

## 2. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БРУСА НА СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

К сложному сопротивлению относятся те виды деформаций, при которых стержни испытывают одновременно комбинации простых деформаций: например, изгиб с кручением; сжатие с изгибом, изгиб с растяжением и т.п.

При расчетах на сложное сопротивление обычно используют принцип независимости действия сил, так как опыт показывает, что в пределах упругости деформации одной группы нагрузок не влияют на деформации, вызванные другими нагрузками. Поэтому для вычисления полных напряжений и деформаций можно применить принцип сложения действия сил, т.е. геометрически суммировать напряжения и деформации.

Для каждого стержня продольную ось обозначим через  $x$ , главные оси инерции поперечного сечения –  $y$  и  $z$ .

В общем случае действия внешних сил внутренние силовые факторы в сечении могут быть приведены к нормальной силе  $N_x$ , двум перерезывающим силам  $Q_y$  и  $Q_z$ , крутящему моменту  $M_x$  и двум изгибающим моментам:  $M_y$  и  $M_z$ .

Нормальная сила  $N_x$  равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня  $x$ .

Перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$  равны соответственно алгебраическим суммам проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на оси  $y$  и  $z$ .

Крутящий момент  $M_x$  равен алгебраической сумме крутящих моментов от всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно продольной оси  $x$ .

Изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  также равны алгебраическим суммам осевых моментов всех внешних сил, расположенных

по одну сторону от данного сечения, соответственно относительно осей  $y$  и  $z$ .

Для определения характера изменения внутренних усилий по длине стержней необходимо в масштабе построить эпюры  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ .

При построении эпюр необходимо руководствоваться следующими правилами знаков:

1. Для нормальных сил: внешние силы, растягивающие стержень, принимаются положительными, сжимающие – отрицательными.

2. Для перерезывающих сил: внешние силы, направленные вверх, для левой части имеют положительный знак, для правой – отрицательный.

3. Для изгибающих моментов нет определенного правила знаков. При построении эпюр положительные ординаты моментов откладывают по направлению сжимающих деформаций.

Знак напряжений определяется характером деформаций, вызванных этими моментами (растяжение – плюс, сжатие – минус).

## **2.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НОРМАЛЬНЫХ И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ, ИЗГИБАЮЩИХ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ**

Построение эпюр  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  рассмотрим на конструкции, изображенной на рис.2.1. Система стержней, соединенных, как показано на рис.2.1, а, нагружена силами  $P_1 = 3$ ,  $P_2 = 2$  и  $P_3 = 5$  кН. Допускаемое напряжение при растяжении – сжатии  $[\sigma] = 160$  МПа. Первый стержень длиной  $l_1 = 4$  м, второй -  $l_2 = 3$  м и третий -  $l_3 = 4$  м.

Для данной конструкции (составного ломаного бруса) можно не определять реакций в заделке, если все участки рассматривать со стороны свободного конца конструкции. При этом обход участков

будем осуществлять со стороны контура, обозначенного на рис.2.1,б штриховой линией.

Ординаты эпюр откладывают от продольных осей стержней, поэтому в масштабе надо вычертить четыре контура ломаного бруса, на которых в дальнейшем будут построены эпюры.

*Стержень I.* Составим выражения для внутренних усилий в элементах бруса, пользуясь методом сечений. Возьмем сечение на расстоянии  $x_1$  от свободного конца стержня (рис.2.1, б).

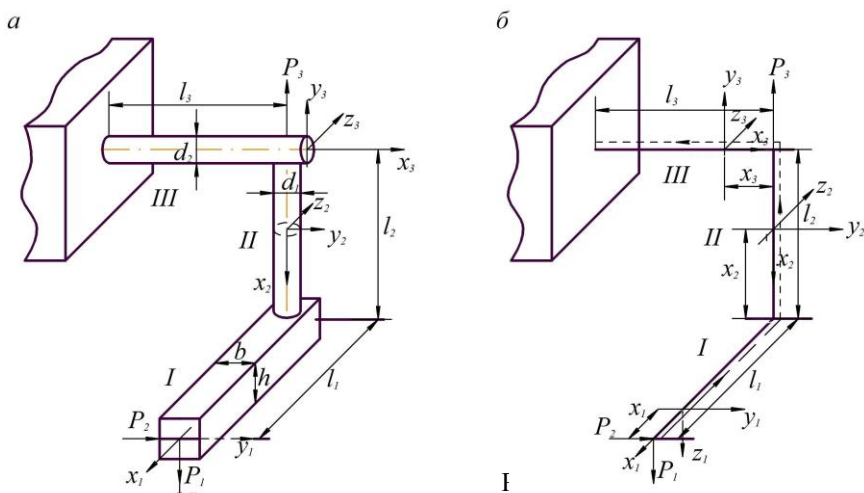


Рис.2.1.

