу полной величиной (см. рис. 5.1, а).

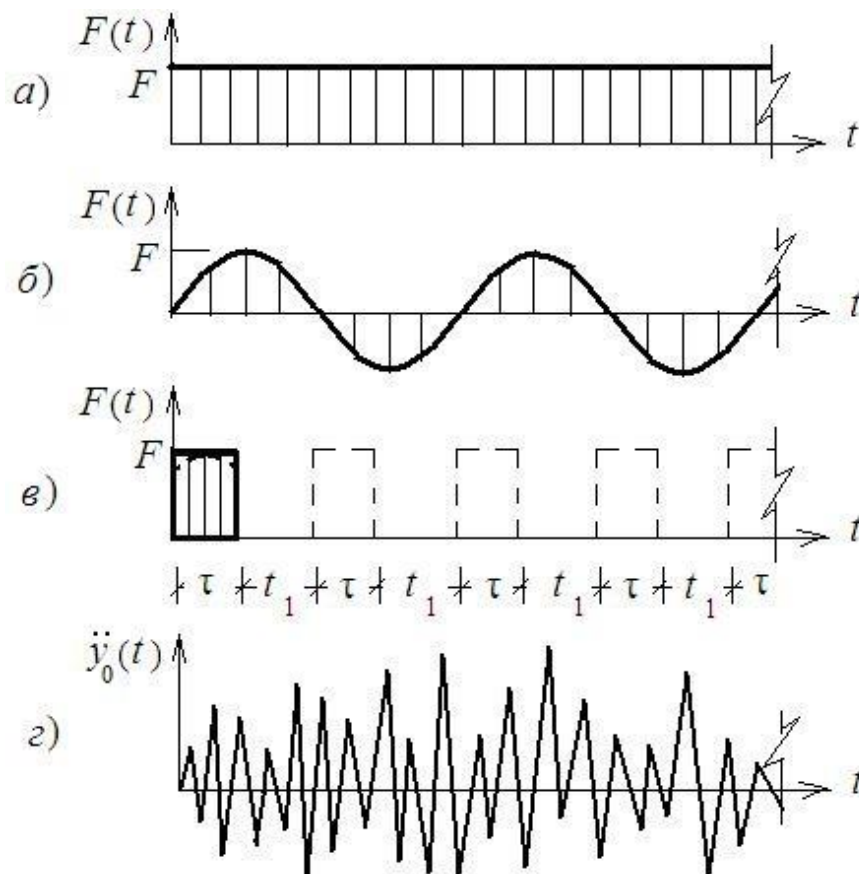


Рис. 5.1. Виды динамических воздействий

По своей природе динамические нагрузки весьма разнообразны. При расчете сооружений их разделяют на несколько видов.

Периодические неподвижные нагрузки характеризуются тем, что закон изменения их действия и величины во времени является периодическим, т. е. они многократно повторяются через определенные промежутки (периоды). Периодические колебания являются идеализацией колебательных процессов, протекающих в природе и технике. Достаточно внести малые флуктуации частоты, фазы или амплитуды, чтобы нарушить строгую периодичность процесса колебаний [2]. Тем не менее, эта идеализация позволяет получать весьма достоверные результаты.

К периодическим воздействиям относится вибрационная нагрузка, возникающая при работе машин и механизмов вследствие неуравновешенности их отдельных частей. Вибрационная нагрузка изменяется во времени по гармоническому закону синуса или косинуса (см. рис. 5.1, б), например,

$$F(t) = F \sin \theta t, \quad (5.1)$$

где F – амплитудное значение возмущающей силы;

θ – угловая частота изменения возмущающей силы.

К вертикальной составляющей вида (5.1) сводится, в частности, динамическое воздействие установленного в здании двигателя с неуравновешенным ротором, масса которого имеет относительно оси вращения эксцентриситет e . Во время вращения ротора возникает центробежная сила инерции [5]

$$J = m e p^2, \quad (5.2)$$

где m – масса ротора; p – угловая скорость.

Масса определяется по формуле

$$m = \frac{Q}{g}, \quad (5.3)$$

где Q – вес тела; g – ускорение свободного падения, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Вертикальная составляющая центробежной силы представляется выражением (5.1) $F(t) = J \sin t$.

Вибрационная нагрузка является наиболее опасной для строительных конструкций ввиду ее следующих особенностей:

- эффект ее действия зависит не только от величины (амплитудного значения), но и от периода – малая нагрузка с определенным периодом иногда приводит к разрушению конструкций, тогда как эффект от нагрузки с большей амплитудной величиной может оказаться близким к статическому воздействию;

- отсутствует локализация воздействия – наибольший эффект может проявиться не там, где его естественно ожидать (в непосредственной близости от места приложения нагрузки), а в удаленных местах и даже в другом сооружении, к которому нагрузка не приложена; такое своеобразное явление объясняется тем, что всякому реальному телу (включая грунт) свойственно совершать упругие колебания;

- при определенных периодах и амплитудах воздействия возможны вредное влияние на здоровье человека и нарушение безупречной работы точных приборов и механизмов.

Кратковременные нагрузки, как правило, оцениваются импульсами, т. е. произведением величины силы на время ее действия: $J = F\tau$ (см. рис. 5.1, в). Обычно они создаются различными взрывами, когда нагрузка мгновенно возрастает и так же быстро исчезает.

Ударная нагрузка достаточно разнообразна. При падении какого-либо тела на конструкцию ее можно описать диаграммой, показанной на рис. 5.1, а, с дополнением начальной скорости колебаний. При работе всевозможных копров, прессов, кузнечных молотов и других ударных механизмов нагрузку можно представить импульсами. Если череда ударов совершается с определенным периодом (см. штриховые линии на рис. 5.1, в), то ударную нагрузку можно считать периодической со всеми вытекающими последствиями. К ударным нагрузкам относится и пульсация ветра.

Подвижная нагрузка может быть как периодической, так и постоянной. Ее характерная особенность заключается в изменении места приложения во времени. Если этот процесс происходит медленно, без возбуждения сил инерции, то такие нагрузки можно считать статическими и определять их эффект с помощью линий влияния, построение которых изучается в курсах строительной механики. При больших скоростях нагрузка считается динамической. Рас-

чет на нее также может сводиться к построению линий влияния, но уже динамических.

Сейсмическое воздействие создается при землетрясении, вызывающем хаотичные колебания здания через основание. Расчет ответственных сооружений на сейсмическое воздействие выполняются по акселерограммам. Фрагмент акселерограммы изображен на рис. 5.1, г.

Все виды динамических нагрузок можно условно разделить на *массовые* и *безмассовые*. К безмассовым нагрузкам относятся давление ветра, взрывных волн и др. Часть массовых нагрузок можно приближенно считать безмассовыми, если их собственная масса существенно меньше массы, на которую они воздействуют.

5.3. Степени свободы системы

При решении задач о колебании конструкций, помимо исходных данных, необходимых для расчета на статическую нагрузку, требуются сведения о массе конструкции. Это объясняется тем, что при колебаниях появляются так называемые *даламберовы силы инерции*, введенные французским математиком и механиком Ж. Л. Даламбером (1717–1783). Они не являются физическими силами [7] и определяются как произведение массы на вектор абсолютного ускорения с обратным знаком

$$J = -m\ddot{y}(t), \quad (5.4)$$

где m – масса конструкции.

Трудоемкость решения задач динамики зависит от числа степеней свободы заданной системы.

Число степеней свободы – это количество независимых геометрических параметров, определяющих положение массы системы в любой момент времени.

Масса вычисляется через вес конструкции по формуле (5.3). Естественно, что вес конструкции, а равно и масса, непрерывно распределены по всей системе, т. е. в реальных системах масса является распределенной. Следовательно, для определения ее положения при колебаниях необходимо бесконечное число независимых геометрических параметров. В таких случаях говорят, что система имеет бесконечное число степеней свободы. Расчет подобных

систем относительно сложен. На практике часто достаточно учесть лишь несколько степеней свободы (или даже одну). С этой целью распределенная масса заменяется сосредоточенными массами по правилу рычага или с помощью иного приема.

Например, на рис. 5.2, *a* показана консольная балка с равномерно распределенной массой. Массу можно полностью поместить на конце балки (рис. 5.2, *б*) или, разделив балку на две равные части, приложить сосредоточенные массы в узлах (рис. 5.2, *в*). Разумеется, возможны и иные варианты распределения массы.

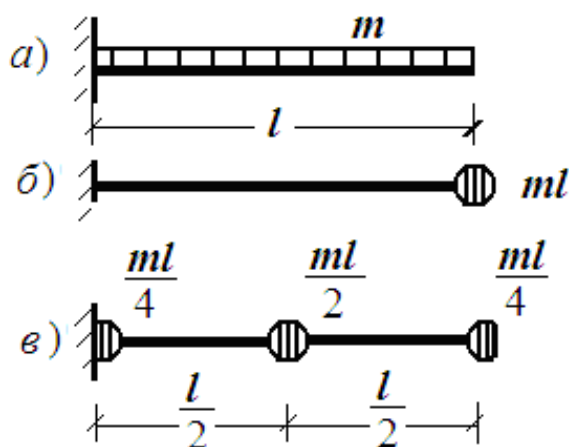


Рис. 5.2. Замена распределенной массы сосредоточенными массами

Положение одной массы в плоскости определяется тремя независимыми параметрами x , y , φ (рис. 5.3, *a*). Если пренебречь вращением массы, то останется два параметра – x и y , которые определяют положение массы вследствие продольных и изгибных деформаций стержней. Если пренебречь еще и продольными перемещениями, которые, как известно, значительно меньше перемещений за счет изгиба, то останется только параметр y , т. е. такая система будет иметь одну степень свободы (рис. 5.3, *в*).

Таким образом, число степеней свободы не является неизбежной характеристикой (как степень статической неопределимости), а зависит от желаемой точности расчета.

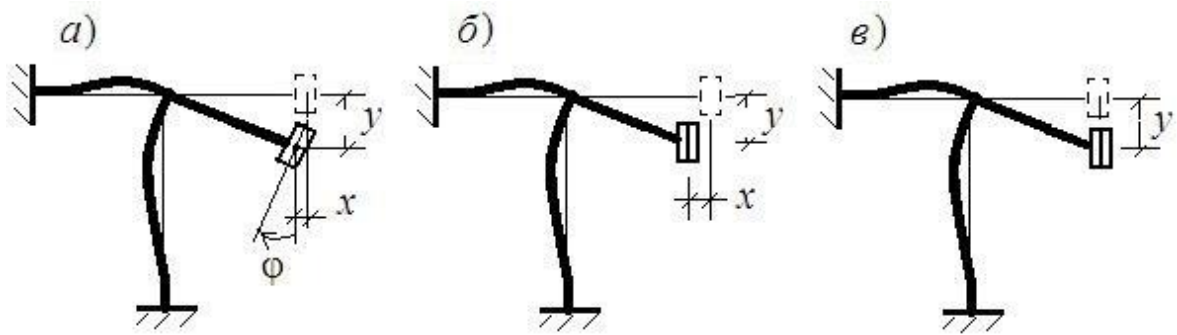


Рис. 5.3. Пренебрежение поворотом и продольными перемещениями массы

В дальнейшем в расчетах будем пренебрегать поворотом и продольным перемещением массы. При этом, как и в методе перемещений, не учитывается сближение концов стержня при изгибе, а дуга траектории движения массы из-за малости перемещений, как обычно, заменяется касательной к ней. Указанные допущения распространяются и на рассмотрение колебаний масс в пространстве. При определении числа степеней свободы не следует руководствоваться только количеством сосредоточенных масс, так как число степеней свободы и количество масс часто не совпадают.

5.4. Колебания упругих систем с одной степенью свободы

Изучение основ расчета строительных конструкций при динамическом воздействии целесообразно начать с простейшей системы, т. е. системы с одной степенью свободы. Такой подход облегчает понимание физического смысла рассматриваемого явления.

Примером системы с одной степенью свободы может служить консольная балка (см. рис. 5.2, б) или рама (см. рис. 5.3, в).

5.4.1. Свободные колебания без учета причин, вызывающих рассеяние энергии

Если любую из вышеуказанных упругих систем вывести из состояния равновесия (например, ударить по ней или оттянуть массу и внезапно отпустить), то за счет упругих свойств она будет совершать так называемые *свободные колебания* около положения статического равновесия.

Свободными называются колебания, совершаемые без поступления энергии извне (т. е. при отсутствии внешнего воздействия).

Рассмотрим невесомую балку, масса которой сосредоточена в середине и по концам (рис. 5.4, а). Крайние массы при поперечных колебаниях не будут смещаться, поэтому достаточно только одной связи, чтобы закрепить среднюю массу. Следовательно, данная система имеет одну степень свободы. Ее расчетная схема приведена на рис. 5.4, б.

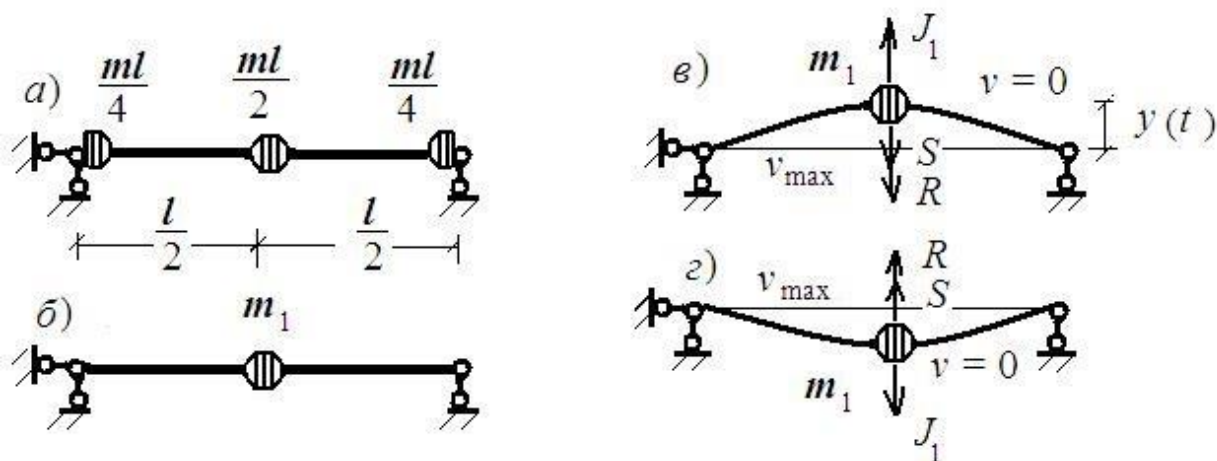


Рис. 5.4. Балка как система с одной степенью свободы

Построим математическую модель свободных колебаний системы. Эту задачу можно решить с помощью дифференциального уравнения второго рода, предложенного французским математиком Ж. Л. Лагранжем (1736–1813). Здесь же, исходя из физического смысла задачи, для получения уравнения движения сосредоточенной массы используем принцип Даламбера, в соответствии с которым, *если в любой момент времени к физическим силам, действующим на конструкцию, приложить все относящиеся к ней силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно применить все уравнения статики.* Это так называемый *метод кинестатики*.

При свободных колебаниях на массу, отклонившуюся от положения равновесия на величину $y(t)$, в любой момент времени будут действовать восстанавливающая сила S , сила неупругого сопротивления R и даламберова сила инерции J (рис. 5.4, в, г), приложенная к балке. Но поскольку масса балки сведена в середину пролета, условно можно считать, что сила инерции тоже приложена к сосредоточенной массе.

Восстанавливающая сила S – это сила упругого сопротивления, с которой балка действует на массу, стремясь вернуть ее в пер-

воначальное положение статического равновесия (см. рис. 5.4, в, з). В линейно деформируемой системе восстанавливающая сила прямо пропорциональна отклонению массы от положения равновесия $y(t)$ и определяется выражением

$$S = r_{11}y_1(t),$$

где r_{11} – коэффициент пропорциональности или коэффициент жесткости конструкции, определяемый ее упругими свойствами.

Коэффициентом жесткости называется сила, которая, будучи приложена к конструкции по направлению колебания массы, вызывает перемещение, равное единице.

Назначение индексов такое же, как и в методе перемещений. Жесткость, как известно, является обратной величиной по отношению к податливости, т. е.

$$r_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (5.5)$$

где δ_{11} – податливость, т.е. перемещение от единичной силы по направлению этой действия силы.

В первом приближении решим задачу без учета сил неупругого сопротивления R . В результате на массу при колебаниях будут действовать только две силы – S и J . Скорость колебаний массы будет максимальной при прохождении ее через положение равновесия и равной нулю – в крайних положениях (см. рис. 5.4, в, з). При переходе массы из положения равновесия в крайнее положение происходит замедление движения, т. е. ускорение, как и восстанавливающая сила, всегда будет направлено к положению недеформированного состояния. Даламберова же сила инерции, как следует из ее определения (5.4), всегда направлена в сторону, противоположную ускорению, т. е. от положения равновесия.

Если теперь выделить часть стержня с массой и составить уравнение равновесия (сумму проекций всех сил на ось, параллельную линии движения массы), то получим $S - J = 0$.

Подставим в это равенство значения сил

$$r_{11}y_1(t) + m_1\ddot{y}_1(t) = 0. \quad (5.6)$$

Чтобы найти выражение для прогиба, перенесем второй член вправо, разделим все на жесткость r_{11} и, учитывая (5.5), получим

$$y_1(t) = -\delta_{11}m_1\ddot{y}_1(t) = \delta_{11}J_1(t). \quad (5.7)$$

Разделим уравнение (5.6) на m_1 и введем обозначение

$$\omega_1^2 = \frac{r_{11}}{m_1} = \frac{1}{\delta_{11}m_1}. \quad (5.8)$$

В результате получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = 0. \quad (5.9)$$

Решение уравнения (2.9) будем искать в виде

$$y_1(t) = e^{kt}. \quad (5.10)$$

Подстановка (5.10) в (5.9) и сокращение величины e^{kt} приводят к характеристическому уравнению

$$k^2 + \omega_1^2 = 0,$$

корни которого равны, соответственно,

$$k_1 = \omega_1 \sqrt{-1} = i\omega_1 \text{ и } k_2 = -\omega_1 \sqrt{-1} = -i\omega_1.$$

Таким образом, решение уравнения (5.9) будет состоять из двух членов с двумя произвольными постоянными D_1 и D_2

$$y_1(t) = D_1 e^{i\omega_1 t} + D_2 e^{-i\omega_1 t}.$$

С помощью формулы швейцарского математика Л. Эйлера (1707–1783)

$$e^{\pm ia} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha \quad (5.11)$$

преобразуем решение к следующему виду

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= D_1(\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + D_2(\cos \omega_1 t - i \sin \omega_1 t) = \\
&= (D_1 + D_2) \cos \omega_1 t + (D_1 - D_2) i \sin \omega_1 t.
\end{aligned}$$

Введем новые обозначения для произвольных постоянных

$$D_1 + D_2 = A \text{ и } (D_1 - D_2)i = B.$$

В итоге будем иметь

$$y_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t. \quad (5.12)$$

Скорость колебаний массы m_1 определяется первой производной по времени от этого выражения

$$v_1(t) = \dot{y}_1(t) = -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_1 B \cos \omega_1 t. \quad (5.13)$$

Произвольные постоянные определим из начальных условий: пусть при $t = 0$ $y_1(t) = y_{10}$ и $v_1(t) = v_{10}$.

Подставим эти значения в выражения перемещения и скорости

$$y_{10} = A; v_{10} = \omega_1 B, \text{ откуда получим } B = \frac{v_{10}}{\omega_1}.$$

С найденными значениями постоянных окончательное выражение для перемещения будет иметь вид

$$y_1(t) = y_{10} \cos \omega_1 t + \frac{v_{10}}{\omega_1} \sin \omega_1 t. \quad (5.14)$$

Если принять, что в начальный момент времени при $t = 0$ $y_{10} = 0$, то выражение (5.14) станет короче

$$y_1(t) = \frac{v_{10}}{\omega_1} \sin \omega_1 t. \quad (5.15)$$

Из формулы (5.15) следует, что выведенная из состояния покоя масса будет совершать простые гармонические колебания относительно положения равновесия. График этой функции приведен на рис. 5.5. Видно, что наибольшее отклонение массы от положения равновесия равно постоянной величине $\frac{v_{10}}{\omega_1}$, которая называется *амплитудой*. Удвоенная амплитуда называется *размахом колебаний*.

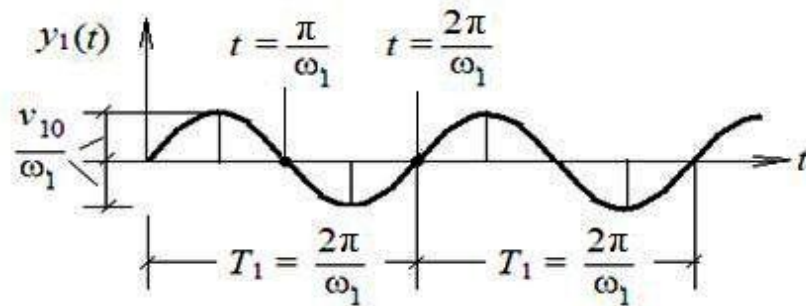


Рис. 5.5. График перемещений массы во времени при свободных колебаниях

Период колебаний – это время T_1 , за которое масса совершает полный цикл колебаний. Из графика видно, что

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (5.16)$$

Частотой колебаний называется число полных циклов колебаний в единицу времени.

Из (5.16) $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ рад/с, т. е. это число колебаний за 2π секунд.

Такая частота называется *угловой*. В системе с одной степенью свободы она определяется по формуле (5.8)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m_1}}. \quad (5.17)$$

Число колебаний в секунду измеряется в герцах (Гц). Через угловую частоту частота в герцах выражается следующим образом

$$\phi = \frac{\omega_1}{2\pi} \text{ 1/с.}$$

Угловая частота присутствует во всех уравнениях движения масс. В справочниках часто приводится частота в герцах, поэтому при их использовании следует быть внимательным.

В инженерной практике нередко применяется так называемая *техническая частота* – число оборотов или циклов колебаний в минуту. Ее также можно выразить через угловую частоту

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega_1. \quad (5.18)$$

Частота и период колебаний являются основными характеристиками при расчете конструкций на динамические воздействия.

Решение (5.12) можно представить в ином виде – через начальную фазу колебаний, если ввести новые произвольные постоянные

$$A = A_1 \sin \nu_1; \quad B = A_1 \cos \nu_1.$$

В результате получим

$$y_1(t) = -A_1(\sin \nu_1 \cos \omega_1 t + \cos \nu_1 \sin \omega_1 t).$$

Это выражение можно представить в виде синуса суммы двух углов

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \nu_1). \quad (5.19)$$

где A_1 – амплитуда колебаний; ν_1 – начальная фаза колебаний.

Для наглядной иллюстрации гармонических колебаний можно использовать круговую диаграмму (рис. 5.6) [2]. Введем на плоскости вектор длиной A_1 , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_1 (отсюда и происходит термин «угловая частота»). Начальное положение вектора задано углом ν_1 . Проектируя вектор на вертикальную ось, получим закон движения в форме (5.19). Значения A_1 и ν_1 можно выразить через A и B следующим образом

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1 \sin v_1}{A_1 \cos v_1} = \operatorname{tg} v_1, \text{ откуда } v_1 = \operatorname{arctg} \frac{A}{B};$$

$$A^2 + B^2 = A_1^2 \sin^2 v_1 + A_1^2 \cos^2 v_1 = A_1^2 (\sin^2 v_1 + \cos^2 v_1) = A_1^2;$$

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}; \text{ при } A = y_{10} = 0 \text{ по-прежнему } A_1 = \frac{v_{10}}{\omega_1}.$$

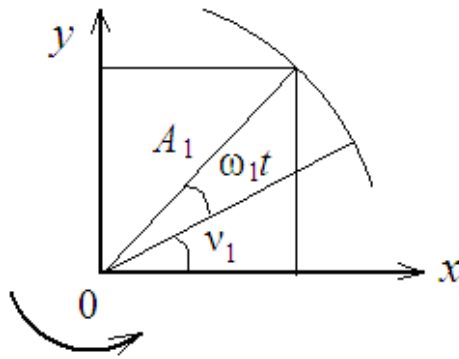


Рис. 5.6. Круговая диаграмма простых гармонических колебаний

5.4.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки

Вынужденные колебания вызываются переменными внешними воздействиями.

Наиболее часто в инженерной практике приходится иметь дело с гармоническим воздействием (5.1) (см. рис. 5.1, б). В выражении (5.1) представлена обобщенная сила, вместо которой могут быть вибрационный момент, распределенная нагрузка или их комбинации. При действии нескольких сил для упрощения решения задачи предполагают, что все они имеют один закон изменения во времени (начинают действовать одновременно и с одинаковой частотой θ) и отличаются лишь амплитудами. Если на практике это условие не выполняется, то для каждого воздействия производят свой расчет, а затем, на основании принципа независимости действия сил, суммируют результаты для определенных моментов времени.

Для решения задачи динамического расчета при действии вибрационной нагрузки опять выделим часть стержня с массой и,

на основании принципа Даламбера, составим уравнение суммы проекций всех сил на направление перемещения массы

$$\sum Y = S + R - J = 0. \quad (5.20)$$

К части стержня с сосредоточенной массой (см. рис. 5.4, в, з) дополнительно приложим возмущающую силу, направленную в противоположную сторону от положения равновесия. В итоге в уравнении (5.20) появится дополнительный член

$$S + R - J - F \sin \theta t = 0.$$

Подставим сюда значения сил и перенесем член, представляющий нагрузку, как известную величину, в правую часть

$$m_1 y_1(t) + \beta Y_1(t) + r_{11} y_1(t) = F \sin \theta t. \quad (5.21)$$

Разделим все члены уравнения на m_1 и введем принятые ранее обозначения

$$y_1(t) + 2\alpha_1 y_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = \frac{F}{m_1} \sin \theta t. \quad (5.22)$$

В итоге получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. При его решении ограничимся рассмотрением случая малых сопротивлений, когда $\alpha_1 < \omega_1$.

Полное решение (5.22) состоит из решения однородного уравнения и частного решения, учитывающего вид нагрузки. Решение однородного уравнения представлено выражением

$$y_1(t) = e^{-\alpha_1 t} (A \cos \omega_\alpha t + B \sin \omega_\alpha t), \quad (5.23)$$

где ω_α заменим на ω_1 .

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$y_F(t) = C \cos \theta t + D \sin \theta t, \quad (5.24)$$

откуда

$$y_F(t) = \theta(-C \sin \theta t + D \cos \theta t); y_F = -\theta^2(C \cos \theta t + D \sin \theta t).$$

Подставим эти значения в уравнение (5.22) и сгруппируем его члены при $\sin \theta t$ и $\cos \theta t$. В итоге получим

$$\begin{aligned} & \cos \theta t(-\theta^2 C + 2\alpha_1 \theta D + \omega_1^2 C) + \\ & + \sin \theta t(-\theta^2 D - 2\alpha_1 \theta C + \omega_1^2 D - \frac{F}{m_1}) = 0. \end{aligned}$$

Для удовлетворения этого уравнения при любых значениях t необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю коэффициенты при $\cos \theta t$ и $\sin \theta t$. В результате получаем два уравнения с двумя неизвестными C и D

$$\begin{aligned} & (\omega_1^2 - \theta^2)C + 2\alpha_1 \theta D = 0; \\ & -2\alpha_1 \theta C + (\omega_1^2 - \theta^2)D = \frac{F}{m_1}. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$C = -\frac{2\alpha_1 \theta F}{m_1 \gamma^2}; D = \frac{F(\omega_1^2 - \theta^2)}{m_1 \gamma^2},$$

где

$$\gamma^2 = (\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha_1^2 \theta^2. \quad (5.25)$$

Итак, полное решение уравнения (2.22) примет вид

$$\begin{aligned} & y_1(t) = e^{-\alpha_1 t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \\ & + \frac{F}{m_1 \gamma^2} [-2\alpha_1 \theta \cos \theta t + (\omega_1^2 - \theta^2) \sin \theta t]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Уравнение (5.26) показывает, что движение массы в рассматриваемом случае состоит из свободных затухающих колебаний с частотой ω_1 , которые зависят от начальных условий, и вынужденных колебаний, совершаемых с частотой возмущающей силы θ . Свободные колебания при этом затухают относительно быстро.

Период времени, в течение которого совместно происходят вынужденные и затухающие колебания, называется *переходным*. Далее будут иметь место установившиеся вынужденные колебания массы с частотой возмущающей силы.

Для упрощения вначале рассмотрим установившиеся колебания без учета диссипативных сил, т. е. возьмем решение (5.26) при $A = B = \alpha_1 = 0$:

$$y_1(t) = \frac{F \sin \theta t}{m_1(\omega_1^2 - \theta^2)} = \frac{F \sin \theta t}{m_1 \omega_1^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)}. \quad (5.27)$$

Учитывая (5.2), заменим ω_1^2 и введем обозначение $y_{ст} = F\delta_{11}$ – статическое перемещение массы от амплитудного значения возмущающей силы. В результате получим

$$y_1(t) = y_{ст} \frac{\sin \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}.$$

Отношение значений какой-либо величины (в том числе перемещения), полученных при динамическом и статическом расчете, называется *динамическим коэффициентом*, т. е.

$$\mu(t) = \frac{y_1(t)}{y_{ст}} = \frac{\sin \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}.$$

Максимальное значение динамический коэффициент будет иметь при $\sin \theta t = 1$

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}}. \quad (5.28)$$

Динамический коэффициент играет важную роль в расчете систем с одной степенью свободы, когда возмущающая вибрационная сила приложена по направлению перемещения массы. При этом максимальные перемещения и усилия определяются выражениями

$$y_{\max} = \mu y_{\text{ст}}; M_{\max} = \mu M_{\text{ст}}. \quad (5.29)$$

Как видно из (5.28), динамический коэффициент зависит от соотношения частот вынужденных и собственных колебаний (рис. 5.7).

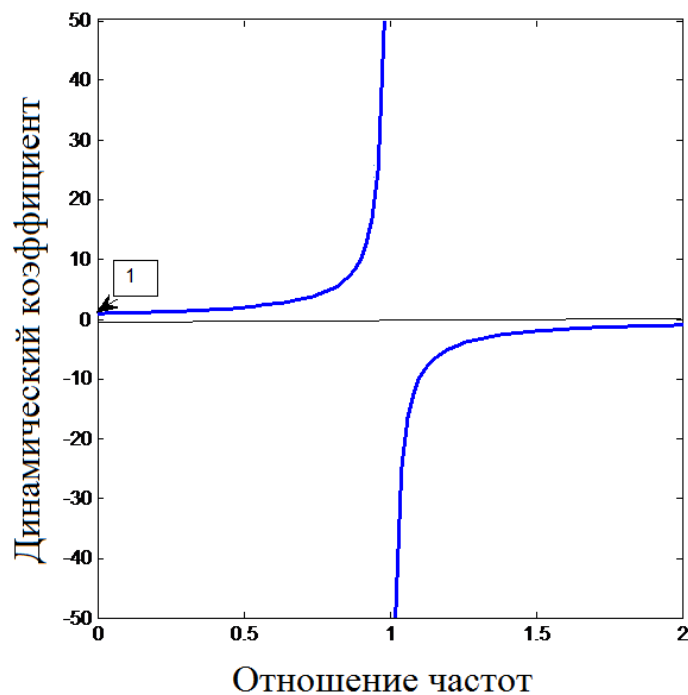


Рис. 5.7. График изменения динамического коэффициента

Из рис. 5.7 следует, что при $\theta < \omega_1$ минимальное значение μ равно единице. При возрастании θ коэффициент μ увеличивается, но колебания происходят в той же фазе (направления силы и перемещений совпадают). Однако, когда значения частот вынужденных и свободных колебаний сближаются, динамический коэффициент

резко возрастает, и при $\theta = \omega_1$ $\mu \rightarrow \infty$. Явление совпадения частот вынужденных и собственных колебаний называется *резонансом*.

Резонанс исключительно опасен для строительных конструкций, поскольку при нем резко увеличиваются перемещения и усилия. В связи с этим при практических расчетах из-за неточности вычислений частот вводится не просто резонансная частота $\theta = \omega_1$, а зона резонансной частоты

$$(1 - \varepsilon)\theta \leq \omega_p \leq (1 + \varepsilon)\theta,$$

где ε принимается от 0,15 до 0,35 в зависимости от класса ответственности сооружения.

При $\theta > \omega_1$ динамический коэффициент уже будет иметь вид

$$\mu = -\frac{\sin \theta t}{\frac{\theta^2}{\omega_1^2} - 1} = \frac{\sin(\theta t + \pi)}{\frac{\theta^2}{\omega_1^2} - 1}.$$

То есть при резонансе происходит сдвиг по фазе на величину π (направления силы и перемещений будут противоположными), причем при $\theta = \omega_1$ сдвиг по фазе равен $0,5\pi$. Когда частота возмущающей силы значительно превосходит ω_1 , динамический коэффициент стремится к нулю.

Следует отметить, что представленная теория не отражает реального поведения конструкций, так как на практике резонанс, если и приводит к разрушению сооружений, то только с течением времени, а не мгновенно.

Инженерная практика также показывает, что неограниченного возрастания амплитуды во времени не бывает, так как этому препятствуют диссипативные силы, которые в вышеизложенном решении не учитывались.

На рис. 5.8 показан график зависимости динамического коэффициента от соотношения частот вынужденных и свободных колебаний при различных значениях относительного коэффициента, учитывающего неупругое сопротивление $\alpha_{от} = \frac{\alpha_1}{\omega_1}$.

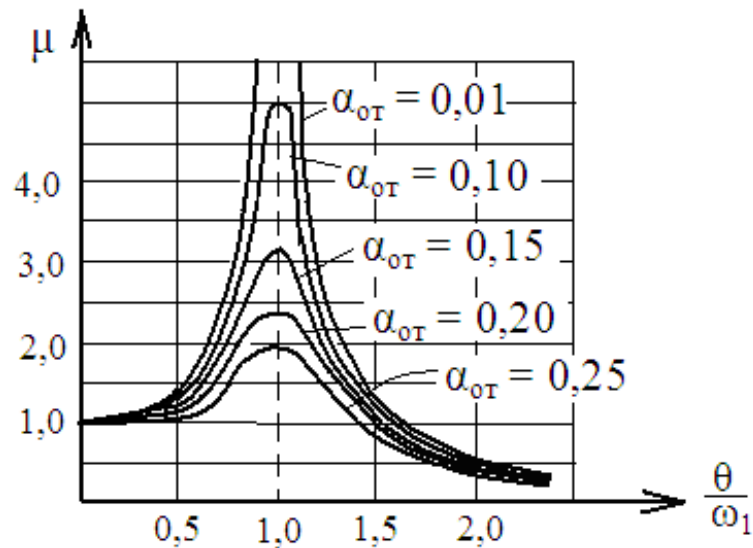


Рис. 5.8. График изменения динамического коэффициента при учете диссипативных сил

Как следует из анализа этого графика, диссипативные силы значительно влияют на динамические перемещения и усилия конструкции в зоне резонанса. Но так как проектирование строительных конструкций при установившихся колебаниях не допускает резонанса, то в первом приближении динамический расчет можно проводить без учета сил неупругого сопротивления (что и предлагается в [8]) при отличии частоты вынужденных колебаний на 10 % от ближайшей частоты свободных колебаний.

5.5. Колебания систем с несколькими степенями свободы

5.5.1. Свободные колебания

Рассмотрим балку, распределенную массу которой сосредоточим в n сечениях m_1, m_2, \dots, m_n (рис. 5.9).

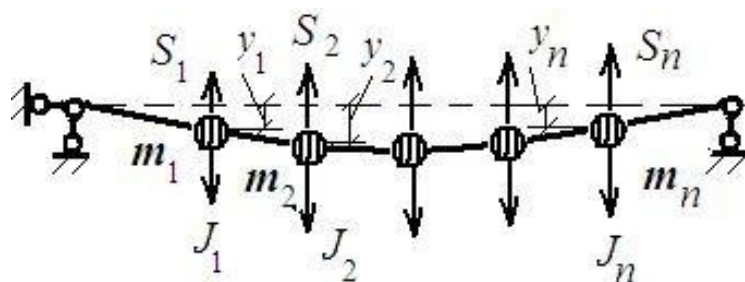


Рис. 5.9. Система с несколькими степенями свободы

$$\begin{aligned}
y_{1j}(t) &= a_{1j} \sin(\omega_j t + v_j), \\
y_{2j}(t) &= a_{2j} \sin(\omega_j t + v_j), \\
&\dots\dots\dots \\
y_{nj}(t) &= a_{nj} \sin(\omega_j t + v_j).
\end{aligned}
\tag{5.32}$$

Вторые производные по времени от этих выражений примут следующий вид

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_{1j}(t) &= -\omega_j^2 a_{1j} \sin(\omega_j t + v_j), \\
\ddot{y}_{2j}(t) &= -\omega_j^2 a_{2j} \sin(\omega_j t + v_j), \\
&\dots\dots\dots \\
\ddot{y}_{nj}(t) &= -\omega_j^2 a_{nj} \sin(\omega_j t + v_j).
\end{aligned}
\tag{5.33}$$

Подставим значения (5.32) и (5.33) в систему уравнений (5.31) и приведем подобные члены. Каждый член имеет общий множитель $\sin(\omega_j t + v_j)$. Поскольку решение справедливо для любого момента времени, то возьмем момент, когда $\sin(\omega_j t + v_j) = 1$.

В результате придем к однородной системе алгебраических уравнений относительно амплитуд a_{kj} ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned}
(\delta_{11} m_1 \omega_j^2 - 1) a_{1j} + \delta_{12} m_2 \omega_j^2 a_{2j} + \dots + \delta_{1n} m_n \omega_j^2 a_{nj} &= 0; \\
\delta_{21} m_1 \omega_j^2 a_{1j} + (\delta_{22} m_2 \omega_j^2 - 1) a_{2j} + \dots + \delta_{2n} m_n \omega_j^2 a_{nj} &= 0; \\
&\dots \\
\delta_{n1} m_1 \omega_j^2 a_{1j} + \delta_{n2} m_2 \omega_j^2 a_{2j} + \dots + (\delta_{nn} m_n \omega_j^2 - 1) a_{nj} &= 0.
\end{aligned}$$

Для упрощения записи разделим все уравнения на ω_j^2 и введем обозначение

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega_j^2}.
\tag{5.34}$$

Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
&(\delta_{11}m_1 - \lambda_j)a_{1j} + \delta_{12}m_2a_{2j} + \dots + \delta_{1n}m_na_{nj} = 0; \\
&\delta_{21}m_1a_{1j} + (\delta_{22}m_2 - \lambda_j)a_{2j} + \dots + \delta_{2n}m_na_{nj} = 0; \\
&\dots \\
&\delta_{n1}m_1a_{1j} + \delta_{n2}m_2a_{2j} + \dots + (\delta_{nn}m_n - \lambda_j)a_{nj} = 0.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Для двух степеней свободы ($n = 2$) эти уравнения выглядят так

$$\begin{aligned}
&(\delta_{11}m_1 - \lambda_j)a_{11} + \delta_{12}m_2a_{21} = 0, \\
&\delta_{21}m_1a_{12} + (\delta_{22}m_2 - \lambda_j)a_{22} = 0.
\end{aligned}$$

где a_{11} - амплитуда по направлению m_1 от J_1 ;
 a_{12} - амплитуда по направлению m_1 от J_2 ;
 a_{21} - амплитуда по направлению m_2 от J_1 ;
 a_{22} - амплитуда по направлению m_2 от J_2 .

Известно, что однородные уравнения без свободных членов имеют два решения. Одно из них тривиальное, когда все амплитуды $a_{kj} = 0$. Но оно не представляет интереса, так как в этом случае колебания отсутствуют. Отличные от нуля значения амплитуд возможны, если определитель из коэффициентов при a_{kj} равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix}
(\delta_{11}m_1 - \lambda_j) & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\
\delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda_j) & \dots & \delta_{2n}m_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & (\delta_{nn}m_n - \lambda_j)
\end{vmatrix} = 0, \tag{5.36}$$

или, в матричной форме:

$$|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}| = 0, \tag{5.37}$$

где \mathbf{E} – единичная матрица [9].

Полученный определитель называется *характеристическим уравнением матрицы коэффициентов \mathbf{A}* .

Раскрыв определитель (5.37), получим уравнение степени n относительно λ_j . Решая его, найдем n значений λ_j и, соответственно, n значений частот свободных колебаний из соотношения (5.34)

$$\omega_j = \sqrt{\frac{1}{\lambda_j}}. \quad (5.38)$$

При решении (5.38) учитываются только положительные значения квадратного корня. Некоторые из них могут оказаться одинаковыми. Одинаковые частоты называются *кратными*. Совокупность всех угловых частот называют *спектром частот рассматриваемой системы*, а наименьшую частоту из этого спектра – *частотой основного тона*.

Решение уравнения (5.36) сравнительно легко получить лишь для $n \leq 3$. Для уравнений более высокого порядка рекомендуется использовать какой-либо вычислительный пакет, например MATLAB. Для $n = 2$ уравнение выглядит так

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_j) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda_j) \end{vmatrix} = 0.$$

Или, раскрыв определитель $(\delta_{11}m_1 - \lambda_j) \cdot (\delta_{22}m_2 - \lambda_j) - \delta_{12}m_2 \cdot \delta_{21}m_1 = 0$.

5.5.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки с постоянной частотой

Рассмотрим расчет систем с несколькими степенями свободы при установившихся колебаниях, т. е. изучим стационарный процесс, наступающий после затухания собственных колебаний. Вид вибрационной нагрузки примем таким же, как и в разд. 5.4.2, с теми же ограничениями. Однако в данном случае допустим, что обобщенная вибрационная нагрузка может быть приложена к конструкции в любом месте и не обязательно непосредственно к массе. По-прежнему не будем учитывать диссипативные силы.

В отличие от задач статики при динамическом воздействии все перемещения и усилия в конструкции будут функциями не только внешней нагрузки, но и даламберовых сил инерции, возникающих при колебаниях. Поэтому, если определить силы инерции,

то любое усилие S в каком-либо сечении k для определенного момента времени можно найти исходя из линейности задачи

$$S_k = S_{k1}J_1 + S_{k2}J_2 + \dots + S_{kn}J_n + S_{kF}, \quad (5.39)$$

где S_{kj} ($j = 1, 2, \dots, n$) – усилия в заданной системе от единичных сил, приложенных по направлению действия сил инерции; S_{kF} – усилие в заданной системе от внешней нагрузки.

Если заданная стержневая система статически неопределима, то для определения усилий в заданной системе необходимо выполнить ее статический расчет любым известным методом. Итак, чтобы решить динамическую задачу, нужно вычислить силы инерции.

Рассмотрим произвольную систему с n степенями свободы и составим для ее масс выражения перемещений типа (5.30). Но в данном случае к правой части выражений добавим обобщенные перемещения от заданной обобщенной вибрационной нагрузки

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \delta_{11}J_1(t) + \delta_{12}J_2(t) + \dots + \delta_{1n}J_n(t) + \Delta_{1F} \sin \theta t; \\ y_2(t) &= \delta_{21}J_1(t) + \delta_{22}J_2(t) + \dots + \delta_{2n}J_n(t) + \Delta_{2F} \sin \theta t; \quad (5.40) \\ &\dots \\ y_n(t) &= \delta_{n1}J_1(t) + \delta_{n2}J_2(t) + \dots + \delta_{nn}J_n(t) + \Delta_{nF} \sin \theta t. \end{aligned}$$

Значение коэффициентов податливости δ_{jk} то же, что и ранее.

При установившихся колебаниях все перемещения и внутренние усилия будут следовать закону изменения возмущающей силы, т. е.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a_1 \sin \theta t; \\ y_2(t) &= a_2 \sin \theta t; \\ &\dots \\ y_n(t) &= a_n \sin \theta t, \end{aligned}$$

где a_j – амплитуды вынужденных колебаний масс.

Ускорения масс равны вторым производным по времени

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1j}(t) &= -\omega_j^2 a_{1j} \sin(\omega_j t + v_j), \\ \ddot{y}_{2j}(t) &= -\omega_j^2 a_{2j} \sin(\omega_j t + v_j), \\ &\dots \\ \ddot{y}_{nj}(t) &= -\omega_j^2 a_{nj} \sin(\omega_j t + v_j). \end{aligned}$$

а силы инерции, по определению (5.4), описываются выражениями

$$J_1(t) = -m_1 y_1(t) = m_1 \theta^2 y_1(t);$$

$$J_2(t) = -m_2 y_2(t) = m_2 \theta^2 y_2(t); \quad (5.41)$$

...

$$J_n(t) = -m_n y_n(t) = m_n \theta^2 y_n(t).$$

Используя (5.41), выразим перемещения через силы инерции:

$$y_j(t) = \frac{J_j(t)}{m_j \theta^2}. \quad (5.42)$$

Заменяем выражениями типа (5.42) перемещения в (5.40). В итоге в (5.40) неизвестными останутся только силы инерции. Перенесем в (5.40) все члены влево и приведем подобные члены. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых сил инерции

$$\left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right) J_1(t) + \delta_{12} J_2(t) + \dots + \delta_{1n} J_n(t) + \Delta_{1F} \sin \theta t = 0;$$

$$\delta_{21} J_1(t) + \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) J_2(t) + \dots + \delta_{2n} J_n(t) + \Delta_{2F} \sin \theta t = 0; \quad (5.43)$$

...

$$\delta_{n1} J_1(t) + \delta_{n2} J_2(t) + \dots + \left(\delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right) J_n(t) + \Delta_{nF} \sin \theta t = 0.$$

Далее введем обозначение

$$\delta_{jj}^* = \delta_{jj} - \frac{1}{m_j \theta^2}. \quad (5.44)$$

Поскольку все силы изменяются во времени по одному и тому же закону, зависимость между ними справедлива в любой момент. Этот факт позволяет принять для вычислений тот момент времени, когда $\sin \theta t = 1$, и из уравнений (5.43) определять не переменные силы инерции $J_j(t)$, а их максимальные значения, т. е. амплитуды J_j .

Перепишем уравнения (5.43) с учетом обозначения (5.44):

$$\begin{aligned} \delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \dots + \delta_{1n} J_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \dots + \delta_{2n} J_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ &\dots \\ \delta_{n1} J_1 + \delta_{n2} J_2 + \dots + \delta_{nn}^* J_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Решение системы алгебраических уравнений (5.45) позволяет определить максимальные (амплитудные) значения сил инерции и через них уже найти любое перемещение или усилие в расчетной схеме, используя зависимость (5.39).

Уравнения (5.45) внешне напоминают канонические уравнения метода сил, но по содержанию существенно отличаются от них. Во-первых, все коэффициенты и свободные члены определяются не в основной, а в заданной системе. Во-вторых, главный коэффициент определяется выражением (5.44), из которого следует, что он может быть не только положительным, но и отрицательным, и, что еще более существенно, равным нулю.

Для раскрытия возможных последствий этого факта представим решение уравнений (5.45) с использованием правила швейцарского математика Г. Крамера (1704–1752):

$$J_j = \frac{-|D_j|}{|D|},$$

где $|D|$ – определитель системы уравнений (5.45), состоящий из коэффициентов при неизвестных силах инерции.

Запишем его с учетом (5.44) в виде

$$|D| = \begin{vmatrix} \left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right) & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \left(\delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right) \end{vmatrix}$$

и вынесем за знак определителя из каждого столбца множитель $\frac{1}{m_j}$.

$$|D| = \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n} \begin{vmatrix} \left(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\theta^2} \right) & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & \left(\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\theta^2} \right) & \dots & \delta_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_2 & \dots & \left(\delta_{nn} m_n - \frac{1}{\theta^2} \right) \end{vmatrix}.$$

Если в этом определителе заменить θ любым значением частоты свободных колебаний ω_j и учесть обозначение (5.34), то получим характеристическое уравнение (5.36). Как известно, оно равно нулю. Следовательно, при совпадении частоты возмущающей силы с любой из частот свободных колебаний определитель $|D|$ будет равен нулю. По правилу Крамера видно, что в таком случае силы инерции будут стремиться к бесконечности. Это показывает, что в системах с несколькими степенями свободы резонанс будет иметь место при совпадении частоты возмущающей силы с любой из частот свободных колебаний.

Выявленное обстоятельство следует учитывать при проектировании конструкций, определяя не только одну низшую частоту свободных колебаний, но и последующие частоты, которые затем

необходимо сравнивать с возможными частотами возмущающих сил (прежде всего, для стационарного процесса).

Нужно иметь в виду, что приведенное решение получено без учета диссипативных сил. Их учет, как и в случае систем с одной степенью свободы, дает при $\theta = \omega_j$ конечные значения усилий и перемещений, но они будут относительно большими и недопустимыми по нормам проектирования (если вообще не приведут к разрушению конструкции).

5.6. Использование симметрии конструкции при решении задач динамики

Определение частот свободных колебаний представляет собой довольно трудоемкую задачу, поэтому при ее решении следует пользоваться возможными упрощениями. Заметно облегчает работу расчет симметричных систем. Прежде всего, уточним понятие симметричной системы при решении задач динамики.

Система является симметричной, если она имеет симметричную геометрическую схему, одинаковые жесткости в симметрично расположенных сечениях и элементах и симметричное расположение масс.

Упрощение вычислений достигается за счет разделения характеристического уравнения (5.36) при одной оси симметрии на два уравнения меньшего порядка. При этом сумма их порядков остается равной порядку исходного уравнения. Разделить (5.36) можно с помощью двух подходов:

- 1) путем использования групповых перемещений;
- 2) разделением системы по оси симметрии на две половины.

Для сокращения трудоемкости динамического расчета симметричных систем рекомендуется, как и при статическом расчете, использовать либо группировку неизвестных сил инерции, либо разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную. При разложении нагрузки рассматривается по половине системы с соответствующими граничными условиями, а затем результаты суммируются.

Для симметричных систем при динамическом расчете справедливы следующие положения:

- при действии симметричной вибрационной нагрузки все кососимметричные неизвестные силы инерции равны нулю, и наоборот;

- при симметричной (кососимметричной) нагрузке резонанс в системе будет иметь место только тогда, когда частота вибрационной нагрузки совпадает с частотами свободных колебаний, которым соответствуют симметричные (кососимметричные) формы колебаний (при этом следует помнить об идеализации периодических колебаний).

При первом подходе к разделению выражения (5.36) число групповых перемещений равняется числу степеней свободы, но эпюры от групповых единичных сил получаются либо симметричными, либо кососимметричными. В результате при определении перемещений некоторые побочные коэффициенты оказываются равными нулю, что и приводит к разделению матрицы \mathbf{A} на две

$$|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}| = \left| \begin{array}{cc} \mathbf{A}_c - \lambda_{cj} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{kc} - \lambda_{kcj} \mathbf{E} \end{array} \right| = |\mathbf{A}_c - \lambda_{cj} \mathbf{E}| \cdot |\mathbf{A}_{kc} - \lambda_{kcj} \mathbf{E}| = 0,$$

или

$$|\mathbf{A}_c - \lambda_j \mathbf{E}| = 0 \text{ и } |\mathbf{A}_{kc} - \lambda_j \mathbf{E}| = 0.$$

Во втором подходе сразу рассматривается только половина системы. При этом нужно быть внимательным, назначая граничные условия в месте разделения системы на оси симметрии.

Рассмотрим, например, симметричную систему на рис. 5.10, *a*, где $m_3 = m_1$; $EI = \text{const}$. В целом для этой системы $n = 3$.