В этом сечении будут действовать перерезывающие силы, постоянные по всей длине стержня:

– в вертикальной плоскости

$$Q_z = -P_1 = -3 \text{ кН};$$

– в горизонтальной плоскости

$$Q_y = P_2 = 2 \text{ кН};$$

– изгибающие моменты:

$$M_y = -P_1 x_1 \text{ и } M_z = +P_2 x_1.$$

Изгибающие моменты зависят от переменной координаты в первой степени, следовательно, они изменяются по линейному закону.

Выражения для моментов справедливы по всей длине стержня, т.е.  $0 \leq x_1 \leq l_1$  при  $x_1 = 0$   $M_z = 0$  и  $M_y = 0$ ; при  $x_1 = l_1$   $M_y = -P_1 l_1 = -3 \cdot 4 = -12$  кН·м;  $M_z = P_2 l_1 = -2 \cdot 4 = 8$  кН·м.

При построении эпюр моментов (рис. 2; 5) ординаты откладываем по направлению сил:

$$N_x = 0, M_x = 0, Q_z = -P_1 = -3 \text{ кН}, Q_y = P_2 = 2 \text{ кН},$$

$$M_y = -P_1 x_1 = 0; 8 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_z = P_2 x_1 = 0; 12 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ при } 0 \leq x_1 \leq l_1.$$

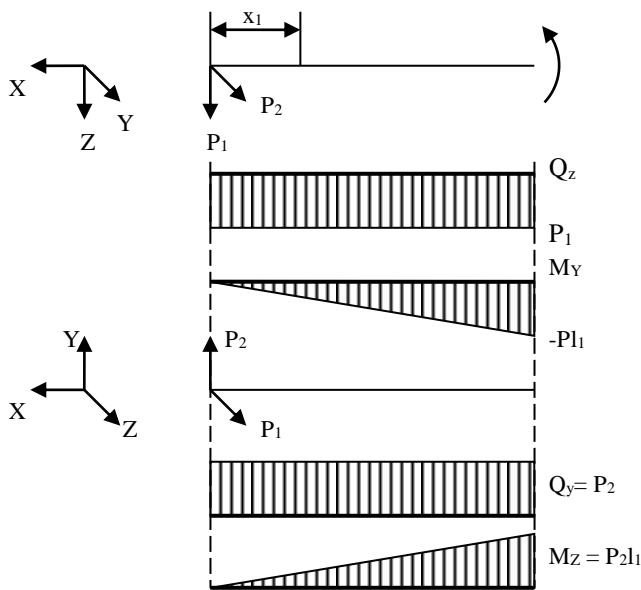


Рис. 2.2

*Стержень II.* Возьмем сечение на расстоянии  $x_2$  от начала этого стержня. Внешние силы  $P_1$  и  $P_2$  в этом сечении приводятся к следующим внутренним силовым факторам:

– нормальная сила  $N_x = P_1 = 3$  кН (растягивающая);

– перерезывающая сила  $Q_y = P_2 = 2$  кН (в плоскости чертежа), а  $Q_z = 0$ .

Относительно оси  $y$  сила  $P_1$  образует постоянный изгибающий момент  $M_y = -P_1 l_1 = -3 \cdot 4 = -12$  кН·м.