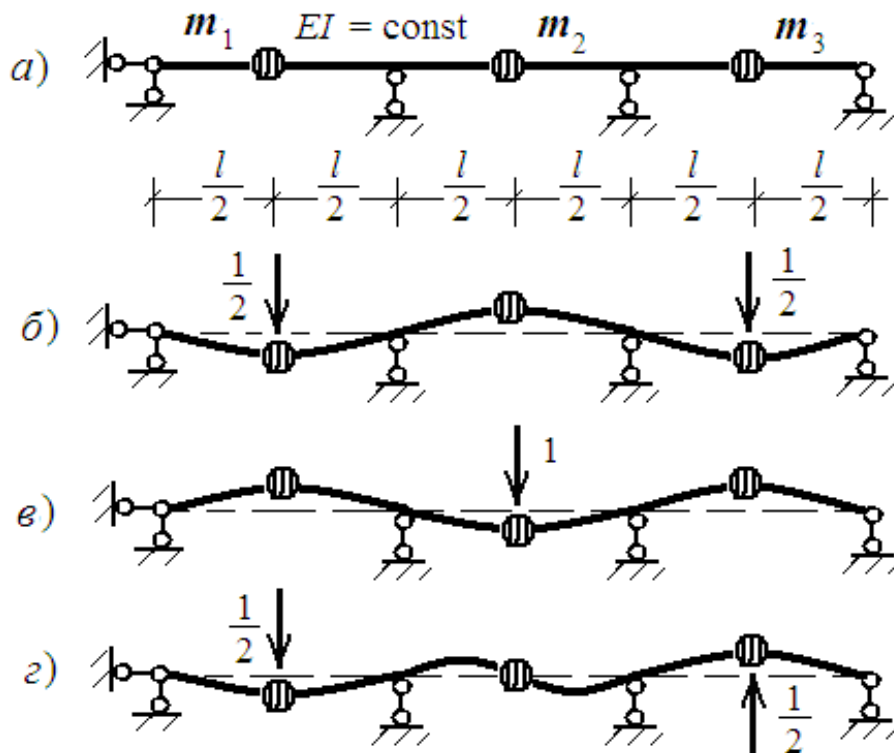


Рис. 5.10. Разложение колебаний симметричной системы

На рис. 5.10, б, в изображены симметричные формы колебаний, а на рис. 5.10, г – кососимметричная форма. На рис. 5.10, б, г также обозначены групповые единичные силы. Показанные формы колебаний позволяют назначить граничные условия на оси симметрии для половины системы.

На рис. 5.11, а представлены граничные условия для симметричных колебаний. На оси симметрии отсутствует поворот, но имеется вертикальное смещение. Следовательно, $n_c = 2$.

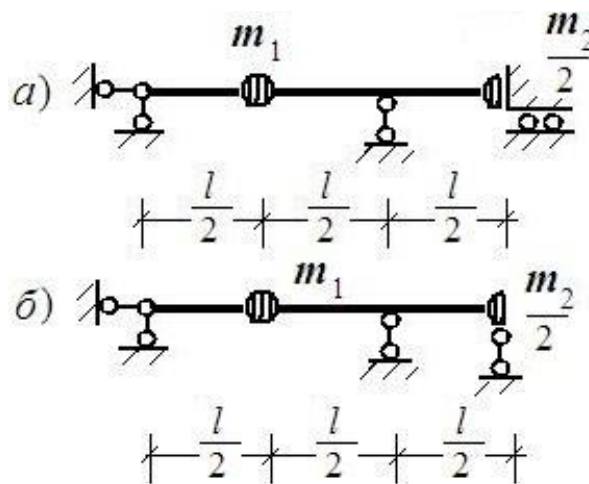


Рис. 5.11. Граничные условия для половины симметричной системы

На рис. 5.11, б показаны граничные условия для кососимметричных колебаний. На оси симметрии имеется поворот, но отсутствует линейное смещение, т. е. $n_{\text{кс}} = 1$, $n = n_{\text{с}} + n_{\text{кс}} = 2 + 1 = 3$. Но вместо одного определителя третьего порядка составляются два определителя – первого и второго порядка, вычисление которых существенно легче

$$|\delta_{33}m_3 - \lambda_j^{\text{кс}}| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_j^{\text{с}}) & \delta_{12} \frac{m_2}{2} \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22} \frac{m_2}{2} - \lambda_j^{\text{с}}) \end{vmatrix} = 0.$$

5.7. Контрольные вопросы

1. Какая нагрузка называется динамической?
2. Чем определяется число степеней свободы?
3. Всегда ли совпадают число сосредоточенных масс и степеней свободы?
4. Каковы особенности вибрационной нагрузки?
5. Какие силы действуют на массу при колебании?
6. Какой принцип рассматривается при решении задач динамики и как он формулируется?
7. Что такое частота свободных колебаний? От каких характеристик конструкций она зависит?
8. Какова взаимосвязь между частотой и периодом свободных колебаний?
9. Какая формула Эйлера используется при решении дифференциального уравнения колебаний?
10. По какому закону изменяется во времени перемещение массы при свободном колебании?
11. Какие колебания называются свободными?
12. Какова зависимость между угловой частотой и частотой в герцах?
13. По каким причинам затухают свободные колебания?
14. Что такое динамический коэффициент?

15. Какое явление имеет место при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний?

16. Для чего в конструкции вводится несколько степеней свободы?

17. Из каких уравнений определяются частоты свободных колебаний в системе с несколькими степенями свободы?

18. Каковы главные формы колебаний и в чем состоит их основное свойство?

19. Можно ли построить формы колебаний конструкции, используя однородные уравнения? Если да, то каким образом?

20. Каково определение симметричной системы при динамическом расчете?

21. Как упростить определение частот свободных колебаний в симметричных расчетных схемах?

22. В какой системе определяются коэффициенты и свободные члены при расчете на динамическую нагрузку?

23. Чем отличаются динамические уравнения от обычных уравнений метода сил?

5.8. Контрольная работа № 5.

Динамический расчет плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки

Задание. Определить угловую частоту свободных колебаний. Построить динамическую эпюру изгибающих моментов и формы свободных колебаний сосредоточенных масс.

Исходные данные определяются из табл. 5.1 и схем, приведенных на рис. 5.12.

Последовательность расчета

1. Начертить расчетную схему рамы в масштабе длин. Указать величины масс и жесткости стержней.
2. Вычислить степень статической неопределимости рамы.
3. Определить число степеней свободы массы заданной системы и величины сосредоточенных масс.
4. Записать уравнение частот свободных колебаний в общем виде.
5. Построить эпюры M_i ($i = 1, 2, \dots$) от последовательного приложения единичных безразмерных сил по направлению колебаний сосредоточенных масс.
6. Определить коэффициенты уравнения частот по формуле

$$\delta_{ii} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_i}{EI} dx.$$

7. Определить корни частотного уравнения λ_i ($i = 1, 2, \dots$) и проверить правильность решения, используя выражения

$$S_p(D) = \sum \lambda_i; |D| = \Pi \cdot \lambda_i,$$

где $S_p(D)$ – след матрицы (сумма коэффициентов), составленной из коэффициентов частотного уравнения; $|D|$ – величина определителя этой матрицы.

Таблица 5.1

Исходные данные для контрольной работы № 5

Первая цифра шифра	m_1 , т	l , м	h_1 , м	Вторая цифра шифра	$F_1(t)$, кН	$F_2(t)$, кН	m_2 , т	Третья цифра шифра (№ схемы)	EI , кН · м ²	h_2 , м	$\alpha = \theta / \omega$
0	1,2	2	3	0	4	0	1,8	0	6200	2	0,6
1	2,4	4	5	1	0	4	2,2	1	5300	3	0,7
2	1,2	3	2	2	3	0	1,2	2	4800	4	0,5
3	1,6	5	3	3	0	3	1,6	3	6400	2	0,5
4	2,2	4	4	4	5	0	1,4	4	4600	1	0,6
5	1,4	2	4	5	0	5	1,4	5	5200	3	0,75
6	1,2	3	3	6	6	0	2,4	6	4400	1	0,6
7	2,4	4	4	7	0	6	1,6	7	4700	2	0,7
8	2,2	3	2	8	4	0	2,2	8	5400	2	0,6
9	2,6	5	4	9	0	4	2,6	9	6400	3	0,8

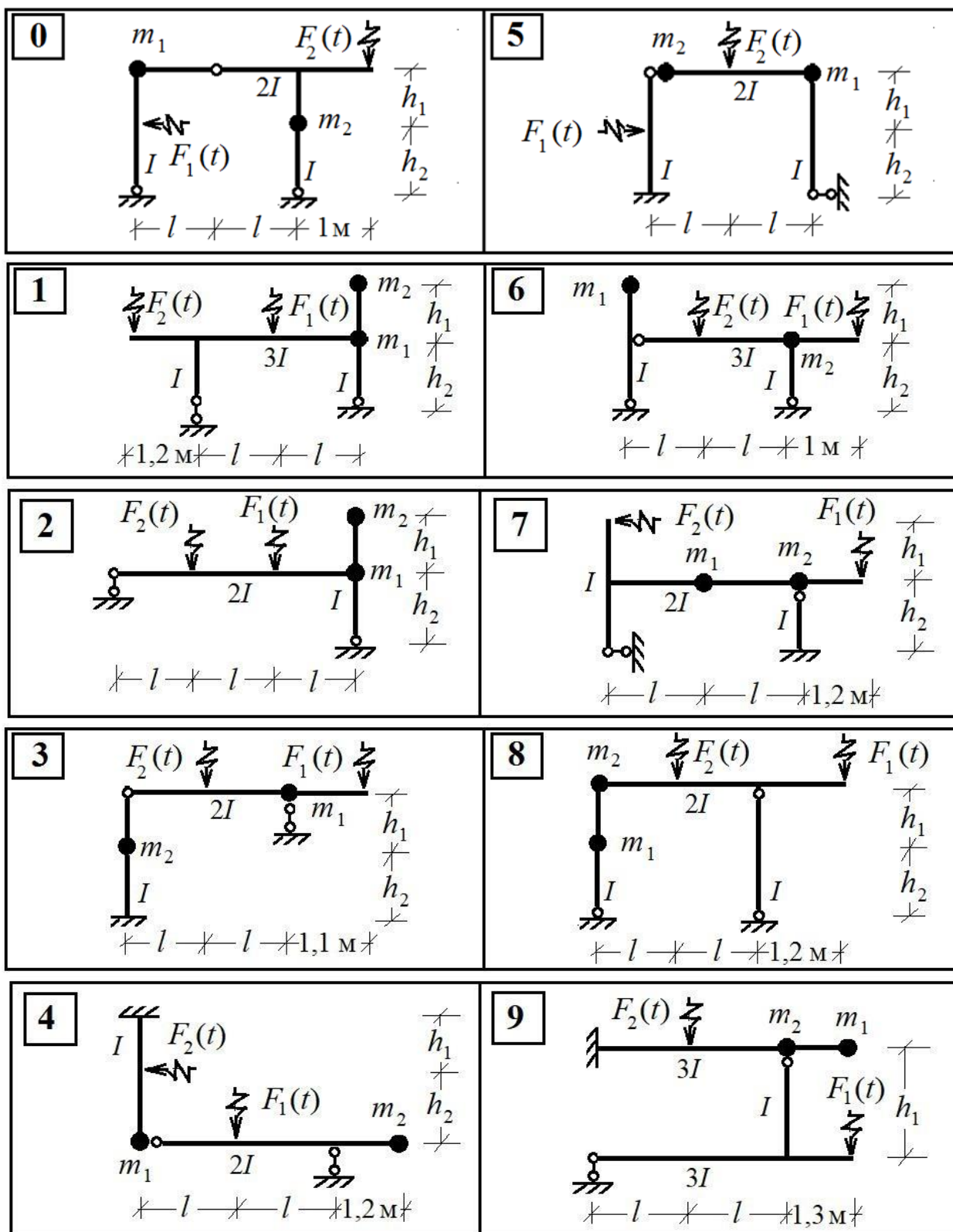


Рис. 5.12. Расчетные схемы для контрольной работы № 5

7. Определить частоты свободных колебаний

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}.$$

8. Определить периоды свободных колебаний

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j}.$$

9. Построить формы свободных колебаний сосредоточенных масс.

Так как однородные уравнения не содержат свободных членов, то абсолютные значения амплитуд непосредственно из системы уравнений определить нельзя. Поэтому для построения форм колебаний определяются не сами амплитуды, а соотношения между ними.

Для построения форм колебаний достаточно использовать одно уравнение, в которое подставляется одна из амплитуд, равная единице, а другая определяется из решения уравнения

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_i) \cdot a_{1i} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{2i} = 0, (i = 1, 2).$$

Тогда для λ_1 (при $i = 1$; $a_{11} = 1$) имеем

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_1) \cdot a_{11} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{21} = 0;$$

а для λ_2 (при $i = 2$; $a_{12} = 1$) получим

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_2) \cdot a_{12} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{22} = 0.$$

Из каждого из этих уравнений надо определить a_{21} и a_{22} .

10. Определить угловую скорость: $\theta = \alpha \cdot \omega$.

11. Записать в общем виде систему канонических уравнений для определения амплитудных значений инерционных сил.

12. Построить в заданной расчетной схеме эпюру изгибающих моментов от действия амплитудных значений вибрационной нагрузки.

13. Определить главные коэффициенты системы канонических уравнений

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \cdot \theta^2}.$$

Побочные коэффициенты системы канонических уравнений имеют те же значения, что и в уравнении частот.

14. Определить свободные члены системы канонических уравнений

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{M_F M_i}{EI} dx.$$

15. Решив систему канонических уравнений в численном виде, найти амплитудные значения инерционных сил J_i .

16. Построить динамическую эпюру изгибающих моментов

$$M_{\text{дин}} = M_1 J_1 + M_2 J_2 + \dots + M_n J_n + M_F.$$

Пример решения

Задание. Для расчетной схемы, представленной на рис. 5.13, определить угловые частоты свободных колебаний, построить динамическую эпюру изгибающих моментов и формы свободных колебаний сосредоточенных масс.

Дано: $F(t) = 1,6 \text{ кН}$; $m_1 = 1 \text{ т}$; $m_2 = 1,3 \text{ т}$; $m_3 = 1,6 \text{ т}$;
 $EI = 7000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$; $\theta = 0,56 \omega_{\text{мин}}$; $EI_{\text{риг}} = 3EI_{\text{ст}}$.

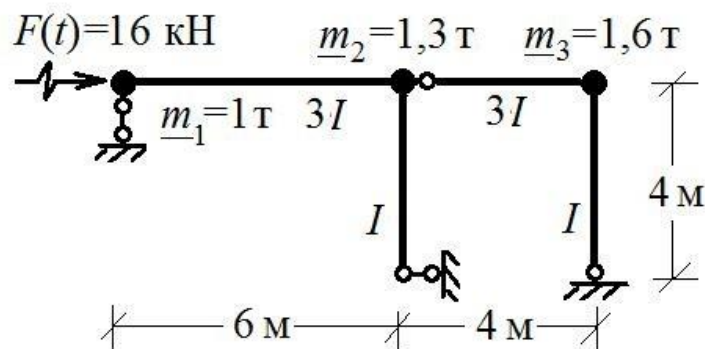


Рис. 5.13. Заданная расчетная схема

- Вычисляем степень статической неопределимости:

$$n_{\text{ст}} = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 2 - 6 = 0.$$

Система статически определима.

- Определяем число степеней свободы сосредоточенных масс заданной системы $n = 2$.
- Определяем величины сосредоточенных масс по направлению их возможных колебаний

$$m_1 = \underline{m}_2 = 1,3 \text{ т}; m_2 = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 = 1 + 1,3 + 1,6 = 3,9 \text{ т}.$$

- Записываем для системы с двумя степенями свободы уравнение частот свободных колебаний в общем виде

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_i) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{12}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0.$$

- Прикладывая последовательно единичные безразмерные силы по направлению колебаний сосредоточенных масс, определяем опорные реакции и строим единичные эпюры моментов (рис. 5.14).

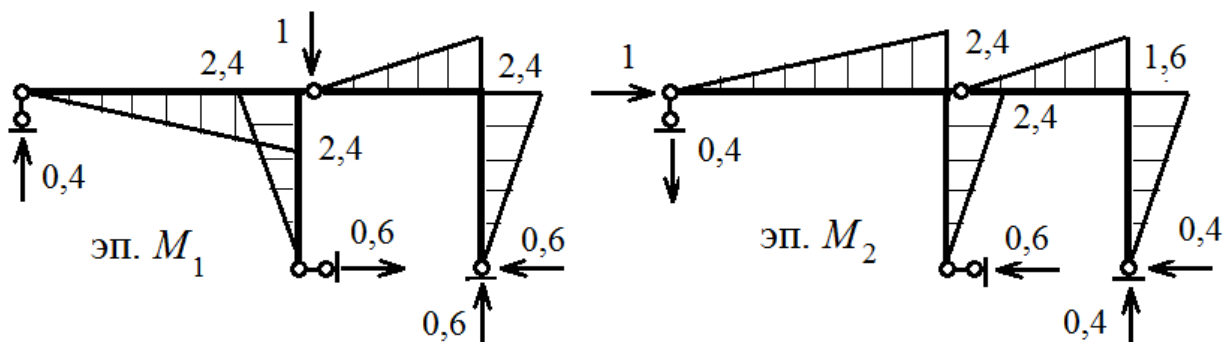


Рис. 5.14. Единичные эпюры моментов

- Определяем коэффициенты уравнения частот:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \times \\ &\times 2,4 \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 = \frac{1}{EI} \cdot 21,76 = \frac{21,76}{7000} = \end{aligned}$$

$$= 3,11 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м};$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \sum \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \times \\ &\times \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 = \\ &= -\frac{1}{EI} \cdot 5,33 = -\frac{5,33}{7000} = -0,76 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \sum \int_0^l \frac{M_2 M_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \times \\ &\times \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot 16,07 = \frac{16,07}{7000} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м}. \end{aligned}$$

- Определяем корни частотного уравнения λ_i (λ_1 и λ_2)

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{EI} 21,76 \cdot 1,3 - \lambda_i \right) & \frac{1}{EI} (-5,33 \cdot 3,9) \\ \frac{1}{EI} (-5,33 \cdot 1,3) & \left(\frac{1}{EI} 16,07 \cdot 3,9 - \lambda_i \right) \end{vmatrix}.$$

Умножив все на EI , получим

$$(28,288 - \lambda_i \cdot EI) \cdot (62,673 - \lambda_i \cdot EI) - 144,033 = 0;$$

$$(\lambda_i \cdot EI)^2 - 90,961 \cdot \lambda_i \cdot EI + 1628,861 = 0.$$

Решаем это уравнение и находим

$$\lambda_1 = \frac{1}{EI} \cdot 66,45; \lambda_2 = \frac{1}{EI} \cdot 24,51.$$

- Проверяем правильность решения уравнения

$$S_p(D) = \sum \lambda_i : \delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2 = \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$\begin{aligned} S_p(D) = \delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2 &= \frac{1}{EI} \cdot 21,76 \cdot 1,3 + \frac{1}{EI} \cdot 16,07 \cdot 3,9 = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot 90,96; \end{aligned}$$

$$\sum \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{EI} \cdot 66,45 + \frac{1}{EI} \cdot 24,51 = \frac{1}{EI} \cdot 90,96;$$

$$|D| = \Pi \cdot \lambda_i \cdot (\delta_{11} \cdot m_1) \cdot (\delta_{22} \cdot m_2) - (\delta_{12} \cdot m_1) \cdot (\delta_{21} \cdot m_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2;$$

$$\begin{aligned} |D| &= (\delta_{11} \cdot m_1) \cdot (\delta_{22} \cdot m_2) - (\delta_{12} \cdot m_1) \cdot (\delta_{21} \cdot m_2) = \\ &= \frac{1}{EI^2} (28,288 \cdot 62,673 - 20,787 \cdot 6,929) = \frac{1}{EI^2} \cdot 1628,86; \end{aligned}$$

$$\Pi \cdot \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{EI} \cdot 66,45 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 24,51 = 1628,69 \cdot \frac{1}{EI^2}.$$

Определяем погрешность вычислений: $1628,86 - 1628,69 = 0,17$;
 $(0,17 / 1628,86) \cdot 100 \% = 0,01 \% < 1 \%$.

- Определяем частоты свободных колебаний и угловую скорость:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{7000}{66,45}} = 10,26 \text{ 1/с} = \omega_{\min};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{7000}{24,51}} = 16,9 \text{ 1/с};$$

$$\theta = 0,56 \cdot \omega_{\min} = 0,56 \cdot 10,26 = 5,75 \text{ 1/с}.$$

Определяем периоды свободных колебаний

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j};$$

$$T_1 = \frac{2 \cdot 3,14}{10,26} = 0,61 \text{ с}; T_2 = \frac{2 \cdot 3,14}{16,9} = 0,37 \text{ с}.$$

• Строим формы свободных колебаний сосредоточенных масс (рис. 5.15).

Вычисляем собственные векторы из уравнения

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_i) \cdot a_{1i} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{2i} = 0, (i = 1, 2).$$

Для λ_1 при $i = 1$; $a_{11} = 1$ имеем

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_1) \cdot a_{11} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{21} = 0;$$

$$\left(\frac{1}{EI} \cdot 21,76 \cdot 1,3 - \frac{1}{EI} \cdot 66,45\right) \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 5,33 \cdot 3,9 \cdot a_{21} = 0;$$

$$a_{21} = -1,84.$$

Для λ_2 при $i = 2$; $a_{12} = 1$ получим

$$(\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_2) \cdot a_{12} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot a_{22} = 0;$$

$$\left(\frac{1}{EI} \cdot 21,76 \cdot 1,3 - \frac{1}{EI} \cdot 24,51\right) \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 5,33 \cdot 3,9 \cdot a_{22} = 0;$$

$$a_{22} = 0,18.$$

Векторы первой и второй форм свободных колебаний

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,84 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,18 \end{bmatrix}.$$

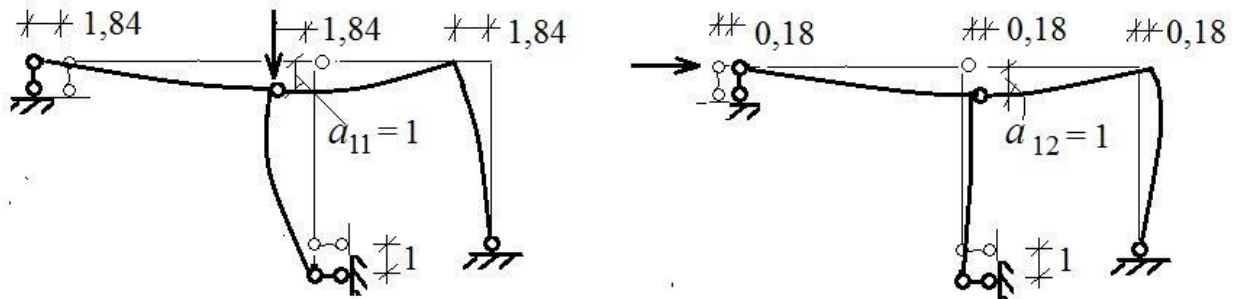


Рис. 5.15. Формы колебаний

- Строим в заданной расчетной схеме эпюру изгибающих моментов от действия амплитудных значений вибрационной нагрузки (рис. 5.16).

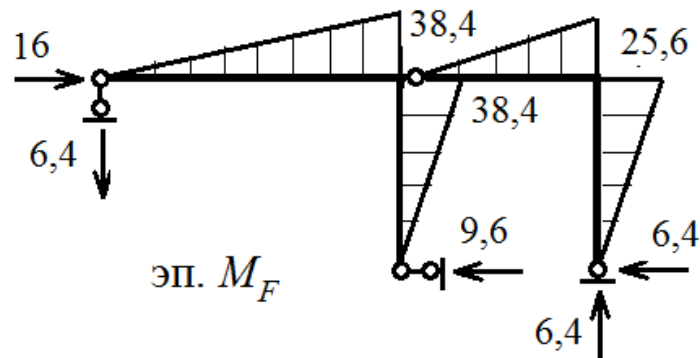


Рис. 5.16. Эпюра моментов от амплитудных значений вибрационной нагрузки

- Записываем систему канонических уравнений для определения амплитудных значений инерционных сил

$$\begin{aligned} \delta_{11}^* \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \delta_{22}^* \cdot J_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned}$$

- Определяем главные коэффициенты и свободные члены этой системы канонических уравнений

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \cdot \theta^2} = 3,11 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{1,3 \cdot 5,75^2} = -20,16 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \cdot \theta^2} = 2,3 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{3,9 \cdot 5,75^2} = -5,46 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \int_0^l \frac{M_F M_1}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 + \\ &+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 = -\frac{1}{EI} \cdot 151,89 = \\ &= -\frac{151,89}{7000} = -21,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \sum \int_0^l \frac{M_F M_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 38,4 + \\ &+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,6 = \frac{1}{EI} \cdot 257,12 = \\ &= \frac{257,12}{7000} = 36,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

• Решаем систему канонических уравнений и определяем амплитудные значения инерционных сил J_1 и J_2

$$\begin{aligned} -20,16 \cdot 10^{-3} \cdot J_1 - 0,76 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 - 21,7 \cdot 10^{-3} &= 0; J_1 = -1,34 \text{ кН}; \\ -0,76 \cdot 10^{-3} \cdot J_1 - 5,46 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 + 36,73 \cdot 10^{-3} &= 0; J_2 = 6,91 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Строим эпюры моментов от амплитудных значений инерционных сил J_1 и J_2 (рис. 5.17)

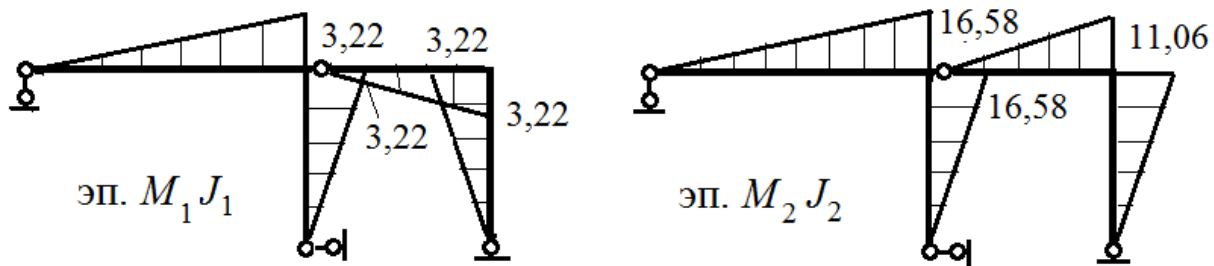


Рис. 5.17. Эпюры моментов от амплитудных значений инерционных сил

- Строим динамическую эпюру изгибающих моментов (рис. 5.18)

$$M_{\text{дин}} = M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_F.$$

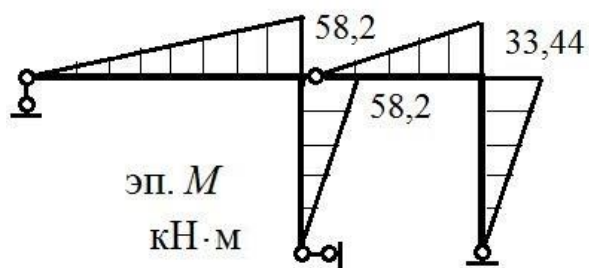


Рис. 5.18. Динамическая эпюра изгибающих моментов

Глава 6. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

6.1. Понятие о потере устойчивости и критической нагрузке

Сущность явления потери устойчивости можно продемонстрировать на примере идеально прямого упругого консольного стержня, к концу которого в центре сечения приложена сосредоточенная сила, направленная вдоль оси стержня (рис. 6.1, а).

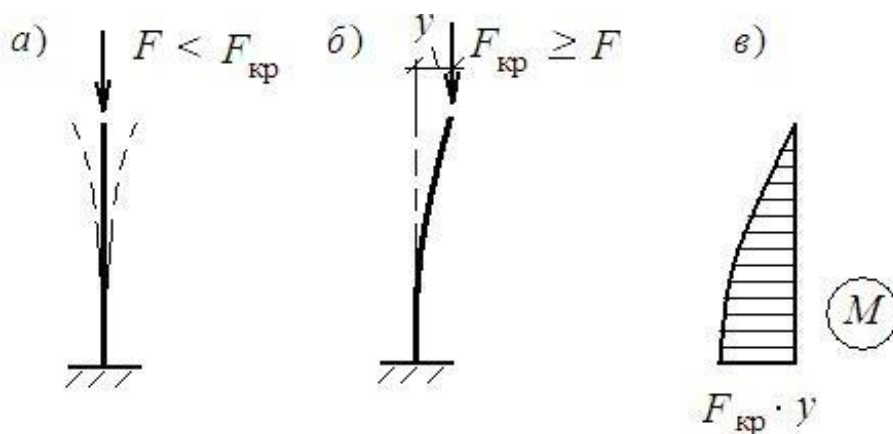


Рис. 6.1. Явление потери устойчивости

Пока величина силы не превосходит некоторого предельного значения, стержень в результате центрального сжатия будет только укорачиваться, сохраняя прямолинейную форму равновесия. Если при этом вывести стержень из равновесия, приложив кратковременно действующую горизонтальную силу, то он, поколебавшись, займет первоначальное положение (см. рис. 6.1, а).

Если любая конструкция (в том числе и стержень), выведенная из равновесия, вновь возвращается в свое первоначальное положение, ее состояние считается *устойчивым*.

При определенном значении силы, называемом *критическим* и обозначаемом через $F_{кр}$, выведенный из равновесия стержень больше не возвращается в исходное положение (рис. 6.1, б). Такое состояние системы уже является *неустойчивым*. При $F = F_{кр}$ происходит разветвление форм равновесия, так называемая *бифуркация*. Это означает, что одной и той же нагрузке могут соответствовать различные формы равновесия деформированного состояния. Подобное явление при решении задач прочности не встречалось.

Итак, *критической силой (нагрузкой)* для всего сооружения или отдельного стержня называется то предельное значение силы, при котором начальная форма равновесия перестает быть устойчивой.

Граница между устойчивым и неустойчивым состоянием системы называется *безразличным состоянием*. В нем сжатый стержень обладает удивительным свойством, т.е. он как бы теряет свою жесткость. Достаточно небольшого усилия, чтобы изменить его деформированную форму. Естественно, задаваемые перемещения весьма малы, но при этом они конечны и видимы простым глазом.

Явление потери устойчивости с появлением смежных форм равновесия было теоретически обосновано Л. Эйлером в 1744 г. Однако его изложение этой проблемы не является всеобъемлющим. При расчете гибких конструкций типа стальных оболочек часто имеет место потеря устойчивости в виде хлопка, когда система принимает форму равновесия, далекую от смежной. Этот факт подтверждается диаграммой «нагрузка – прогиб» (рис. 6.2, а).

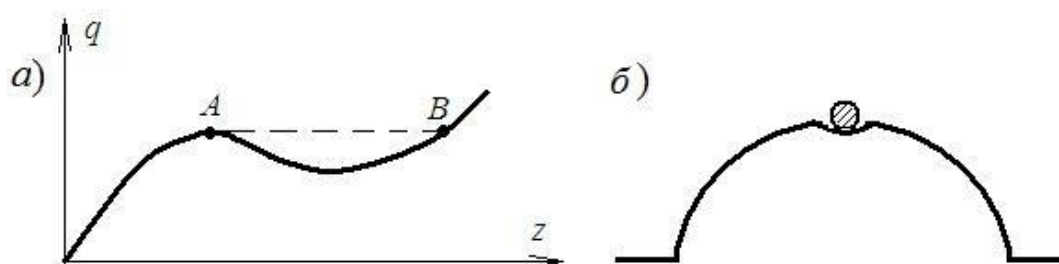


Рис. 6.2. Явление потери устойчивости: а – диаграмма «нагрузка – прогиб» с перескоком конструкции из состояния А в В; б – пояснение потери устойчивости «в малом» и «в большом»

Существует еще одно понятие: потеря устойчивости «в малом» и «в большом». Например, состояние шарика на рис. 6.2, б при малых отклонениях будет устойчивым, а при увеличении отклонений он выйдет из лунки и потеряет устойчивость «в большом». Следует также иметь в виду, что в ряде случаев (особенно для сложных многоэлементных конструкций) до общей потери устойчивости конструкции возможны местные потери устойчивости отдельных элементов. Имеются и другие виды потери устойчивости.

Обычный статический расчет, как правило, ведется по недеформированной схеме (т. е. по первоначальной геометрической схеме без учета прогибов стержней под нагрузкой). Особенность решения задач устойчивости состоит в том, что расчет сооружения производится с учетом его деформированной схемы. При потере устойчивости в стержнях, вследствие изгиба, кроме продольных сил появляются изгибающие моменты. Чтобы подчеркнуть, что причиной изгиба является не поперечная нагрузка, а продольная сила, изгиб обычно называют *продольным*. На рис. 6.1, в показана эпюра изгибающих моментов в стержне, изображенном на рис. 6.1, б. В этом случае она уже нелинейная.

Вопросы расчета сооружений на устойчивость встали со всей полнотой только после появления нового строительного материала – стали, которую широко начали использовать при возведении крупных инженерных сооружений. Особенно обострилась ситуация после ряда крушений мостов из-за потери устойчивости сжатых элементов. Наиболее активно наука об устойчивости различных строительных конструкций развивалась в конце XIX – начале XX в.

В рамках настоящей главы рассматриваются стержневые системы, в которых при нагружении напряжения не превосходят предела упругости.

Необходимо отметить, что в случае потери устойчивости зависимость между силами и перемещениями становится нелинейной (рис. 6.3), поэтому принцип независимости действия сил к задачам устойчивости уже неприменим.

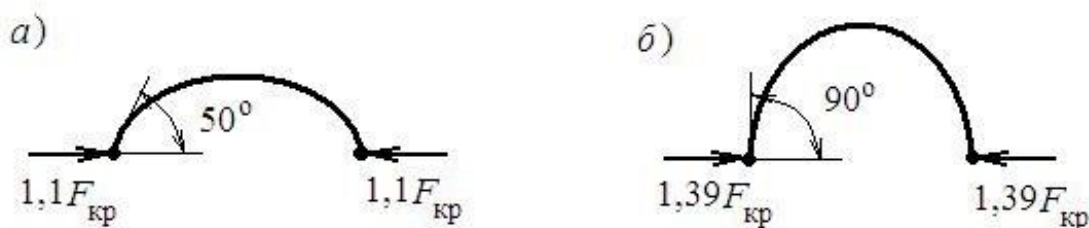


Рис. 6.3. Иллюстрация нелинейности задач устойчивости

В инженерной практике обычно различают два рода потери устойчивости. *Потеря устойчивости I рода*, по сути, отражает подход Эйлера к решению задач устойчивости, характерная особенность которого состоит в том, что при потере устойчивости новая форма равновесия существенно отличается от формы, предше-

ствующей потере устойчивости. Потеря устойчивости I рода относится к идеализированным системам, трудно реализуемым на практике. Тем не менее, ее использование весьма часто подтверждается экспериментом.

В данной главе теория потери устойчивости I рода охватывает большинство приведенных примеров расчета элементов строительных конструкций, а именно, задачи устойчивости центрально-сжатых стержней рам (рис. 6.4, а), круговых колец и арок (рис. 6.4, б), пластинок и оболочек, потери плоской формы изгиба (рис. 6.4, в) и т. д.

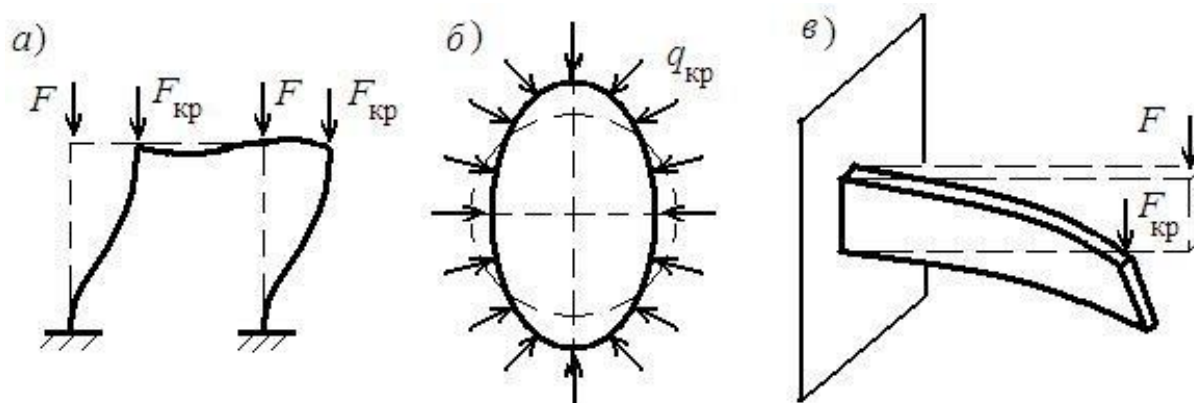


Рис. 6.4. Конструкции, подвергшиеся потере устойчивости I рода

Потеря устойчивости II рода характеризуется сильным развитием предшествовавших деформаций сжато-изогнутой конструкции без появления деформаций нового типа (рис. 6.5).

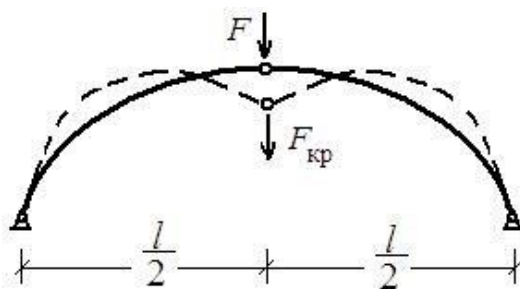


Рис. 6.5. Потеря устойчивости II рода

Вообще говоря, такие подходы не исчерпывают и не характеризуют полностью специфику поведения различных конструкций под нагрузкой. Но применительно к стержневым идеально упругим системам они вполне допустимы.

6.2. Основные допущения и критерии устойчивости

Поскольку построение математической модели задач устойчивости значительно сложнее, чем при решении задач прочности, то при выборе расчетной схемы вводятся дополнительные допущения, практически приводящие все реальные задачи к расчету некоторых идеализированных систем:

- при исследовании устойчивости рамных систем принимается, что система образована из идеально прямых стержней, соединенных жестко или шарнирно; возможные искривления стержней, а также неточности их изготовления и соединения учитываются коэффициентом продольного изгиба φ , зависящим от гибкости стержня;

- считается, что стержни системы до момента потери устойчивости испытывают только продольные деформации;

- для сплошных стержней в момент потери устойчивости учитываются только деформации изгиба (т. е., как и при решении задач прочности, не учитывается влияние на деформации стержней продольных и поперечных сил);

- предполагается, что критическое состояние конструкции наступает вследствие одновременного возрастания всех узловых нагрузок с сохранением постоянного соотношения между ними;

- в дальнейшем рассматривается потеря устойчивости «в малом», что позволяет применять для решения задач приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

$$EIy''(x) = -M(x) \quad (6.1)$$

вместо точного

$$\frac{EIy''(x)}{\sqrt{[1 + (y'(x))^2]^3}} = -M(x).$$

Принятые допущения приводят задачу к абстрактной расчетной схеме, так как на самом деле стержни не являются идеально прямыми, а нагрузка вызывает в них изгибающие моменты еще до наступления потери устойчивости. Однако таким образом можно

описать задачи устойчивости достаточно простой математической моделью, а получаемый результат в какой-то мере позволяет судить о поведении реального объекта.

При решении представленных ниже задач находится критическая нагрузка, соответствующая переходу системы из устойчивого состояния в неустойчивое. Вопрос установления этого перехода (т. е. определения критерия устойчивости) в общем случае представляется относительно сложным, а порою и весьма спорным. Общепринятыми и часто применяемыми критериями устойчивости являются *статический*, *энергетический* и *динамический*.

В данной главе используются только два первых критерия, которые позволяют решать задачи устойчивости консервативных систем. В консервативных системах, в отличие от решений задач прочности, работа, совершаемая внешними силами, не зависит от пути, проделываемого силами при переходе системы из начального положения в конечное.

Динамический критерий устойчивости применяется при исследовании движения системы, выведенной из состояния покоя. Если при этом частота свободных колебаний системы стремится к нулю, это свидетельствует о потере устойчивости системы. Динамический критерий устойчивости применим и к неконсервативным системам.

Для консервативных систем все три критерия приводят к одинаковым результатам.

Примеры консервативной и неконсервативной систем показаны на рис. 6.6. На рис. 6.6, *а* изображена консервативная система, где направление силы не меняется при потере устойчивости. На рис. 6.6, *б* показана так называемая *следящая сила*, которая при потере устойчивости все время направлена по касательной к оси стержня в месте приложения.

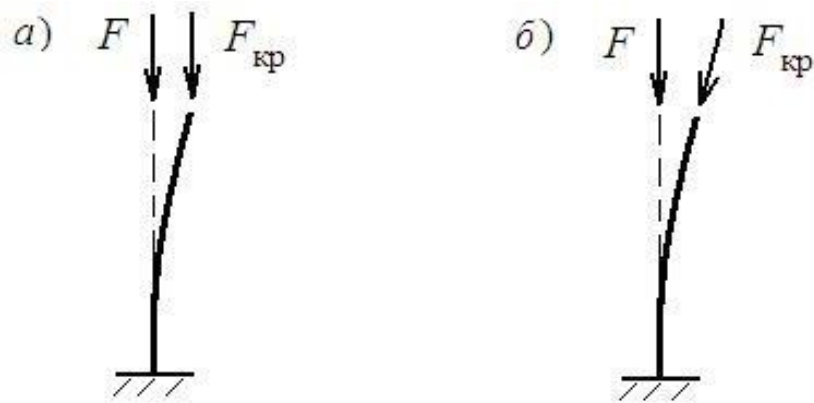


Рис. 6.6. Консервативная (а) и неконсервативная (б) системы

Далее излагаются метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (метод Эйлера) и метод перемещений, которые при принятых выше допущениях считаются точными.

Для приближенного решения задач также предлагаются энергетический метод, метод конечных элементов и вариационные методы, не рассматриваемые в настоящем пособии.

6.3. Устойчивость центрально-сжатых прямолинейных стержней

В расчете на устойчивость центрально-сжатых прямолинейных стержней при определении критической нагрузки используется *статический критерий устойчивости*. Он состоит в том, что упругой системе с узловой нагрузкой, вызывающей только продольные деформации, задается небольшое отклонение от первоначальной формы равновесия, приводящее к продольному изгибу стержней. Затем определяется та минимальная нагрузка, которая способна удерживать эту систему в новом деформированном состоянии.

С этой целью для каждого стержня системы составляется дифференциальное уравнение его изогнутой оси. При интегрировании этих уравнений появляются произвольные постоянные. На основе имеющихся граничных условий относительно произвольных постоянных составляется система однородных уравнений, которые имеют два решения либо все произвольные постоянные равны нулю (что свидетельствует об отсутствии перемещений, связанных с потерей устойчивости), либо определитель из коэффициентов при

произвольных постоянных равен нулю (что приводит к трансцендентному уравнению устойчивости, корни которого вычисляются путем подбора).

Для систем, состоящих из нескольких стержней, метод приводит к громоздким уравнениям, поэтому его приложение к сложным системам нецелесообразно. Преимущество метода состоит в том, что он наиболее четко выявляет физическую сущность рассматриваемого явления. Метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня удобен при определении критической силы для отдельных стержней. Кроме того, его знание необходимо при построении решения задач устойчивости методом перемещений.

Возьмем стержень длиной l постоянного поперечного сечения с тремя упругими опорами по концам (рис. 6.7, а), т. е. рассмотрим наиболее общий случай граничных условий. Опорные устройства, изображенные в виде пружин, представляют собой упругоподатливые опоры, имеющие жесткости r_1, r_2, r_3 . Изменяя эти жесткости от 0 до ∞ , можно получить любые другие условия закрепления концов стержня.

Напомним, что *жесткость* – это усилие, которое нужно приложить к пружине, чтобы получить смещение, равное единице. При решении задач устойчивости жесткости упругоподатливых опор принимаются известными.

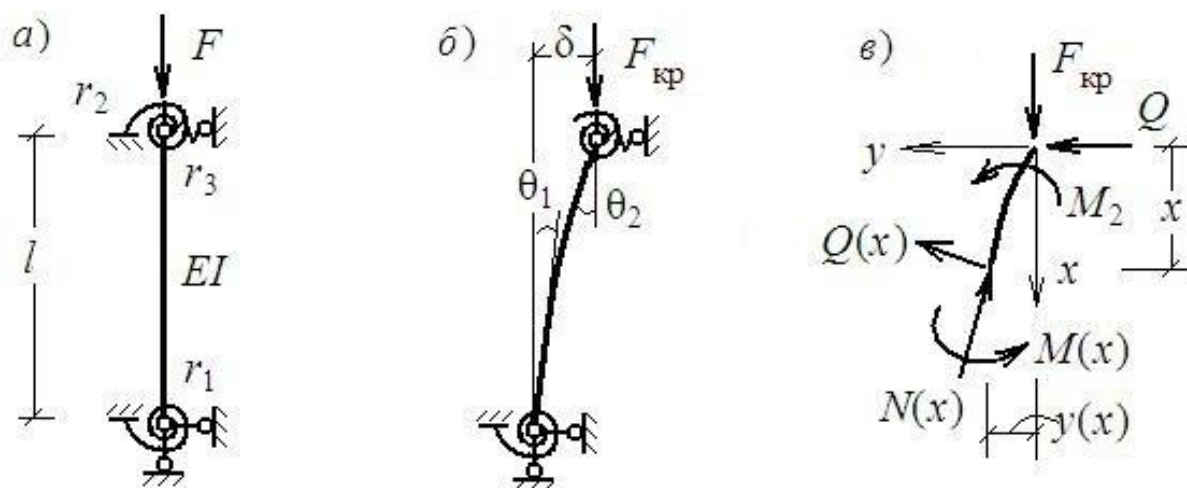


Рис. 6.7. Потеря устойчивости стержнем с тремя упругими опорами

Рассмотрим потерю устойчивости данным стержнем с жесткостью EI в плоскости рисунка. Используем статический критерий

устойчивости. С этой целью зададим стержню небольшое отклонение от прямолинейной формы равновесия (рис. 6.7, б). В результате концы стержня повернутся на углы θ_1 и θ_2 , а верхний конец сместится относительно нижнего по горизонтали на величину δ . Естественно, что при этом уже будет иметь место продольный изгиб.

Для составления дифференциального уравнения изогнутой оси стержня определим изгибающий момент $M(x)$ в произвольном сечении. Отсечем верхний конец стержня и в выбранной системе координат, где ось Oy должна быть направлена в сторону выпуклости оси стержня, чтобы соблюдалось правило знаков в уравнении (6.1), составим уравнение моментов относительно нейтральной оси сечения так, чтобы в него не вошли $Q(x)$ и $N(x)$

$$F_{кр}y - Qx - M_2 - M(x) = 0.$$

Отсюда

$$M(x) = F_{кр}y - Qx - M_2, \quad (6.2)$$

где Q – реакция упругоподатливой опоры 3, $Q = r_3\delta$; M_2 – реакция упругоподатливой опоры 2, $M_2 = r_2\theta_2$.

Подставив выражение момента (6.2) в уравнение (6.1), получим

$$EIy''(x) = Qx + M_2 - F_{кр}y(x), \text{ или } y''(x) + \frac{F_{кр}}{EI}y(x) = \frac{Q}{EI}x - \frac{M_2}{EI}.$$

Введем обозначение

$$\frac{F_{кр}}{EI} = \alpha^2 \quad (6.3)$$

и перепишем уравнение изогнутой оси стержня в виде

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = \frac{Q}{EI}x + \frac{M_2}{EI}. \quad (6.4)$$

Выражение (6.4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение состоит из двух частей $y(x) = y_0 + y_ч$, где y_0 – общее решение соответ-

ствующего однородного дифференциального уравнения; $y_{\text{ч}}$ – частное решение, зависящее от правой части уравнения (6.4).

Однородное уравнение имеет следующий вид

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = 0. \quad (6.5)$$

В нем нужно лишь заменить ω на α и ввести переменную x вместо t , после чего решение уравнения (6.5) будет выглядеть как

$$y_0 = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x. \quad (6.6)$$

Частное решение уравнения (6.4) получим путем сравнения коэффициентов при переменных с одинаковыми степенями. Для этого представим $y_{\text{ч}}$ в виде полинома первой степени

$$y_{\text{ч}} = Cx + D, \quad (6.7)$$

где C и D – произвольные постоянные интегрирования.

Определим их путем подстановки $y_{\text{ч}}$ из (6.7) в (6.4)

$$0 + \alpha^2(Cx + D) = \frac{Q}{EI}x + \frac{M_2}{EI},$$

откуда находим

$$C = \frac{Q}{\alpha^2 EI}; \quad D = \frac{M_2}{\alpha^2 EI}.$$

Следовательно,

$$y_{\text{ч}} = \frac{Q}{\alpha^2 EI}x + \frac{M_2}{\alpha^2 EI},$$

а полное решение уравнения (6.4) примет вид

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{Q}{\alpha^2 EI}x + \frac{M_2}{\alpha^2 EI}. \quad (6.8)$$

Подставим в (6.8) значения Q и M_2 и введем еще одно обозначение

$$v = \alpha l, \quad (6.9)$$

которое будем называть *критическим параметром*, так как через него, учитывая (6.3), можно определить критическую силу $F_{кр}$

$$F_{кр} = \frac{v^2 EI}{l^2}. \quad (6.10)$$

$$y(x) = A \cos \frac{v}{l} x + B \sin \frac{v}{l} x + \frac{r_3 \delta l^2}{v^2 EI} x + \frac{r_2 \theta_2 l^2}{v^2 EI}. \quad (6.11)$$

Выражение (6.11) содержит кроме v еще четыре неизвестные величины: A , B , δ , θ_2 . Для их определения используем граничные условия по концам стержней

$$\text{при } x = 0: \quad 1) y = 0; \quad 2) y' = \theta_2; \quad (6.12)$$

$$\text{при } x = l: \quad 3) y = \delta; \quad 4) y' = \theta_1.$$

Чтобы воспользоваться условиями (6.12), запишем выражение первой производной от (6.11) по x

$$y'(x) = -\frac{v}{l} A \sin \frac{v}{l} x + \frac{v}{l} B \cos \frac{v}{l} x + \frac{r_3 \delta l^2}{v^2 EI}.$$

Граничные условия (6.12) позволяют составить следующую систему уравнений:

$$A + \frac{r_2 l^2}{v^2 EI} \theta_2 = 0;$$

$$\frac{v}{l} B + \frac{r_3 l^2}{v^2 EI} \delta = \theta_2;$$

(6.13)

$$A \cos v + B \sin v + \frac{r_3 l^3}{v^2 EI} \delta + \frac{r_2 l^2}{v^2 EI} \theta_2 = \delta;$$

$$-\frac{v}{l} A \sin v + \frac{v}{l} B \cos v + \frac{r_3 l^2}{v^2 EI} \delta = \theta_1,$$

где из первого выражения легко сразу определить $A = -\frac{r_2 l^2}{v^2 EI} \theta_2$.

В уравнениях (6.13) появилась еще одна неизвестная величина – угол поворота θ_1 , которую можно найти из уравнения равновесия для всего стержня (см. рис. 6.7, б)

$$\sum M = F_{\text{кр}} \delta - Ql - M_2 - M_1 = 0, \quad (6.14)$$

где $M_1 = r_1 \theta_1$.

Если в (6.14) подставить выражение $F_{\text{кр}}$ из (6.10), а также значения Q и M_2 , то получим

$$\frac{v^2 EI}{l^2} \delta - r_3 l \delta - r_2 \theta_2 - r_1 \theta_1 = 0.$$

Отсюда
$$\theta_1 = -\frac{r_2}{r_1} \theta_2 + \left(\frac{v^2 i}{r_1 l} - \frac{r_3 l}{r_1} \right) \delta,$$

где $i = \frac{EI}{l}$ – относительная жесткость стержня.

Подставим в уравнения (6.13) значения A и θ_1 и получим три однородных уравнения относительно неизвестных B , θ_2 , δ

$$B \frac{v}{l} - \theta_2 + \delta \frac{r_3 l}{v^2 i} = 0;$$

$$B \sin v + \theta_2 \frac{r_2 l}{v^2 i} (1 - \cos v) + \delta \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) = 0; \quad (6.15)$$

$$B \frac{v}{l} \cos v + \theta_2 r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) + \delta \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) = 0.$$

В итоге мы пришли к проблеме собственных значений. Тривиальное решение системы однородных уравнений (6.15), когда B , θ_2 и δ равны нулю, соответствует прямолинейной форме стержня и указывает на отсутствие потери устойчивости. Существование отличных от нуля значений B , θ_2 , δ возможно только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных B , θ_2 , δ , будет равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{v}{l} & -1 & \frac{r_3 l}{v^2 i} \\ \sin v & \frac{r_2 l}{v^2 i} (1 - \cos v) & \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - 1 \right) \\ \frac{v}{l} \cos v & r_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) & \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.16)$$

Как и при определении частот свободных колебаний, сами значения B , θ_2 , δ при потере устойчивости остаются неопределенными.

Определитель (6.16) представляет собой трансцендентное уравнение устойчивости, корни которого находятся путем подбора. Подбирается минимальное значение критического параметра v ,

превращающее уравнение в тождество. Затем через критический параметр по формуле (6.10) вычисляется величина критической силы.

Можно либо каждый раз раскрывать определитель в численном виде после подстановки в него значений r_1, r_2, r_3, i, l, v , либо подставлять эти значения в раскрытый определитель, который имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{r_2}{vi} (1 - \cos v) \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) - \frac{v}{l} \cos v \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) + \\ & + \frac{r_2 r_3 l}{v^2 i} \sin v \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) - \frac{r_2 r_3 l}{v^3 i^2} \cos v (1 - \cos v) - \\ & - \frac{r_2}{l} v \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sin v}{vi} \right) \left(\frac{r_3 l^2}{v^2 i} - 1 \right) + \sin v \left(\frac{r_3 l}{v^2 i} - \frac{v^2 i}{r_1 l} + \frac{r_3 l}{r_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Следует помнить, что трансцендентное уравнение имеет множество корней, из которых необходимо найти только минимальный, соответствующий $F_{кр}$.

Для решения уравнения целесообразно составить программу построения графика функции в зависимости от v , которое изменяется от 0 до 2π . Тогда первое значение v , приводящее к нулевому значению функции, и будет искомой величиной.

6.4. Расчет плоских рам на устойчивость методом перемещений

Метод перемещений получил широкое распространение при расчете строительных конструкций благодаря простоте и универсальности выбора основной системы. Особенно существенны эти преимущества для решения задач устойчивости. На первый взгляд, кажется, что основная система метода сил проще, поскольку она статически определима. Однако следует учесть, что расчет на устойчивость проводится по деформированной схеме, получить которую в многоэлементной системе метода сил гораздо сложнее, чем

в основной системе метода перемещений, состоящей из отдельных прямолинейных стержней.

6.4.1. Теория метода

Основная система метода перемещений при определении критической нагрузки принимается такой же, как при решении задач прочности (рис. 6.8, а). Но реакции в дополнительных связях определяются уже с учетом продольного изгиба по деформированной схеме.

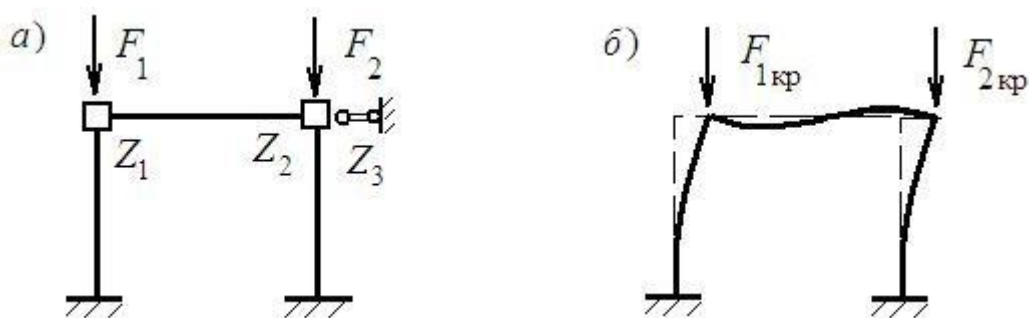


Рис. 6.8. Основная система метода перемещений и форма потери устойчивости

Согласно принятым допущениям в раме, нагруженной узловой нагрузкой, вплоть до момента потери устойчивости будут иметь место только продольные усилия. Как известно, при узловой нагрузке все свободные члены системы канонических уравнений метода перемещений для несвободных рам будут равны нулю

$$r_{1F} = r_{2F} = \dots = r_{nF} = 0,$$

поэтому канонические уравнения получаются однородными.

Примем для реакций в дополнительных связях основной системы те же обозначения, что и при расчете методом перемещений на прочность. При этом следует помнить, что реакции при расчете на устойчивость определяются по деформированной схеме.

$$\begin{aligned}
r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n &= 0; \\
r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n &= 0; \\
&\dots \\
r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.18}$$

Физический смысл уравнений равновесия (6.18) состоит в том, что они отрицают наличие реакций в любой дополнительной связи при возникновении перемещений. Таким образом, идея эквивалентности основной и заданной систем сохраняется и здесь. Остается справедливой и теорема о взаимности реакций от единичных перемещений, т. е. $r_{ik} = r_{ki}$.

Однородная система уравнений (6.18) имеет не единственное решение. Тривиальное решение будет иметь место, когда все неизвестные равны нулю, $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0$. Равенство перемещений нулю в большинстве случаев свидетельствует о том, что нагрузка еще не достигла критического значения и рама находится в устойчивом состоянии. Поэтому тривиальное решение не представляет интереса. Тем не менее, потеря устойчивости стержнями может произойти и при нулевых значениях перемещений при достижении в отдельных стержнях значения критического параметра свыше 2π .

При решении задач устойчивости методом перемещений, как и в методе непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, будем использовать *статический критерий устойчивости*. Зададим раме малые перемещения (сплошная линия на рис. 6.8, б) и будем искать то минимальное значение нагрузки, при котором рама может находиться в равновесии как в недеформированном, так и в деформированном состоянии.

Нетривиальное решение уравнений (6.18), когда перемещения не будут нулевыми, имеет место, если определитель из коэффициентов равен нулю, т. е.

$$|K| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.19)$$

Раскрыв этот определитель, получим *уравнение устойчивости*, которое служит для вычисления критической нагрузки. Коэффициенты r_{kj} обычно выражаются не непосредственно через $F_{кр}$, а через критический параметр ν (6.9). Как будет показано ниже, коэффициенты r_{kj} являются трансцендентными функциями этого параметра. Поэтому уравнение устойчивости, получаемое в результате раскрытия (6.19), будет трансцендентным уравнением, корни которого находятся путем подбора. Оно имеет множество корней, из которых, как и в методе непосредственного интегрирования дифференциального уравнения оси стержня, нужно найти только минимальное ненулевое значение ν , удовлетворяющее уравнению устойчивости (6.19).

В общем случае параметр ν_k , определяемый выражением (6.9), зависит от длины стержня l_k , силы F_k и жесткости EI_k , поэтому для различных стержней он может отличаться. Но на основании принятого допущения о том, что критическое состояние конструкции достигается путем одновременного возрастания всех узловых нагрузок с сохранением постоянного соотношения между ними, задающего соотношение между силами F_k , легко выразить все критические параметры ν_k через какой-нибудь один из них. Тогда все коэффициенты r_{kj} определителя (6.19) будут функциями только одного параметра.

После определения критического параметра критическое значение силы для выбранного стержня находится по формуле (6.10). Затем, исходя из полученных соотношений между критическими параметрами, находятся остальные критические параметры ν_j , а уже через них и критические силы по той же формуле (6.10).

Для дальнейших расчетов определяются расчетные длины стержней

$$l_0 = \frac{\pi}{\nu} l. \quad (6.20)$$

Полученной критической нагрузке соответствует определенная форма потери устойчивости, которую нетрудно представить вначале ориентировочно. Но эту форму можно и уточнить, выразив насколько это возможно форму деформированного состояния системы с бесконечным числом степеней свободы через несколько перемещений. Для определения соотношений между перемещениями используется следующий прием: нужно принять какое-то значение Z (например, $Z_1 = 1$), подставить его и значения v_j в уравнение (6.18), после чего, решая систему $(n - 1)$ уравнений, найти остальные значения Z_j , по которым можно уточнить искомую форму потери устойчивости.

6.4.2. Вычисление опорных реакций продольно-сжатых стержней от единичных перемещений (общий случай)

Как было отмечено выше, при определении реакций в дополнительных связях от единичных перемещений Z_k в основной системе необходимо учесть влияние продольных сил. Эта задача решается методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня.

Рассмотрим прямолинейный стержень AB , жестко защемленный верхним концом и шарнирно опирающийся внизу (рис. 6.9, а).

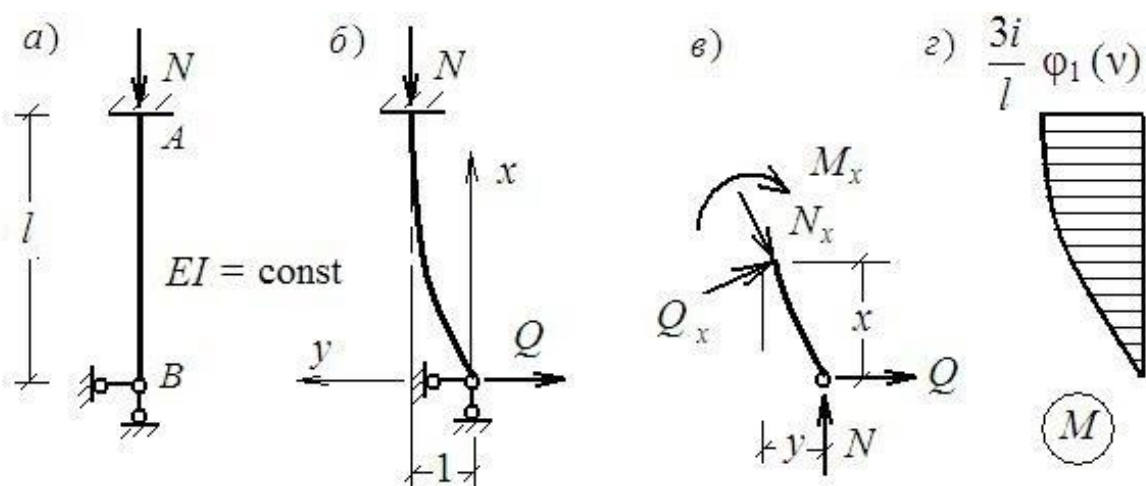


Рис. 6.9. Определение реакций от единичных перемещений

Определим опорные реакции от линейного смещения нижнего конца стержня на единицу (рис. 6.9, б). Примем начало координат-

ных осей в точке B , отсечем нижнюю часть (рис. 6.9, ϵ) и составим выражение для изгибающего момента в сечении с абсциссой x

$$\sum M = M(x) - N \cdot y - Q \cdot x = 0.$$

Отсюда находим $M(x) = N \cdot y + Q \cdot x$.

Подставим это значение в приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (6.1), перенесем неизвестные члены влево и введем обозначение (6.3). В итоге получим

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = -\frac{Q}{EI} x.$$

Решение неоднородного уравнения такого типа рассмотрено в разделе 6.3. Для данного уравнения результат будет следующим

$$y(x) = y_0 + y_n = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - \frac{Q}{N} x. \quad (6.21)$$

Произвольные постоянные определим из граничных условий:

1) при $x = 0, y = 0$;

2) при $x = l, y' = 0$, где $y'(x) = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x - \frac{Q}{N}$,

откуда затем находим 1) $y(0) = A = 0$;

2) $y'(l) = \alpha B \cos \alpha l - \frac{Q}{N} = 0$, откуда $B = \frac{Q}{\alpha N \cos \alpha l}$.

Подставим эти значения и $N = \alpha^2 EI$ в (6.21) и получим

$$y(x) = \frac{Q \sin \alpha x}{\alpha^3 EI \cos \alpha l} - \frac{Q}{\alpha^2 EI} x. \quad (6.22)$$

Для определения горизонтальной реакции Q используем третье условие: при $x = l; y = 1$, а также введем обозначение (6.9).

В результате получим

$$y(x) = \frac{Q \sin v}{\alpha^3 EI \cos v} - \frac{Ql}{\alpha^2 EI} = 1, \text{ откуда } Q = \frac{\alpha^3 EI}{\operatorname{tg} v - v}.$$

Приведем это выражение к виду, используемому при решении задач прочности, путем умножения числителя и знаменателя на l^3

$$Q = \frac{3i}{l^2} \cdot \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \frac{3i}{l^2} \eta_1(v).$$

Изгибающий момент в защемлении на опоре A равен

$$M(l) = N \cdot y(l) + Q \cdot l = \alpha^2 EI \cdot 1 + \frac{\alpha^3 EI}{\operatorname{tg} v - v} l = \frac{3i}{l} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \frac{3i}{l} \cdot \phi_1(v).$$

Аналогичным образом определяются реакции по концам стержней для других вариантов закрепления. Результаты расчетов сведены в табл. 6.1.

Реакции и усилия от единичных перемещений

№ п.п.	Схема связей	Задаваемое перемещение	$N = 0$	$N > 0$
1				$3i \varphi_1(v)$
2				$\frac{3i}{l} \varphi_1(v)$
3				$4i \varphi_2(v)$
4				$\frac{6i}{l} \varphi_4(v)$
5			$Q = 0$	$Q = -\frac{i v^2}{l^2}$

Для удобства использования всем значениям реакций придан вид, применяемый при решении задач прочности. Отличие состоит в том, что для стержней, в которых имеет место продольная сила, значения реакций умножаются на соответствующие трансцендентные функции (прил. 5).

Можно показать, что при $N = 0$ и, соответственно, $v = 0$ все функции будут равны единице. Возьмем, например, функцию $\eta_1(v)$. При $v = 0$ имеем

$$-\frac{0}{3(\operatorname{tg} 0 - 0)} = \frac{0}{0},$$

т. е. возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Раскроем ее по правилу Лопитала $\frac{v^2 \cos^2 v}{1 - \cos^2 v}$, что при $v = 0$ опять приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Повторим операцию

дифференцирования $\frac{v \cos v - v^2 \sin v}{\sin v}$ и снова получим неопреде-

ленность $\frac{0}{0}$. Еще раз продифференцируем числитель и знамена-

тель по v : $\frac{\cos v - v \sin v - 2v \sin v - v^2 \cos v}{\cos v}$, что при $v = 0$ дает $\frac{1}{1} = 1$.

Аналогичные доказательства можно привести и для других функций.

Чтобы данные табл. 6.1 можно было использовать и для стержней, в которых продольная сила отсутствует, в ней указаны значения реакций при $N = 0$. Под номером 5 приведена горизонтальная реакция для шарнирного стержня, по аналогии обозначенная через Q , хотя изгибающий момент в этом стержне отсутствует.

6.4.3. Определение реакций для частных случаев

Для ряда конструкций (в частности, для статически определимых систем) использование метода перемещений в общем виде оказывается нецелесообразным, но необходимым при решении задач устойчивости. Однако для конструкций типа консольной стойки ступенчатого сечения и для ряда других случаев, когда ничто не препятствует смещению узлов, задачу можно решить без постановки линейных связей, что заметно понижает число основных неизвестных метода перемещений.

В расчетных схемах, представленных на рис. 6.10, основную систему метода перемещений получают введением в заданную систему дополнительных узловых связей, препятствующих только угловым смещениям (так называемая «плавающая» заделка).

На рис. 6.10, *a* изображена стойка ступенчатого поперечного сечения. Так как табл. 6.1 составлена для стержней постоянного сечения, то при выборе основной системы необходимо сечение, где ступенчато меняется жесткость, принимать за узел. В результате в общем случае получается пять неизвестных (рис. 6.10, *б*). Однако, если не ставить линейные связи поскольку ничто не препятствует горизонтальному смещению узлов, то останется только два неизвестных метода перемещений (рис. 6.10, *в*).

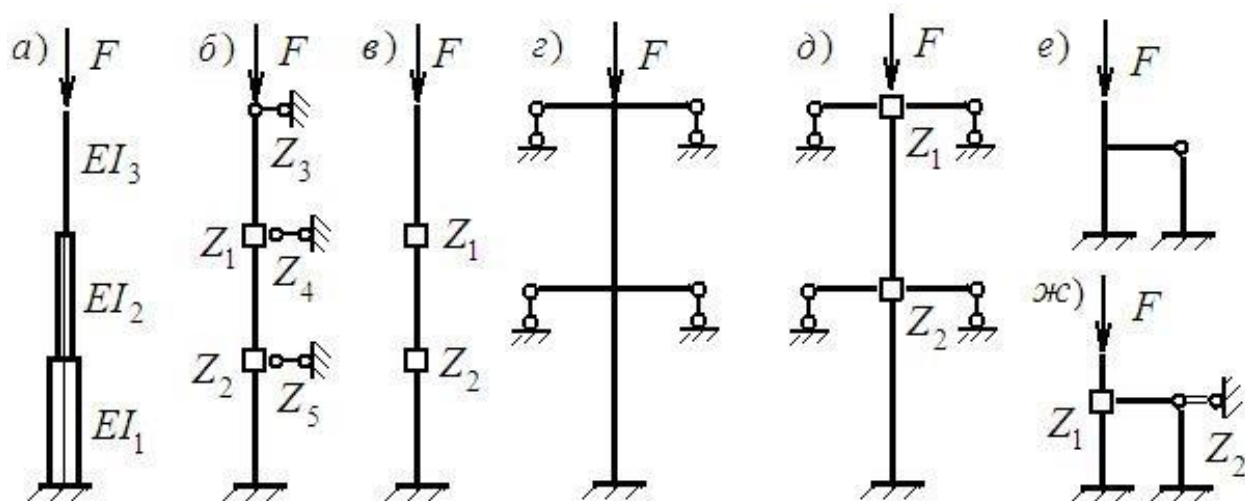


Рис. 6.10. Выбор основной системы метода перемещений без постановки линейных связей

Здесь же показано еще две расчетные схемы, в которых не обязательно ставить все линейные связи. Для схемы на рис. 6.10, *з* можно ограничиться только защемлением узлов (рис. 6.10, *д*). Для схемы на рис. 6.10, *е* нужно ставить одну линейную связь, потому что при задании горизонтального перемещения на уровне первого этажа левая стойка будет препятствовать смещению верхнего конца правой стойки. На консоли же при этом горизонтальную связь можно не ставить.

Чтобы воспользоваться возможностью сократить число неизвестных метода перемещений, нужно иметь значения реакций для стержней двух типов:

- 1) один конец защемлен, другой свободный;
- 2) оба конца защемлены.

Определим эти реакции от поворота концов стержней методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси сжатого стержня.

Рассмотрим консольный стержень (рис. 6.11, а).

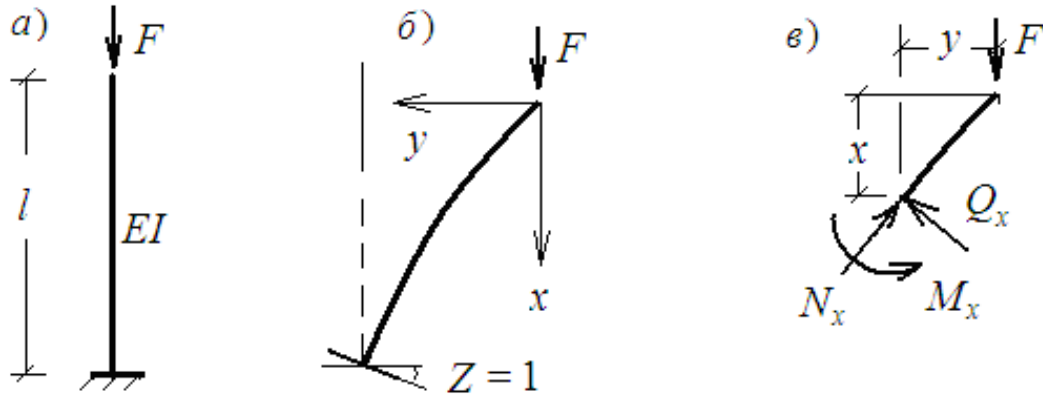


Рис. 6.11. Определение момента в защемлении консольной стойки

Зададим поворот защемления на угол $Z = 1$ (рис. 6.11, б), отсечем верхнюю часть стержня и составим уравнение равновесия для определения изгибающего момента $M(x)$ (рис. 6.11, в)

$$\sum M = P \cdot y - M(x) = 0, \text{ откуда } M(x) = P \cdot y.$$

Подставим это значение в дифференциальное уравнение, которое приведем к обычному виду с учетом обозначения (6.3)

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0.$$

Решение данного уравнения хорошо известно

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Произвольные постоянные определим, используя граничные условия

- 1) при $x = 0, y = 0$;
- 2) при $x = l, y' = -1$, где $y'(x) = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x - \frac{Q}{N}$.

В принятой системе координат поворот имеет знак « \leftarrow », но в дальнейшем этот факт не играет особой роли.

В итоге имеем 1) $y(0) = A = 0$; 2) $y'(l) = \alpha B \cos \alpha l = -1$,
откуда $B = -\frac{1}{\alpha \cos v}$ – здесь и далее введено обозначение (6.9).

Таким образом,

$$y(x) = -\frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos v}.$$

Далее получим изгибающий момент в защемлении

$$M(l) = F \cdot y(l) = -\alpha^2 EI \frac{\sin \alpha l}{\alpha \cos v} = -iv \operatorname{tg} v.$$

Аналогичным способом вычисляются реакции для защемленного стержня. Результаты сведены в табл. 6.2. Уравнения устойчивости, получаемые с помощью этих реакций, также являются трансцендентными, и их корни находятся путем подбора. Числовые значения этих функций приведены в прил. 6.

Таблица 6.2

Реакции от единичных перемещений

№ п.п.	Схема связей	Задаваемое перемещение	$N = 0$	$N > 0$
1				
2				

6.4.4. Упрощения при расчете симметричных рам на устойчивость

Как указывалось выше, при решении задач устойчивости из-за отсутствия линейной зависимости между силами и перемещениями принцип независимости действия сил уже не соблюдается. Поэтому разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную, как при статическом расчете, неприменимо. Таким образом, симметрией рамы можно воспользоваться только в случае, когда упруго-симметричная рама нагружена симметричной нагрузкой. Упрощение возможно благодаря доказательству того факта, что общий определитель, составленный для всей системы, можно разложить на два определителя, соответствующих симметричной и кососимметричным формам потери устойчивости.

Рассмотрим симметричную раму при симметричном нагружении (рис. 6.12, а).

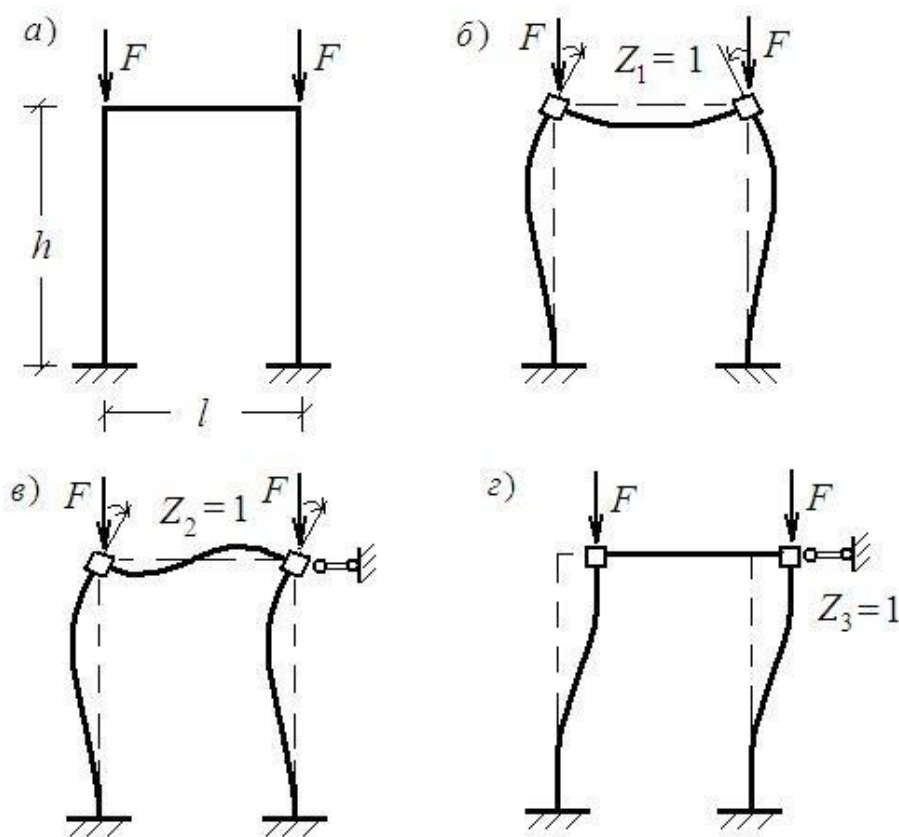


Рис. 6.12. Формы потери устойчивости симметричной рамы

При расчете методом перемещений рама имеет три неизвестных перемещения. Решим задачу с помощью групповых неизвест-

ных, формы деформаций от единичных значений которых показаны на рис. 6.12, $\bar{b} - z$ (форма \bar{b} соответствует симметричной форме потери устойчивости, формы v и z – кососимметричным формам). В силу симметрии побочные коэффициенты $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{31}$ будут равны нулю. В итоге общий определитель распадается на два

$$|K| = \begin{vmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |K_c| & 0 \\ 0 & |K_{kc}| \end{vmatrix} = |K_c| \cdot |K_{kc}| = 0,$$

что позволяет рассматривать отдельно $|K_c| = 0$ и $|K_{kc}| = 0$.

Таким образом, при исследовании упругой устойчивости симметричных и симметрично нагруженных систем достаточно отдельно рассмотреть симметричные и кососимметричные формы потери устойчивости. Комбинированные формы потери устойчивости не могут дать меньшей критической нагрузки, чем наиболее опасная симметричная или кососимметричная форма. Как правило, нужно рассматривать оба типа форм потери устойчивости, однако в ряде случаев нетрудно предугадать наиболее опасную форму (симметричную или кососимметричную). Отдельные исследования даже двух типов форм существенно снижают трудоемкость задачи по сравнению с расчетом без учета симметрии.

6.5. Контрольные вопросы

1. Что такое критическая нагрузка? Каковы критерии ее определения?
2. Какой критерий применяется при реализации метода Эйлера?
3. Сформулируйте допущения, вводимые при решении задач устойчивости стержневых систем.
4. Какое дифференциальное уравнение положено в основу метода Эйлера для определения критической силы?
5. Как качественно сказываются способы закрепления стержней на величине критической силы?
6. Что такое приведенная длина стержня, от чего она зависит и как определяется?

7. В каких пределах изменяется критический параметр при расчете стержневых систем?

8. Каким получается уравнение устойчивости и сколько оно имеет корней?

9. Какое явление наблюдается в момент потери устойчивости стержня?

10. Укажите формы потери устойчивости, значения критических сил и расчетных длин для прямолинейных стержней с различными закреплениями концов.

11. Изложите идею использования метода перемещений в задачах устойчивости. Укажите допущения, запишите уравнение устойчивости в общем виде.

12. В чем отличие метода перемещений, используемого при решении задач устойчивости, от метода перемещений, реализуемого при решении задач прочности?

13. Какой критерий устойчивости применяется в методе перемещений?

14. Каким методом определяются реакции в сжатых стержнях от единичных перемещений?

15. Какие стержневые системы можно рассчитывать без постановки линейных связей?

16. Укажите возможные упрощения расчета на устойчивость при использовании основной системы без постановки линейных связей. Когда они применимы?

17. В каких случаях можно использовать симметрию системы при решении задач устойчивости? Назовите упрощения расчета на устойчивость симметричных систем.

18. Каковы формы потери устойчивости в симметричных рамах? Какие из них наиболее опасны в свободных и несвободных рамах?

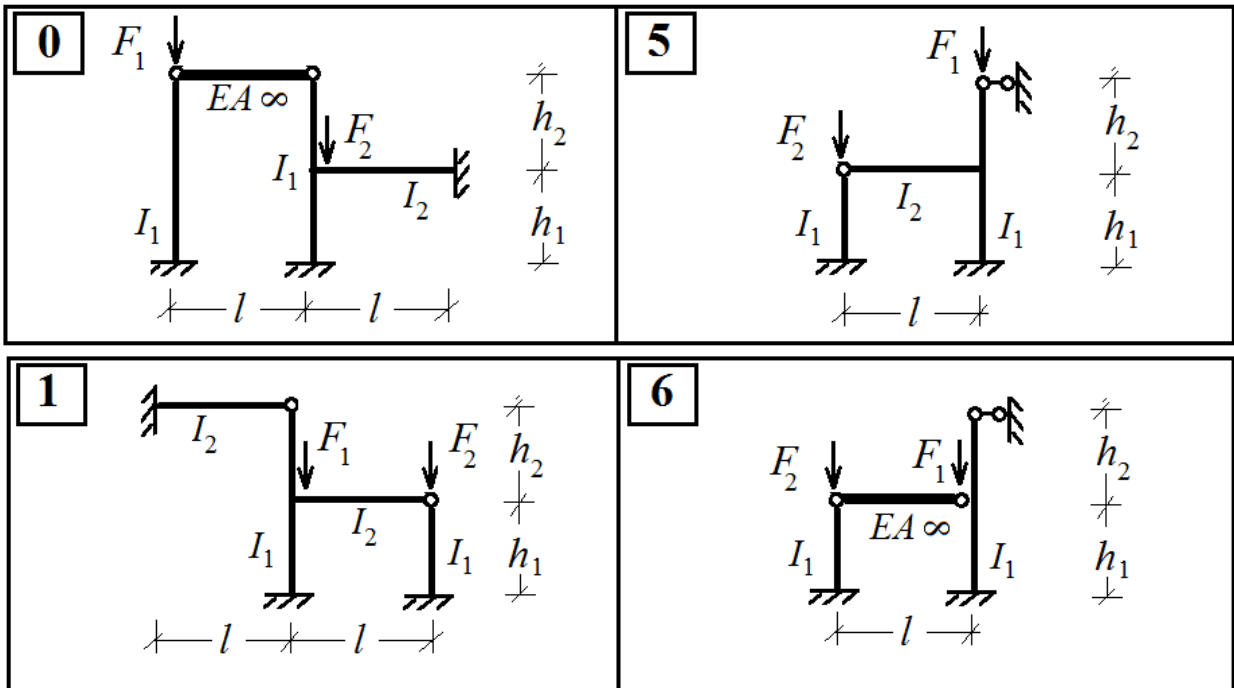
6.6. Контрольная работа № 6. Расчет плоской рамы на устойчивость

Задание. Рассчитать статически неопределимую раму на устойчивость. Исходные данные определяются по табл. 6.3 и расчетным схемам рис. 6.13.

Таблица 6.3

Исходные данные для контрольной работы № 6

Первая цифра шифра	$\frac{F_1}{F_2}$	l, м	Вторая цифра шифра	EI ₁ , кН·м ²	h ₂ , м	Третья цифра шифра (№ схемы)	h ₁ , м	$\frac{I_1}{I_2}$
0	2,5	4	0	5000	3,2	0	4,2	2
1	1,6	6	1	6200	2,8	1	5,4	3
2	2,2	4	2	6400	2,6	2	3,3	4
3	1,5	5	3	5600	4,4	3	4,4	2
4	2,8	6	4	6400	3,4	4	4,8	3
5	2,1	3	5	7200	4,0	5	5,1	4
6	1,8	4	6	7400	3,0	6	3,8	2
7	2,6	5	7	5800	2,2	7	4,5	3
8	3,0	6	8	6600	4,4	8	6,0	4
9	3,2	5	9	8200	3,5	9	5,2	2



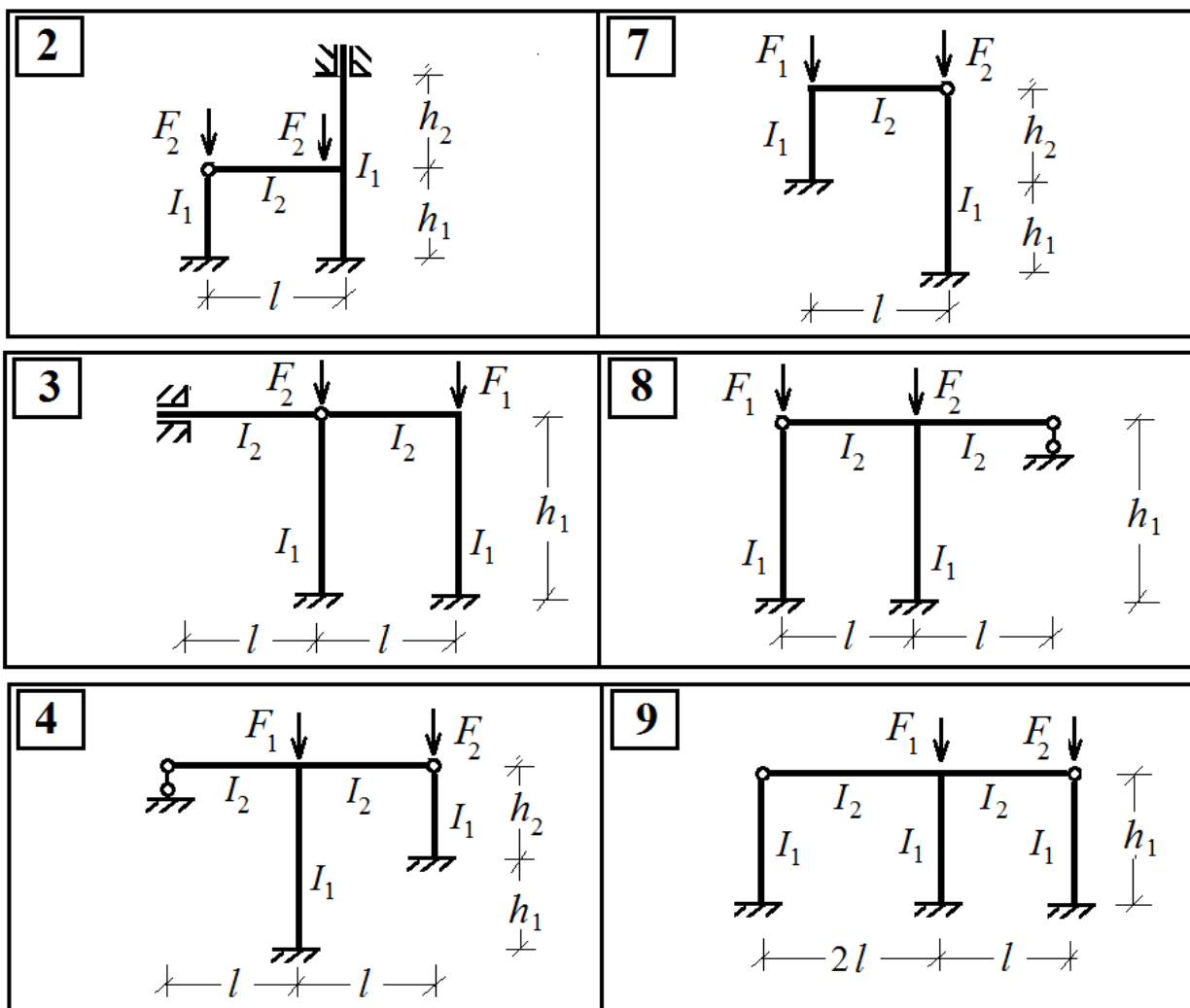


Рис. 6.13. Расчетные схемы для контрольной работы № 6

Последовательность расчета

1. Изобразить в масштабе расчетную схему с указанием размеров и нагрузки.
2. Вычислить степень кинематической неопределенности по формуле $n_k = n_y + n_d$.
3. Выбрать основную систему метода перемещений, введя дополнительные связи, препятствующие смещению узлов системы.
4. Пронумеровать все стержни расчетной схемы. Определить относительные жесткости стержней по формуле $i = EI/l$ и выразить их через общий множитель i_0 – относительную жесткость любого стержня.

5. Записать для всех сжатых стержней их критические параметры по формуле $\nu = h\sqrt{\frac{N}{EI}}$ и выразить их через ν_0 – критический параметр любого стержня.

6. Составить уравнение устойчивости в общем виде для данной расчетной схемы.

7. Построить в основной системе схемы деформаций и эпюры моментов от единичных смещений по направлению дополнительных связей, воспользовавшись таблицами прил. 3, 4.

8. Определить реакции в дополнительных связях от заданных единичных смещений.

9. Записать уравнение устойчивости в развернутом виде.

10. Решить данное уравнение путем подбора критического параметра $\nu_{кр}$ вручную при помощи таблиц трансцендентных функций (прил. 3) либо в учебной компьютерной программе BUCLING (прил. 7).

11. Определить величину критических сил $F_{кр}$ и расчетные длины l_0 для всех сжатых стержней рамы

$$F_{кр} = \frac{\nu_{кр}^2 \cdot EI}{h}; \quad l_0 = \frac{\pi \cdot h}{\nu_{кр}}.$$

Пример решения

Задание. Рассчитать на устойчивость статически неопределимую раму (рис. 6.14). Найти величины критических сил и расчетные длины сжатых стержней.

Дано: $EI = 10\,000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$; $F_2 = 0,81F_1$.

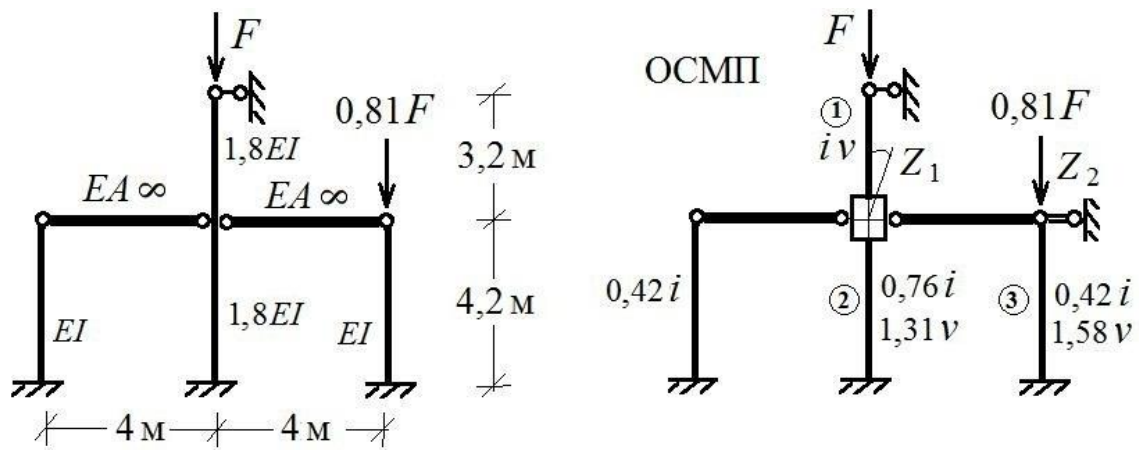


Рис. 6.14. Заданная рама и основная система метода перемещений

- Вычисляем степень кинематической неопределенности

$$n_k = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2.$$

- Записываем уравнение устойчивости в общем виде для данной расчетной схемы

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21} = 0.$$

- Выбираем основную систему метода перемещений (см. рис. 6.14).

- Пронумеруем все стержни расчетной схемы. Определим относительные жесткости стержней по формуле $i_i = EI_i / l_i$ и выразим их через общий множитель i – относительную жесткость первого стержня

$$i_1 = \frac{1,8EI}{3,2} = i; i_2 = \frac{1,8EI \cdot 3,2}{4,2 \cdot 1,8} = 0,76i; i_3 = \frac{EI \cdot 3,2}{4,2 \cdot 1,8} = 0,42i.$$

- Записываем для всех сжатых стержней их критические параметры по формуле $v_i = h_i \sqrt{\frac{N_i}{EI}}$ и выражаем их через v – критический параметр первого стержня

$$v_1 = 3,2 \sqrt{\frac{F}{1,8EI}} = 2,385 \sqrt{\frac{F}{EI}} = v;$$

$$v_2 = 4,2 \sqrt{\frac{F}{1,8EI}} = \frac{3,13}{2,385} = 1,31v;$$

$$v_3 = 4,2 \sqrt{\frac{0,81F}{EI}} = \frac{3,78}{2,385} = 1,58v.$$

• Строим в основной системе схемы деформаций рамы от последовательно задаваемых $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$ и эпюры моментов M_1^0 и M_2^0 от единичных смещений (рис. 6.15, 6.16) по направлению дополнительных связей, используя таблицы прил. 3 и 4.

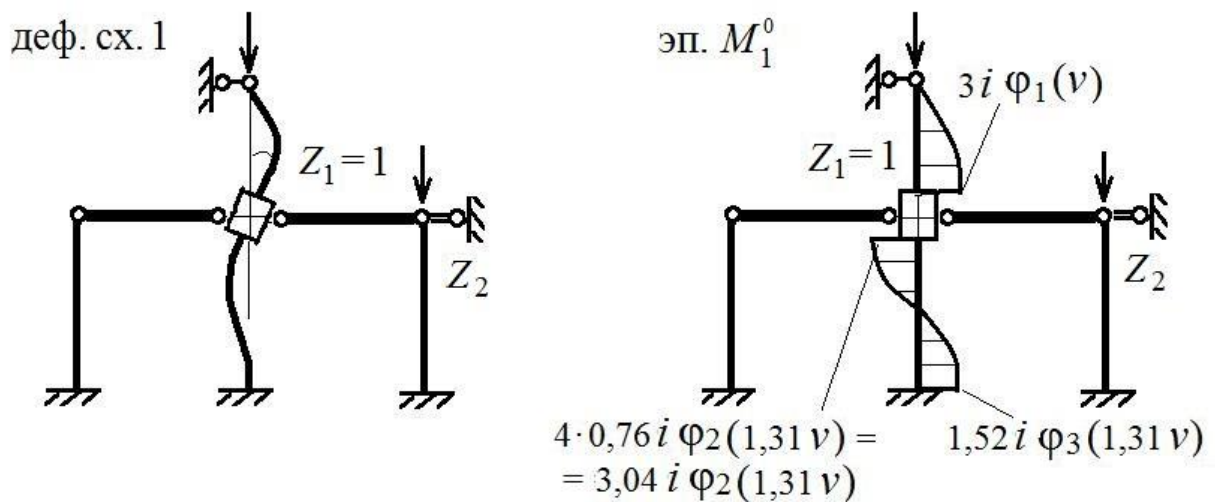


Рис. 6.15. Деформированная схема и эпюра моментов от $Z_1 = 1$

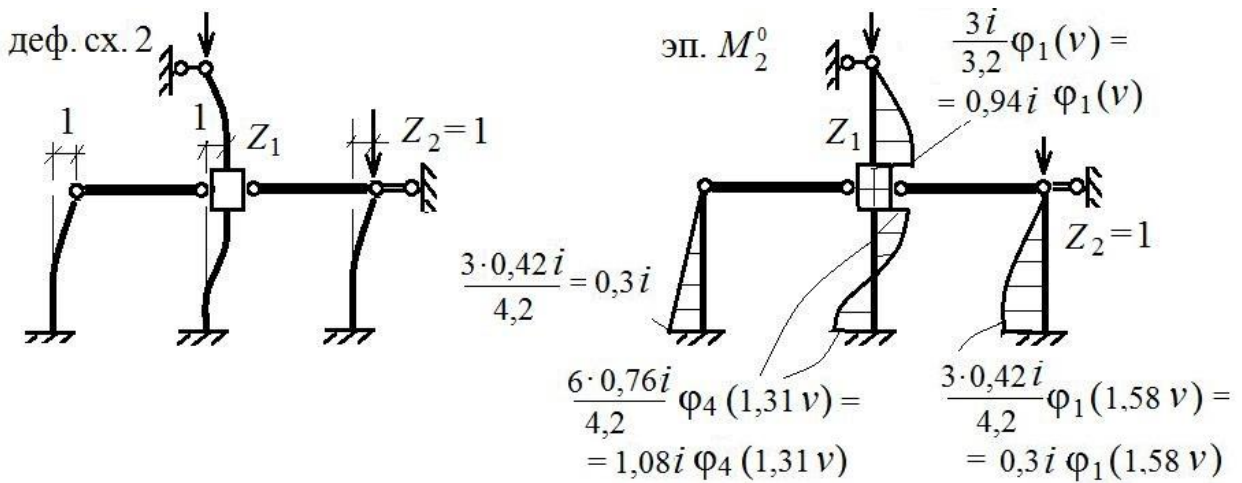


Рис. 6.16. Деформированная схема и эпюра моментов от $Z_2 = 1$

- Вычисляем реакции в дополнительных связях от заданных единичных смещений из условия равновесия отсеченных частей системы (рис. 6.17), вырезанных с эпюр моментов от единичных неизвестных

$$r_{11} = 3i \cdot \varphi_1(v) + 3,04i \cdot \varphi_2(1,31v);$$

$$r_{12} = 0,94i \cdot \varphi_1(v) - 1,08i \cdot \varphi_4(1,31v);$$

$$r_{22} = 0,29i \cdot \eta_1(v) + 0,07i + 0,52i \cdot \eta_2(1,31v) + 0,07i \cdot \eta_1(1,58v).$$

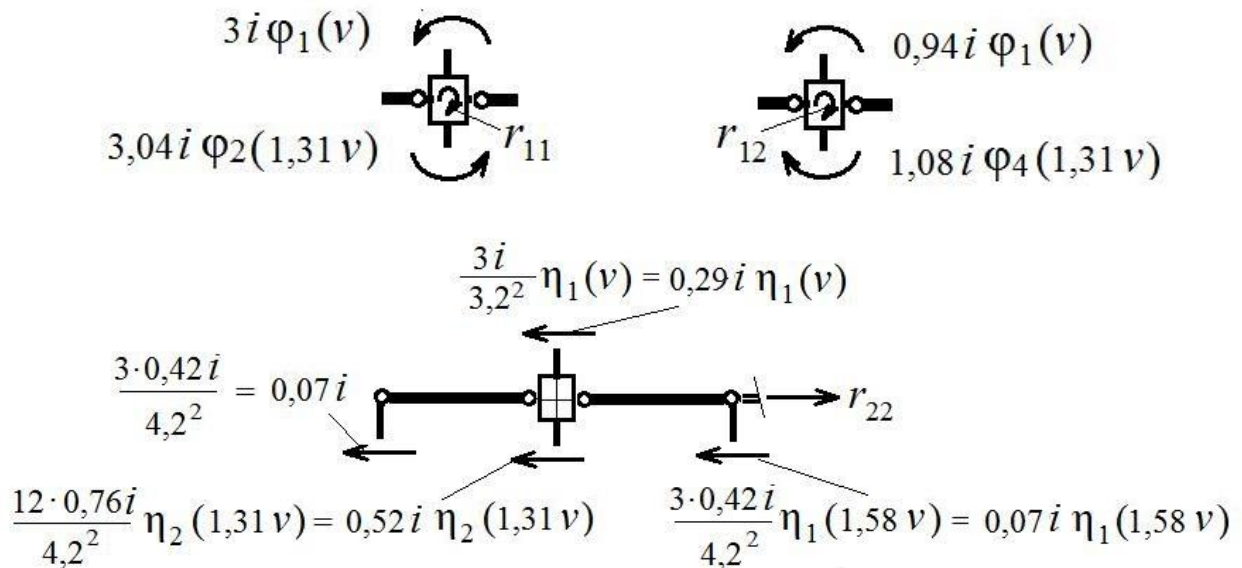


Рис. 6.17. Равновесие отсеченных частей основной системы

- Записываем уравнение устойчивости в развернутом виде

$$(3i \cdot \varphi_1(v) + 3,04i \cdot \varphi_2(1,31v)) \cdot (0,29i \cdot \eta_1(v) + 0,07i + 0,52i \cdot \eta_2(1,31v) + 0,07i \cdot \eta_1(1,58v)) - (0,94i \cdot \varphi_1(v) - 1,08i \cdot \varphi_4(1,31v))^2 = 0.$$

Выносим i за скобки. Поскольку $i \neq 0$, уравнение принимает вид

$$(3 \cdot \varphi_1(v) + 3,04 \cdot \varphi_2(1,31v)) \cdot (0,29 \cdot \eta_1(v) + 0,07 + 0,52 \cdot \eta_2(1,31v) + 0,07 \cdot \eta_1(1,58v)) - (0,94 \cdot \varphi_1(v) - 1,08 \cdot \varphi_4(1,31v))^2 = 0.$$

- Решаем уравнение устойчивости в учебной компьютерной программе BUCLING (прил. 7). Для этого записываем и набираем на ПК функцию для определения критического параметра $v_{кр}$

$$(3 * F1(x) + 3,04 * F2(1,31 * x)) * (0,29 * H1(x) + 0,07 + 0,52 * H2(1,31 * x) + 0,07 * H1(1,58 * x)) - (0,94 * F1(x) - 1,08 * F4(1,31 * x))^2$$

- В результате получаем критические параметры: $v = 2,02 = v_{кр1}$; $v_{кр2} = 1,31 \cdot 2,02 = 2,65$; $v_{кр3} = 1,58 \cdot 2,02 = 3,19$.

- Определяем критические силы $F_{кр}$ и расчетные длины l_0 для всех сжатых стержней по формулам $F_{кр} = \frac{v_{кр}^2 \cdot EI}{h^2}$; $l_0 = \frac{\pi \cdot h}{v_{кр}}$:

$$F_{кр1} = \frac{2,02^2 \cdot 1,8 \cdot 9000}{3,2^2} = 6455,3 \text{ кН}; \quad l_{01} = \frac{3,14 \cdot 3,2}{2,02} = 4,97 \text{ м};$$

$$F_{кр2} = \frac{2,65^2 \cdot 1,8 \cdot 9000}{4,2^2} = 6449,2 \text{ кН}; \quad l_{02} = \frac{3,14 \cdot 4,2}{2,65} = 4,98 \text{ м};$$

$$F_{\text{кр3}} = \frac{3,19^2 \cdot 9000}{4,2^2} = 5192 \text{ кН}; \quad l_{03} = \frac{3,14 \cdot 4,2}{3,19} = 4,13 \text{ м.}$$

При $F = F_{\text{кр1}} = 6455,3$ кН имеем

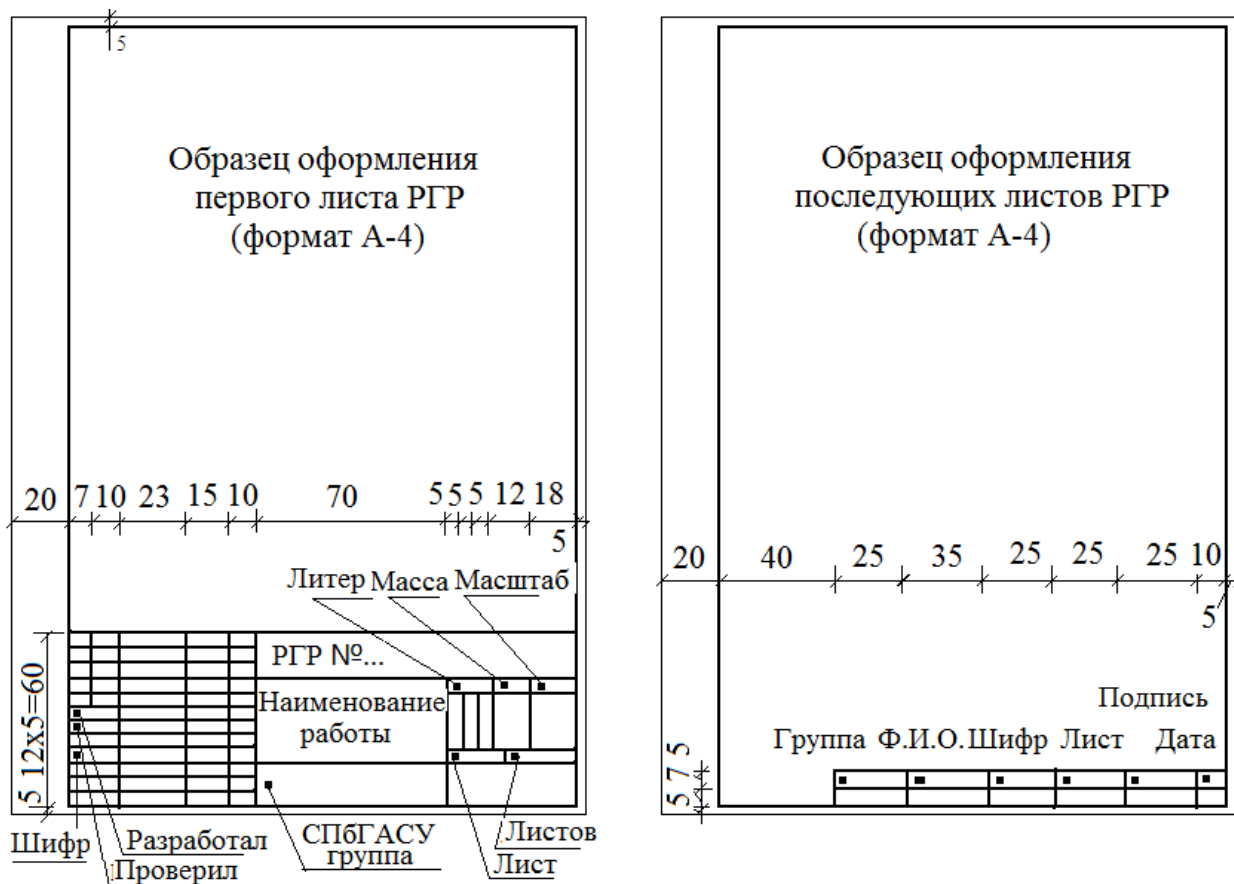
$$0,81F = 5228,8 > F_{\text{кр3}} = 5191,9 \text{ кН.}$$

В итоге принимаем $F = F_{\text{кр1}} = 6455,3$ кН.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Образец оформления листов формата А-4 контрольной работы



Пример выполнения и оформления контрольной работы № 3

Данные к расчету:

$l = 4,0 \text{ м}, h = 3,0 \text{ м}, \alpha = 2,$
 $F_1 = 10 \text{ кН}, q_2 = 3 \text{ кН/м}.$

Степень статической неопределимости

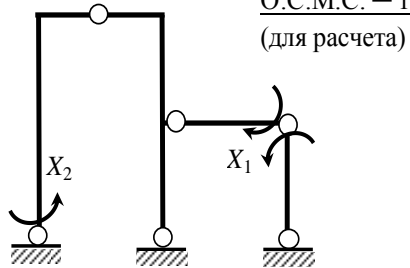
$$n_c = 3K - \Pi = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

Система канонических уравнений

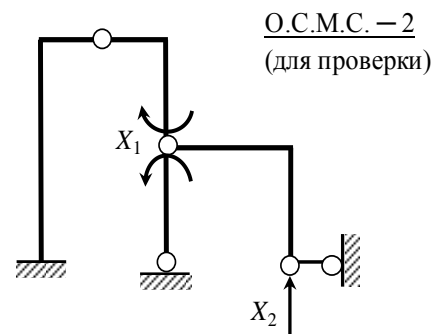
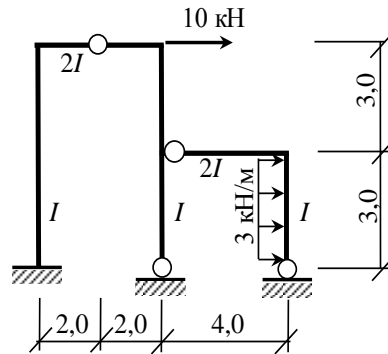
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0$$

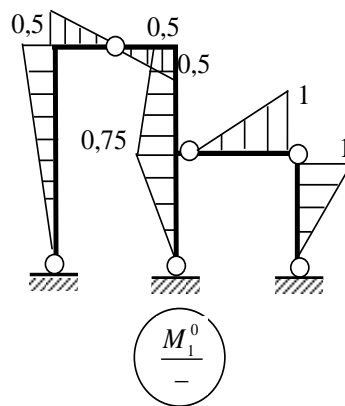
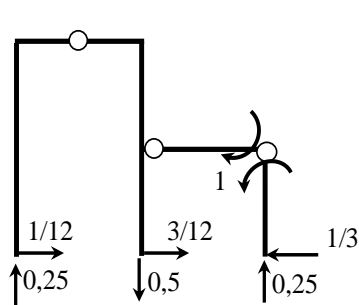
Варианты основных систем (О.С.М.С.)



Расчетная схема рамы

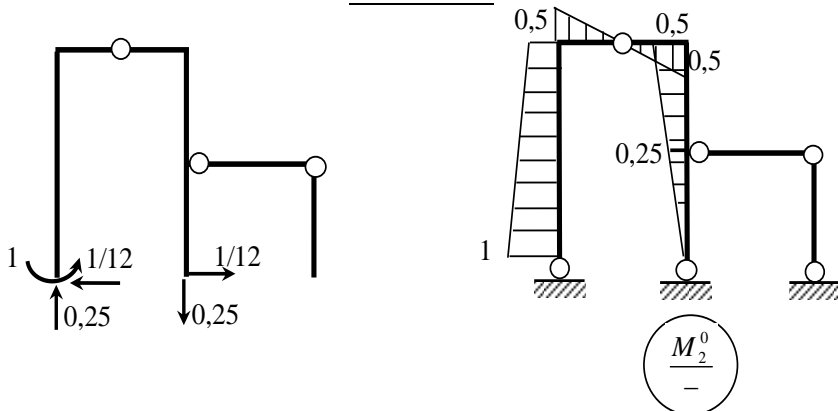


Состояние 1

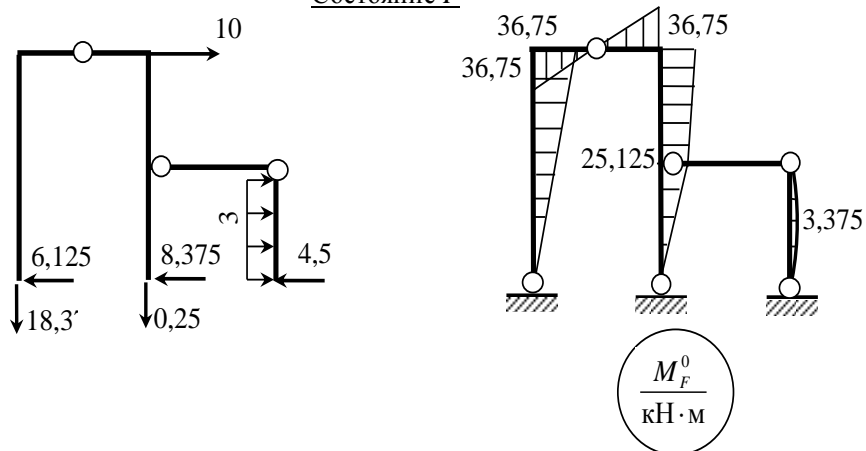


				КМ РГР № 3							
				Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил							
Разраб	Кущенко В.Я.										
Пров.	Масленников										
Шифр	14823			СПбГАСУ Строительный факультет		Лист 1	Листов 5				
				гр. 1-П-3							

Состояние 2



Состояние F



Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений

$$\delta_{11} = \sum_m \int_0^l \frac{(M_1^0)^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{6}{6} \cdot 2 \cdot 0,5^2 + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 0,5^2 + \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,75^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,75) + \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 0,75^2 + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 1^2 + \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 1^2 \right] = \frac{4,083}{EI} \frac{\text{рад}}{\text{кН} \cdot \text{м}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_m \int_0^l \frac{M_1^0 M_2^0}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{6}{6} (2 \cdot 0,5^2 + 1 \cdot 0,5) + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 0,5^2 + \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,25^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25) + \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \right] = \frac{2,042}{EI} \frac{\text{рад}}{\text{кН} \cdot \text{м}};$$

$$\delta_{22} = \sum_m \int_0^l \frac{(M_2^0)^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{6}{6} (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,5) + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 0,5^2 + \frac{6}{6} \cdot 2 \cdot 0,5^2 \right] = \frac{4,167}{EI} \frac{\text{рад}}{\text{кН} \cdot \text{м}}.$$

Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	2		

$$\Delta_{1F} = \sum_m \int_0^l \frac{M_1^0 M_F^0}{EI} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{6}{6} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 - \frac{2}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 - \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 2 \cdot 0,75 \cdot 25,125 + 0,75 \cdot 36,75 + 0,5 \cdot 25,125) - \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot 25,125 + \frac{2}{3} \cdot 3,375 \cdot 3 \cdot 0,5 \right] = -\frac{121,749}{EI} \text{ рад};$$

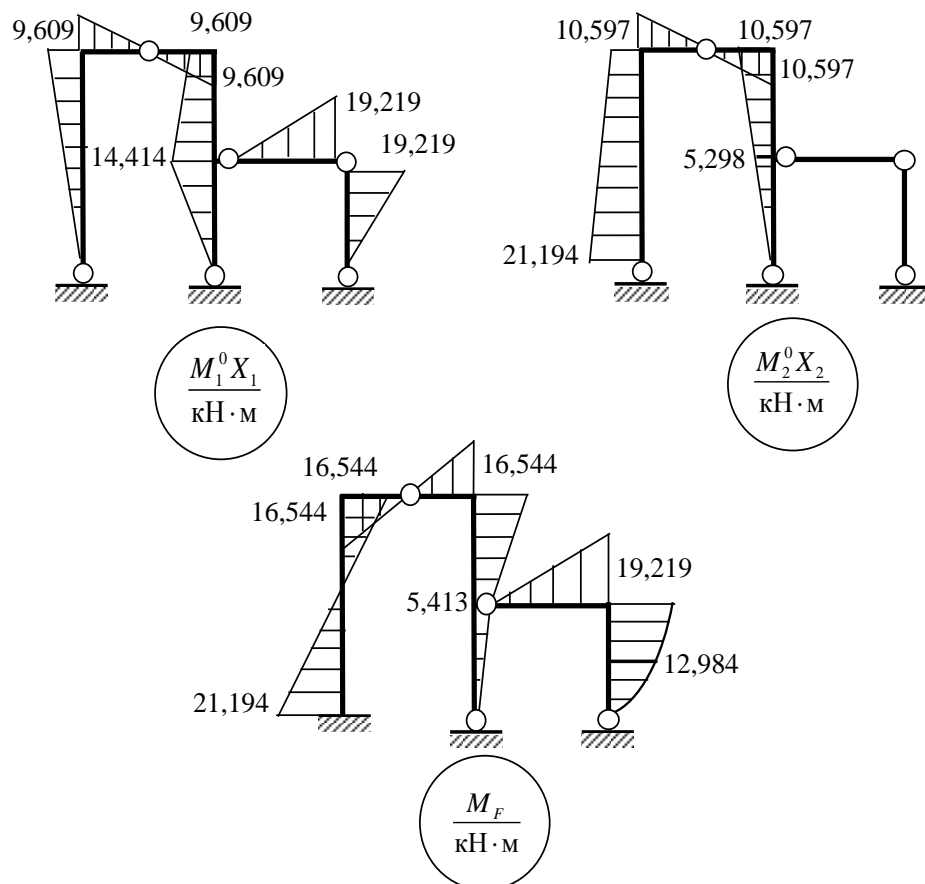
$$\Delta_{2F} = \sum_m \int_0^l \frac{M_1^0 M_F^0}{EI} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{6}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 1 \cdot 36,75) - \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 - \frac{3}{6} (2 \cdot 0,5 \cdot 36,75 + 2 \cdot 0,25 \cdot 25,125 + 0,5 \cdot 25,125 + 36,75 \cdot 0,25) - \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 25,125 \cdot 0,25 \right] = -\frac{127,562}{EI} \text{ рад}.$$

Решение системы уравнений

$$\frac{4,083}{EI} X_1 + \frac{2,042}{EI} X_2 - \frac{121,749}{EI} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4,083 X_1 + 2,042 X_2 = 121,749 \\ 2,042 X_1 + 4,167 X_2 = 127,562 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 19,219 \text{ кН}\cdot\text{м} \\ X_2 = 21,194 \text{ кН}\cdot\text{м} \end{cases}$$

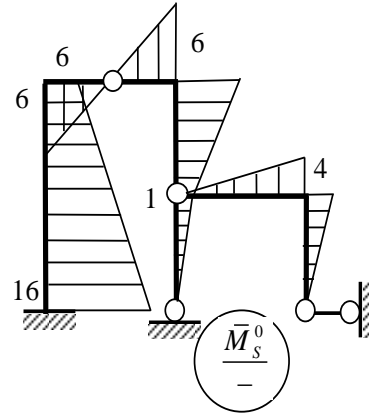
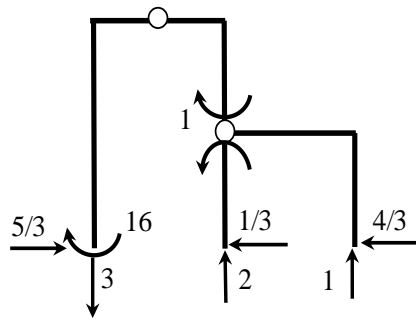
$$\frac{2,042}{EI} X_1 + \frac{4,167}{EI} X_2 - \frac{127,562}{EI} = 0$$

Построение эпюры $M_F = M_1^0 X_1 + M_2^0 X_2 + M_F^0$ в заданной расчетной схеме



Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	3		

Деформационная проверка расчета

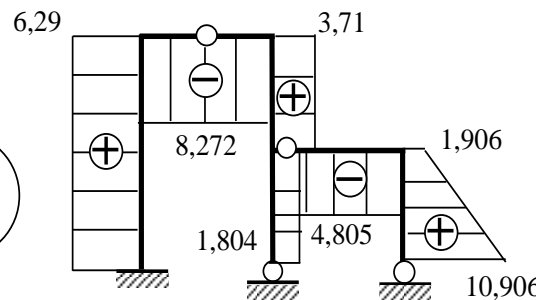
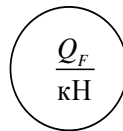
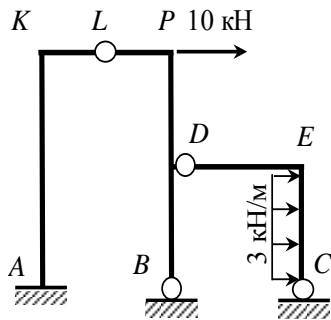


О.С.М.С. – 2

$$\sum_m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_F}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{6}{6} (-2 \cdot 16 \cdot 21,194 + 2 \cdot 10 \cdot 16,544 + 16 \cdot 16,544 - 10 \cdot 21,194) + 2 \cdot \frac{2}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 16,544 + \frac{3}{6} (2 \cdot 10 \cdot 16,544 + 2 \cdot 5,413 \cdot 1 + 5,413 \cdot 10 + 1 \cdot 16,544) + \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5,413 + \frac{4}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 19,219 + \frac{3}{6} (1 \cdot 19,219 + 4 \cdot 0,5 \cdot 12,984) \right] = \frac{1}{EI} (805,634 - 805,372) = \frac{0,262}{EI} \approx 0.$$

Погрешность $\frac{0,262}{805,634} 100 = 0,032\% < [0,5\% - 1\%]$

Вычисление поперечных сил по зависимости $Q = dM/dx$ и построение эпюры Q_F .



Участок АК

$$Q_{AK} = \frac{21,194 + 16,544}{6} = 6,29 \text{ кН.}$$

Участки KL и LP

$$Q_{KL} = Q_{LP} = -\frac{16,544}{2} = -8,272 \text{ кН.}$$

Участок PD

$$Q_{PD} = \frac{16,544 - 5,413}{3} = 3,71 \text{ кН.}$$

Участок BD

$$Q_{BD} = \frac{5,413}{3} = 1,804 \text{ кН.}$$

Участок DE

$$Q_{DE} = -\frac{19,219}{4} = -4,805 \text{ кН.}$$

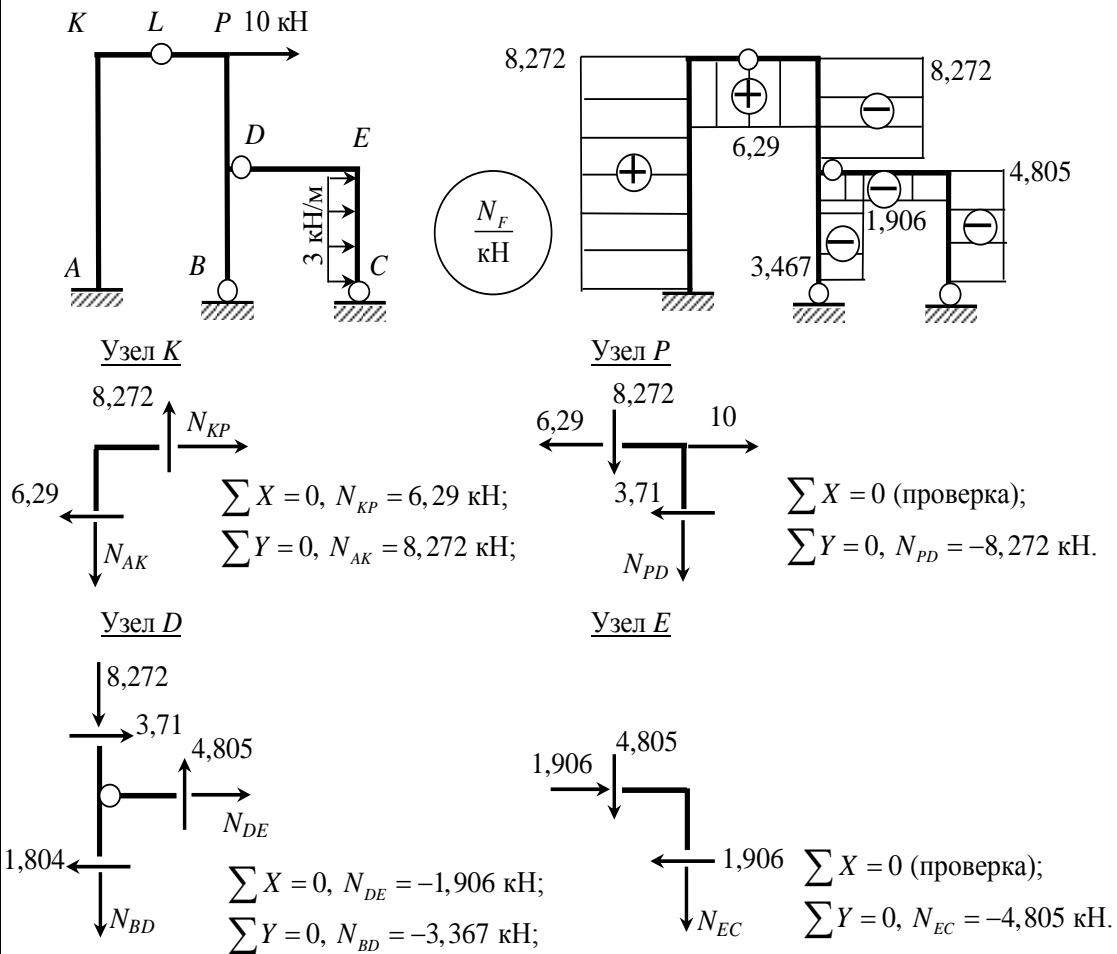
Участок CE

$$Q_E = -0,5 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{19,219}{3} = 1,906 \text{ кН.}$$

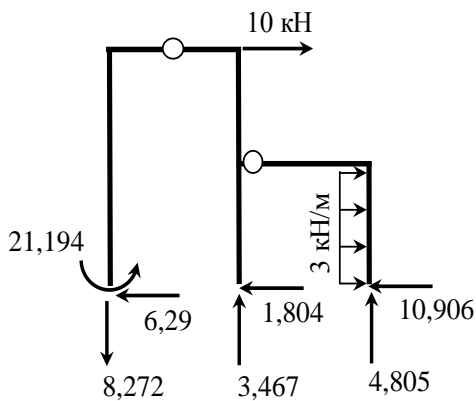
$$Q_C = 0,5 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{19,219}{3} = 10,906 \text{ кН.}$$

Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Куценко В.Я.	14823	4		

Вычисление продольных сил и построение эпюры N_F



Статические проверки расчета



$$\sum X = 10 + 3 \cdot 3 - 6,29 - 1,804 - 10,906 = 19 - 19 = 0;$$

$$\sum Y = -8,272 + 3,467 + 4,805 = 8,72 - 8,272 = 0;$$

$$\sum M_A = 10 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 21,194 - 3,467 \cdot 4 - 4,805 \cdot 8 = 73,5 - 73,502 = -0,002 \approx 0.$$

Погрешность $\frac{0,002}{73,5} 100 = 0,003\% \ll [0,5\%]$

Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кушенко В.Я.	14823	5		

Реакции и усилия в изгибаемых стержнях от единичных смещений связей и внешних воздействий

№ п/п	Схема воздействия	Значения опорных реакций	Эпюры изгибающих моментов
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

$i = \frac{EI}{l}$ — относительная жесткость стержня; $(u + v) = 1$

Реакции и усилия в сжато-изогнутых стержнях от единичных смещений связей

№ п/п	Схема воздействия	Значения опорных реакций	Эпюры изгибающих моментов
1		N $\frac{3i}{l} \varphi_1(\nu)$ $3i\varphi_1(\nu)$ $\frac{3i}{l} \varphi_1(\nu)$	
2		N $\frac{3i}{l^2} \eta_1(\nu)$ $\frac{3i}{l} \varphi_1(\nu)$ $\frac{3i}{l^2} \eta_1(\nu)$	
3		N $\frac{12i}{l^2} \eta_2(\nu)$ $\frac{6i}{l} \varphi_4(\nu)$ $\frac{12i}{l^2} \eta_2(\nu)$ $\frac{6i}{l} \varphi_4(\nu)$	
4		N $\frac{6i}{l} \varphi_4(\nu)$ $4i\varphi_2(\nu)$ $\frac{6i}{l} \varphi_4(\nu)$ $2i\varphi_3(\nu)$	
5		N $i\nu \operatorname{tg} \nu$	
6		N $\frac{i\nu}{\operatorname{tg} \nu}$ $\frac{i\nu}{\sin \nu}$	
7		N $\frac{i\nu^2}{l^2}$ $\frac{i\nu^2}{l^2}$	

$$i = \frac{EI}{l}$$
 — относительная жесткость стержня;

$$\nu = l\sqrt{\frac{N}{EI}}$$
 — критический параметр сжато-изогнутого стержня.

**Значения трансцендентных функций метода перемещений
для сжато-изогнутых стержней**

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9194	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,5565
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4763	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191

3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,180	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2π	0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,033	-3,2898

**Значения специальных функций метода перемещений
для сжато-изогнутых стержней**

ν	$\nu / \operatorname{tg} \nu$	$\nu / \sin \nu$	$\nu \cdot \operatorname{tg} \nu$	$\cos \nu$	$\sin \nu$	$\operatorname{tg} \nu$
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,00000	0,00000	0,00000
1,10	0,9967	1,0017	0,0100	0,99500	0,09983	0,10033
0,20	0,9866	1,0067	0,0405	0,98007	0,19867	0,20271
0,30	0,9698	1,0152	0,0928	0,95534	0,29552	0,30934
0,40	0,9461	1,0272	0,1691	0,92106	0,38942	0,42279
0,50	0,9152	1,0429	0,2731	0,87758	0,47943	0,54630
0,60	0,8770	1,0626	0,4105	0,82534	0,56464	0,68414
0,70	0,8311	1,0866	0,5896	0,76484	0,64422	0,84229
0,80	0,7770	1,1152	0,8237	0,69671	0,71736	1,02964
0,90	0,7142	1,1489	1,1341	0,62161	0,78333	1,26016
1,00	0,6421	1,1885	1,5574	0,54030	0,84147	1,55741
1,10	0,5599	1,2343	2,1612	0,45360	0,89121	1,96476
1,20	0,4665	1,2875	3,0866	0,36236	0,93204	2,57215
1,30	0,3609	1,3493	4,6827	0,26750	0,96356	3,60210
1,40	0,2415	1,4207	8,1170	0,16997	0,98545	5,79788
1,50	0,1064	1,5038	21,1521	0,07074	0,99749	14,10142
1,60	-0,0467	1,6007	-54,7721	-0,02920	0,99957	-37,23253
1,70	-0,2209	1,7143	-13,0842	-0,12884	0,99166	-7,69660
1,80	-0,4199	1,8483	-7,7153	0,22720	0,92385	-4,28626
1,90	-0,6491	2,0078	-5,5615	-0,32329	0,94630	-2,92710
2,00	-0,9153	2,1995	-4,3701	-0,41615	0,90930	-2,18504
2,10	-1,2282	2,4328	-3,5907	-0,50485	0,86321	-1,70985
2,20	-1,6014	2,7211	-3,0224	-0,58850	0,80850	-1,37382
2,30	-2,0550	3,0843	-2,5742	-0,66628	0,74571	-0,11921
2,40	-2,6201	3,5531	-2,1984	-0,73739	0,67546	-0,91601
2,50	-3,3466	4,1773	-1,8675	-0,80114	0,59847	-0,74702
2,60	-4,3218	5,0436	-1,5642	-0,85689	0,51550	-0,60160
2,70	-5,711	6,3176	-1,2764	-0,90407	0,42738	-0,47273
2,80	-7,8756	8,3585	-0,9955	-0,94222	0,33499	-0,35553
2,90	-11,769	12,1212	-0,7146	-0,97096	0,23925	-0,24641
3,00	-21,0452	21,2585	-0,4276	-0,98999	0,14112	-0,14255
3,10	-74,4888	74,5533	-0,1321	-0,99914	0,04158	-0,04162
3,20	54,7289	-54,8227	0,1871	-0,99829	-0,05837	0,05847
3,30	20,6573	-20,9192	0,5272	-0,98748	-0,15775	0,15975
3,40	12,8632	-13,3052	0,8967	-0,96680	-0,25554	0,26432
3,50	9,3435	-9,9778	1,3111	-0,93646	-0,35078	0,37459

3,60	7,2953	-8,1352	1,7765	-0,89676	-0,44252	0,49347
3,70	5,9226	-6,9832	2,3115	-0,84810	-0,52984	0,62473
3,80	4,9123	-6,2106	2,9395	-0,79097	-0,61186	0,77356
3,90	4,1164	-5,6705	3,69449	-0,72593	-0,68777	0,94742
4,00	3,4548	-5,2854	4,6313	-0,65364	-0,75680	1,15782
4,20	2,3625	-4,8188	7,4667	-0,49026	-0,82158	1,77778
4,30	1,8811	-4,6934	9,8291	-0,40080	-0,91617	2,28585
4,40	1,4210	-4,6238	13,6238	-0,30733	-0,95160	3,09632
4,50	0,9704	-4,6034	20,8680	-0,21080	-0,97753	4,63733
4,60	0,5192	-4,6292	40,7568	-0,11215	-0,99369	8,86017
4,70	0,0582	-4,7004	379,350	-0,01239	-0,99992	80,71276
4,80	-0,4216	-4,8185	-54,6474	0,08750	-0,99616	-11,3849
4,90	-0,9302	-4,9875	-25,8107	0,18651	-0,98245	-5,26749
5,00	-1,4791	-5,2142	-16,9026	0,28366	-0,95892	-3,38052
5,10	-2,0821	-5,5087	-12,4919	0,37798	-0,92581	-2,44939
5,20	-2,7577	-5,8860	-9,8053	0,46852	-0,88345	-1,88564
5,30	-3,5303	-6,3681	-7,9567	0,55437	-0,63227	-1,50127
5,40	-4,4352	-6,9879	-6,5747	0,63469	-0,77276	-1,21754
5,50	-5,5244	-7,7954	-5,4757	0,70867	-0,70554	-0,99558
5,60	-6,8801	-8,8710	-4,5581	0,77557	-0,63127	-0,81394
5,70	-8,6399	-10,3506	-3,7605	0,83471	-0,55069	-0,65973
5,80	-11,0546	-12,4839	-3,0431	0,88552	-0,46460	-0,52467
5,90	-14,6362	-15,7805	-2,3783	0,92748	-0,37388	-0,40311
6,00	-20,6178	-21,4731	-1,7461	0,96017	-0,27942	-0,29101
6,10	-32,9263	-33,4867	-1,1301	0,98327	-0,18216	-0,18526
6,20	-74,3604	-74,6184	-0,5170	0,99654	-0,08309	-0,08338

Программа BUCLING для расчета рам на устойчивость методом перемещений

Программа работает в среде DOS VC.

Последовательность действий после включения компьютера:

1. **BCL**
2. **bucling.exe**
3. Если на экране появится какая-то функция, стереть ее нажатием клавиши **Backspace** и набрать свою функцию.

Набирать $\varphi_1(v)$ как F1(x), $\eta_1(v)$ как H1(x), $\tan(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и т. д.

Например:

$$7.48 + 3 * F1(x) + 7.04 * F2(0.8 * x)$$

или

$$(5.4 + 3 * F1(x) + 3.2 * F_2(2.5 * x) * (0.75 * H1(x) + 1.536 * H2(2.5 * x) + \\ + 0.384 * H1(3.06 * x)) - (1.5 * F1(x) - 1.92 * F4(2.5 * x))^2$$

4. **Enter**
5. **F2** (сохранить).
6. **Esc** (выход).
7. Ввести пределы (максимум от 0 до 6.28), последовательно нажимая клавишу **Enter** (всего 3 раза).
8. На экране появится ответ красными цифрами в виде двух значений. Выписать меньшее значение критического параметра.
9. **Esc** (выход).

Пример выполнения и оформления контрольной работы № 5

Данные к расчету:
 $l = 8,0 \text{ м}, h = 8,0 \text{ м}, \alpha = 3,$
 $F_1 = 36 \text{ кН}, \theta = 0,65\omega_{\min}, EI = 85000 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$
 $m = 0,7 \text{ т}, \beta = 2.$

Степень статической неопределенности:
 $n_c = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 3 = 0$

Число степеней свободы масс: $w_m = 2$

Расчетная схема рамы

1. Свободные колебания

Расчетная схема

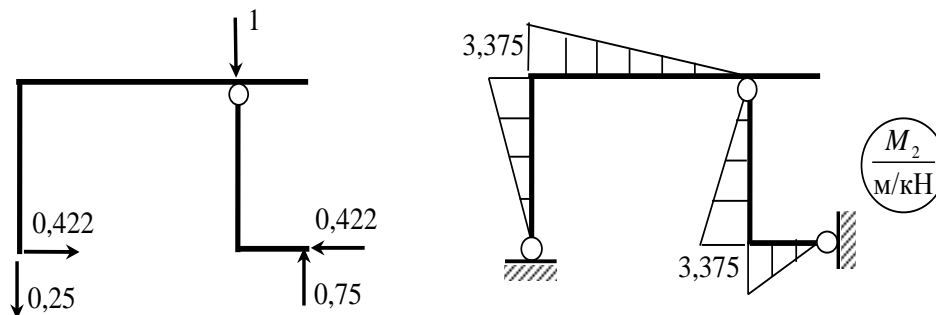
Состояние 1

Уравнение частот

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} \cdot 3m - \frac{1}{\omega^2}) & \delta_{12} \cdot 2m \\ \delta_{21} \cdot 3m & (\delta_{22} \cdot 2m - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0$$

				КМ РГР № 5					
				Динамический расчет плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки					
Разраб.	Кущенко В.Я.								
Пров.	Масленников								
Шифр	14823			Лист 1		Листов 5			
				СПбГАСУ Строительный факультет		Гр. 1-П-3			

Состояние 2



Коэффициенты уравнения частот

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{(M_1)^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 6^2 + \frac{13,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 6^2 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 2^2 + \frac{4,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 2^2 \right] = \frac{488}{3EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 6 - \frac{13,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 6 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 2 + \frac{4,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 2 \right] = -\frac{47}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22} = \sum_0^l \int \frac{(M_2)^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375^2 + \frac{13,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 3,375^2 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 2^2 + \frac{4,5}{3 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 2^2 \right] = \frac{180,383}{3EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

Определение частот и периодов свободных колебаний

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{488}{3EI} \cdot 3m - \frac{1}{\omega^2} \right) & -\frac{47}{EI} \cdot 2m \\ -\frac{47}{EI} \cdot 3m & \left(\frac{180,383}{3EI} \cdot 2m - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} (488 - \lambda) & -94 \\ -141 & (120,255 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{EI}{m\omega^2}.$$

Его решение:

$$\begin{aligned} (488 - \lambda)(120,255 - \lambda) - 94 \cdot 141 &= 0, \\ \lambda^2 - 608,255\lambda + 45430,44 &= 0, \\ \lambda_1 = \lambda_{\max} &= 522,8287; \lambda_2 = 85,1713. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} 1. |D| &= \Pi \lambda_i, \quad |D| = 488 \cdot 120,255 - 141 \cdot 94 = 45430,44, \\ \Pi \lambda_i &= 522,8287 \cdot 85,1713 = 44530, \\ |D| &\approx \Pi \lambda_i \quad \text{с погрешностью в } 0,0009\%. \\ 2. S_p |D| &= 488 + 120,255 = 608,255. \\ \sum \lambda_i &= 522,8287 + 85,1713 = 608 \\ S_p |D| &\approx \sum \lambda_i \quad \text{с погрешностью в } 0,042\% < [0,5\%]. \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\max} = 522,8287.$$

$$\omega_1 = \omega_{\min} = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \lambda_1}} = 0,04373 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \sqrt{\frac{85000}{0,7 \cdot 522,8287}} = 15,24 \text{ с}^{-1}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{15,24} = 0,412 \text{ с}.$$

$$\lambda_2 = 85,1713.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \lambda_2}} = 0,108356 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \sqrt{\frac{85000}{0,7 \cdot 85,1713}} = 56,05 \text{ с}^{-1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{56,05} = 0,112 \text{ с}.$$

Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	2		

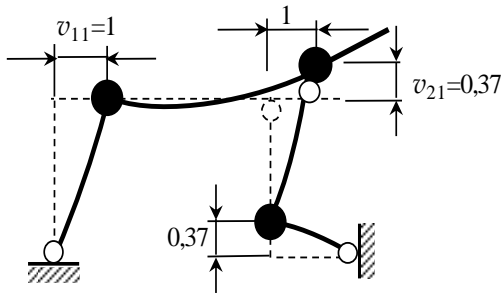
Построение форм свободных колебаний

$\lambda_1 = \lambda_{\max} = 522,8287, \omega_1 = 4,819 \text{ c}^{-1}.$

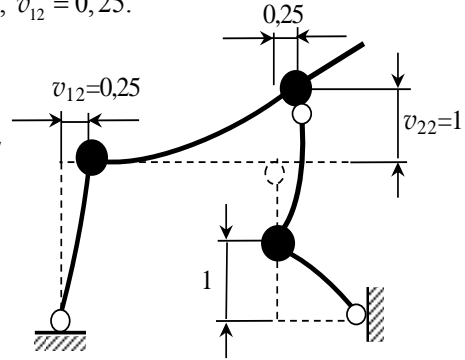
$(488 - 522,8287)v_{11} - 94v_{21} = 0, \text{ при } v_{11} = 1, v_{21} = -0,37.$

$\lambda_2 = 85,1713, \omega_2 = 11,94 \text{ c}^{-1},$

$-141v_{12} + (120,255 - 85,1713)v_{22} = 0, \text{ при } v_{22} = 1, v_{12} = 0,25.$



Форма колебаний при $\omega_{\min} = 4,819 \text{ c}^{-1}$

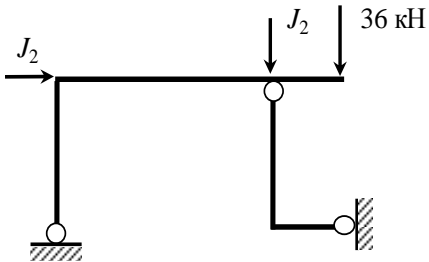


Форма колебаний при $\omega_{\min} = 11,64 \text{ c}^{-1}$

2. Расчет на действие вибрационной нагрузки

Расчетная схема при $\sin \theta t = 1$

Система канонических уравнений для определения амплитудных значений сил инерции

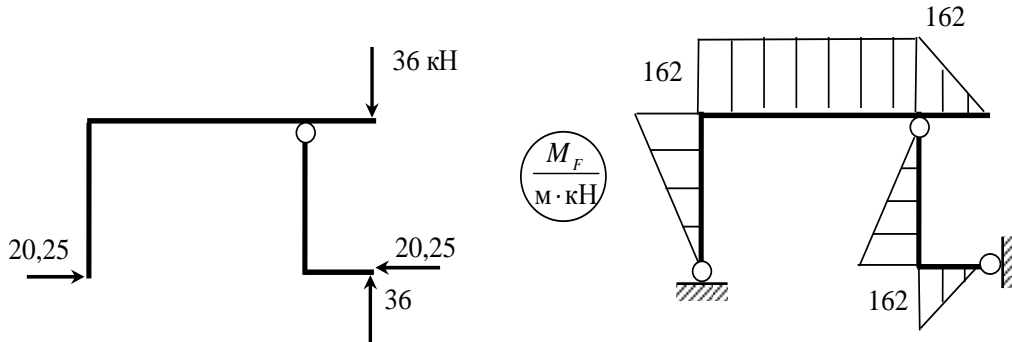


$\delta_{11}^* J_1 + \delta_{12}^* J_2 + \Delta_{1F} = 0$

$\delta_{21}^* J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \Delta_{2F} = 0$

$\theta = 0,65\omega_{\min} = 0,65 \cdot 0,04373 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,02842 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 9,903 \text{ c}^{-1}.$

Грузовое состояние



Группа	Ф.И.О	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1 - П - 3	Кущенко В.Я.	14823	3		10.04.17

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы уравнений

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{488}{3EI} - \frac{1}{3m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{250,0297}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{47}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{180,383}{3EI} - \frac{1}{2m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{558,9168}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 162 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 162 \cdot 13,5 \cdot 3 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 162 + \frac{4,5}{6 \cdot 3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 162 \right] = -\frac{8532}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}};$$

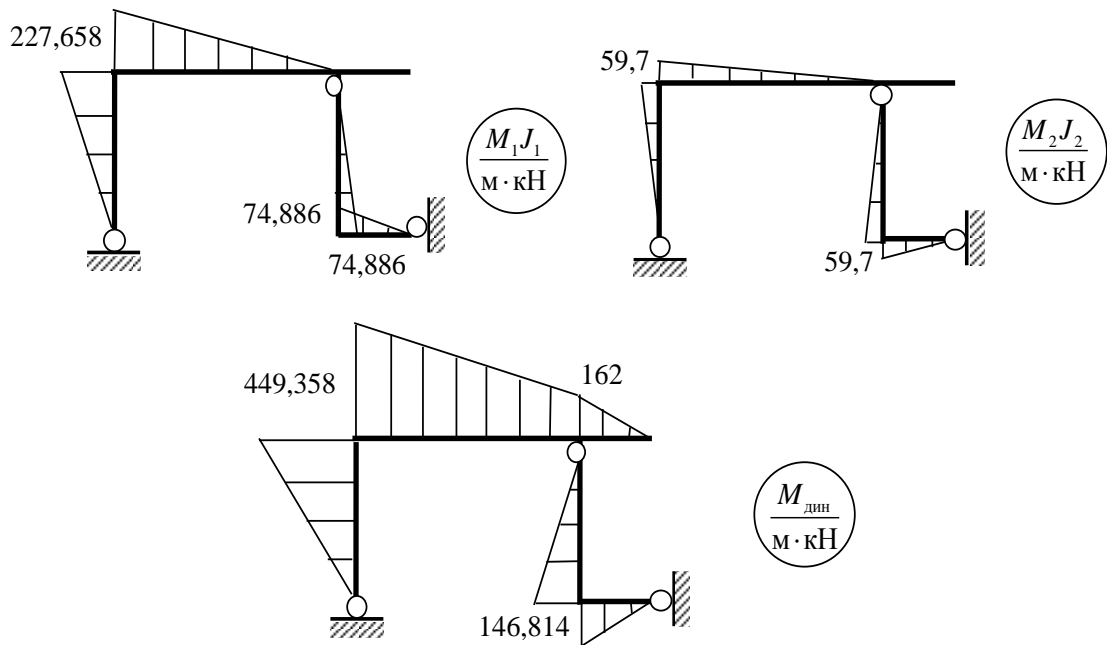
$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_2 M_F}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 162 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 162 \cdot 13,5 \cdot 3,375 + \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 162 + \frac{4,5}{6 \cdot 3} \cdot 2 \cdot 3,375 \cdot 162 \right] = \frac{8110,125}{EI} \frac{\text{м}}{\text{кН}}.$$

Решение системы уравнений (определение амплитуд инерционных сил)

$$-250,0297 J_1 - 47 J_2 - 8532 = 0;$$

$$-47 J_1 - 558,9168 J_2 + 8110,125 = 0. \quad J_1 = -37,443 \text{ кН}; \quad J_2 = 17,659 \text{ кН}.$$

Определение динамических усилий $M_{\text{дин}} = M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_F$

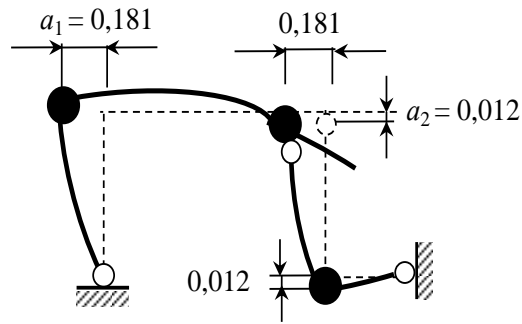


Группа	Ф.И.О.	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1-П-3	Кущенко В.Я.	14823	4		

Определение динамических амплитуд и построение формы вынужденных колебаний

$$a_1 = \frac{J_1}{m_1 \theta^2} = \frac{J_1}{3m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{37,443}{3 \cdot 0,02842^2 \cdot 85000} = -0,181 \text{ м};$$

$$a_2 = \frac{J_2}{m_1 \theta^2} = \frac{J_2}{2m \cdot 0,02842^2 \cdot \frac{EI}{m}} = -\frac{17,659}{2 \cdot 0,02842^2 \cdot 85000} = 0,012 \text{ м};$$



Группа	Ф.И.О.	Шифр	Лист	Подпись	Дата
1-П-3	Кущенко В.Я.	14823	5		

Библиографический список

1. *Бабанов В.В.* Строительная механика в 2 т., – М.: Издательский центр «Академия», 2011. Т.1–304 с., т.2–286 с.
2. Вибрации в технике: справочник. В 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / И. И. Артоболевский [и др.]; под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
3. *Масленников А.М.* Начальный курс строительной механики стержневых систем: – СПб.: изд. СПбГАСУ, 1997.–160 с.
4. *Масленников А.М.* Начальный курс строительной механики стержневых систем: учебное пособие. – 2-е изд., доп. – СПб.: Проспект Науки, 2009.–240 с.
5. *Масленников А.М.* Основы динамики и устойчивости стержневых систем: – СПб: ООО «Изд. АСВ», 2000. – 204 с.
6. *Масленников А.М.* Динамика и устойчивость сооружений: – М.: Издательство «Юрайт». 2016. – 367 с.
7. *Ишлинский А. Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
8. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. М.: Стройиздат, 1972. 512 с.
9. *Масленников А. М.* Расчет строительных конструкций численными методами. Л.: ЛГУ, 1987. 224 с.
10. *Масленников А.М., Кобелев Е.А., Масленников Н.А.* Основы строительной механики стержневых систем : Учебное пособие для бакалавров / СПбГАСУ. – СПб., 2020. – 342 с.
11. *Кобелев Е.А., Масленников Н.А.* Строительная механика : Учебное пособие / СПбГАСУ. – СПб.: ИД «Петрополис», 2020. – 246 с.
12. *Кобелев Е.А., Масленников Н.А.* Строительная механика. Руководство по выполнению расчетно-графических работ: учебно-мет. пособие в 2-х ч. / СПбГАСУ. – СПб., 2018. – Ч. 1. – 100 с.
13. *Кобелев Е.А., Масленников Н.А.* Строительная механика. Руководство по выполнению расчетно-графических работ: учебно-мет. пособие в 2-х ч. / СПбГАСУ. – СПб., 2018. – Ч. 2. – 108 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
-----------------------	---

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЧАСТЬ 1	6
--	---

Раздел 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 1. Расчет плоских стержневых систем на неподвижную нагрузку

1.1. Многодисковые плоские стержневые системы.....	8
1.1.1. Анализ геометрической неизменяемости многопролетных шарнирных балок.....	9
1.1.2. Определение усилий в многопролетных балках.....	11
1.1.3. Определение усилий в многодисковых рамах.....	14
1.2. Простейшие плоские фермы.....	16
1.2.1. Образование ферм и условие их геометрической неизменяемости.....	16
1.2.2. Определение усилий способом последовательного вырезания узлов..	18
1.2.3. Определение усилий графическим способом.....	22
1.2.4. Определение усилий способом сечений.....	25
1.3. Контрольные вопросы.....	28
1.4. Контрольная работа № 1. Расчет статически определимой многодисковой системы на статическую нагрузку.....	29
1.5. Контрольная работа № 2. Определение усилий в стержнях плоской простейшей фермы.....	35
1.5.1. Задача 2.1. Расчет плоской простейшей фермы на статическую нагрузку.....	35

Глава 2. Расчет плоских стержневых систем на подвижную статическую нагрузку

2.1. Статический способ построения линий влияния.....	40
2.1.1. Однопролетные балки.....	40
2.1.2. Многопролетные шарнирные балки.....	45
2.2. Кинематический способ построения линий влияния.....	48
2.3. Определение усилий по линиям влияния от неподвижной нагрузки.....	51
2.4. Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм.....	54
2.5. Определение усилий от подвижной статически приложенной нагрузки	57
2.6. Контрольные вопросы.....	60
2.7. Контрольная работа №2. Определение усилий в стержнях плоской простейшей фермы от подвижной нагрузки.....	61
2.7.1. Задача 2.2. Построение линий влияния реакций и усилий в плоской простейшей ферме.....	61

Раздел 2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Глава 3. Расчет статически неопределимых систем методом сил

3.1. Свойства статически неопределимых систем.....	68
3.2. Определение степени статической неопределимости.....	71

3.3. Идея метода сил.....	72
3.4. Выбор основных систем метода сил.....	72
3.5. Система канонических уравнений.....	74
3.6. Контрольные вопросы.....	76
3.7. Контрольная работа № 3. Расчет статически неопределимой рамы методом сил.....	76

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЧАСТЬ 2.....85

Глава 4. Расчет статически неопределимых систем методом перемещений

4.1. Допущения, вводимые при расчете рам методом перемещений.....	86
4.2. Степень кинематической неопределимости. Основная система.....	87
4.3. Теорема о взаимности реакций.....	91
4.4. Идея метода перемещений. Система канонических уравнений.....	92
4.5. Последовательность расчета при действии силовой нагрузки.....	94
4.6. Контрольные вопросы.....	95
4.7. Контрольная работа № 4. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений.....	96

Глава 5. Основы расчета стержневых систем на динамические воздействия

5.1. Предмет и задачи динамики сооружений.....	105
5.2. Виды динамических нагрузок.....	106
5.3. Степени свободы системы.....	109
5.4. Колебания упругих систем с одной степенью свободы.....	111
5.4.1. Свободные колебания без учета причин, вызывающих рассеяние энергии.....	111
5.4.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки.....	118
5.5. Колебания систем с несколькими степенями свободы.....	124
5.5.1. Свободные колебания.....	124
5.5.2. Вынужденные колебания при действии вибрационной нагрузки с постоянной частотой.....	128
5.6. Использование симметрии конструкции при решении задач динамики	133
5.7. Контрольные вопросы.....	136
5.8. Контрольная работа № 5. Динамический расчет плоской рамы с конечным числом степеней свободы на действие вибрационной нагрузки	138

Глава 6. Основы расчета стержневых систем на устойчивость

6.1. Понятие о потере устойчивости и критической нагрузке.....	149
6.2. Основные допущения и критерии устойчивости.....	154
6.3. Устойчивость центрально-сжатых прямолинейных стержней.....	156
6.4. Расчет плоских рам на устойчивость методом перемещений.....	163
6.4.1. Теория метода.....	164

6.4.2. Вычисление опорных реакций продольно-сжатых стержней от единичных перемещений (общий случай).....	167
6.4.3. Определение реакций для частных случаев.....	171
6.4.4. Упрощения при расчете симметричных рам на устойчивость.....	175
6.5. Контрольные вопросы.....	176
6.6. Контрольная работа № 6. Расчет плоской рамы на устойчивость.....	178

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Образец оформления листов РГР (формат листа А-4).....	186
Приложение 2. Пример выполнения и оформления контрольной работы № 3.....	187
Приложение 3. Реакции и усилия в изгибаемых стержнях от единичных смещений связей и внешних воздействий.....	192
Приложение 4. Реакции и усилия в сжато-изогнутых стержнях от единичных смещений связей.....	193
Приложение 5. Значения трансцендентных функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней.....	194
Приложение 6. Значения специальных функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней.....	196
Приложение 7. Программа BUCLING для расчета рам на устойчивость методом перемещений.....	198
Приложение 8. Пример выполнения и оформления контрольной работы № 5.....	199
Библиографический список.....	204

Кобелев Евгений Анатольевич
Масленников Никита Александрович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Подписано к печати 08.04.2021. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 13. Тираж 500 экз. Заказ № 19.

ООО Издательский дом «Петрополис»
197101, Санкт-Петербург, ул. Б. Монетная, д. 16,
офис-центр 1, 5 эт., пом. 498 тел.: 336-50-34.
E-mail: info@petropolis-ph.ru
www.petropolis-ph.ru

Отпечатано в типографии «Град Петров»
ООО ИД «Петрополис»
197101, Санкт-Петербург, ул. Б. Монетная, д. 16.