Относительно оси  $z$  стержень изгибается силой  $P_2$ :  $M_z = P_2 x_2$ ,  $0 \leq x_2 \leq l_2$ ; при  $x_2 = 0$   $M_z = 0$ ;  $x_2 = l_2$   $M_z = P_2 l_2 = 6$  кН·м. От действия силы  $P_2$  стержень испытывает еще и кручение:  $M_x = P_2 l_1 = 2 \cdot 4 = 8$  кН·м (рис.2.3). Другие силовые факторы:

$$N_x = P_1 = 3 \text{ кН}, M_x = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}, Q_z = -P_1 = -3 \text{ кН}, Q_y = P_2 = 2 \text{ кН},$$

$$M_y = -P_1 l_1 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_z = P_2 x_2 = 0; 6 \text{ кН} \cdot \text{м при } 0 \leq x_2 \leq l_2.$$

Внутренние усилия во втором стержне можно определить и другим способом. Приведем все внешние силы к центру тяжести 2-го стержня (рис.2.4, а). Для этого приложим по две равных и противоположно направленных силы  $P_1$  и  $P_2$ , тогда к его концу будут приложены растягивающая сила  $P_1$ , момент  $M_y = -P_1 l_1$ , изгибающий стержень относительно оси  $y$ , крутящий момент  $M_x = P_2 l_1$  и сила  $P_2$ , под действием которой возникает поперечная сила, и момент, изгибающий стержень относительно оси  $z$  (рис. 2.4, б).

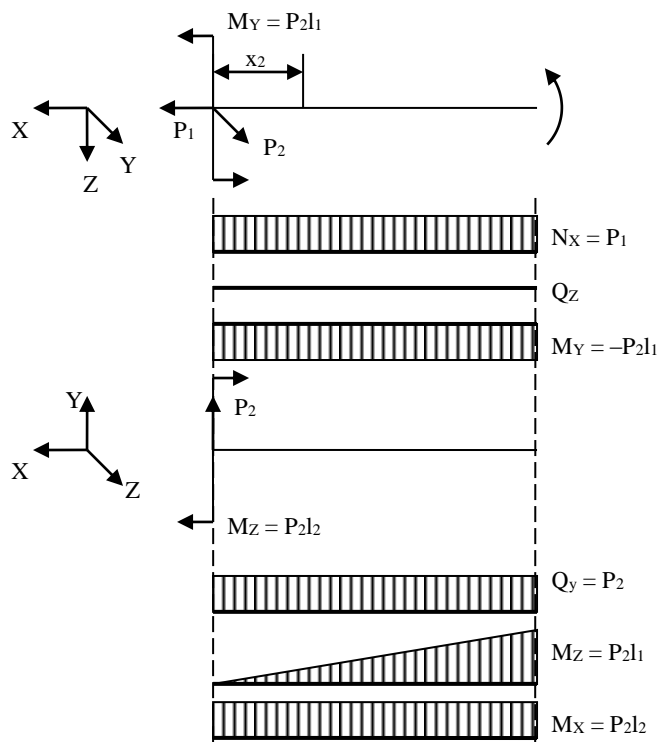


Рис.2.3

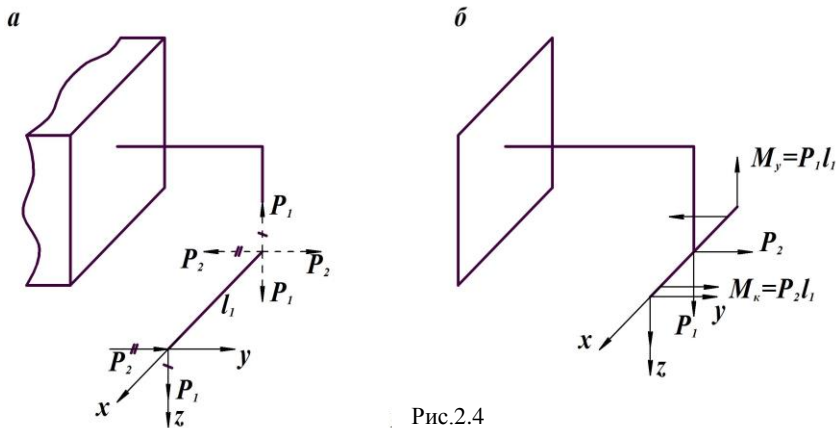


Рис.2.4

*Стержень III.* Возьмем сечение на расстоянии  $x_3$  от правого конца стержня (см. рис.2.1, б) и составим все выражения для определения внутренних усилий в этом сечении:

- нормальная сила  $N_x = P_2 = 2$  кН;
- перерезывающая сила  $Q_y = -P_1 - P_3 = -8$  кН,  $Q_z = 0$ ;
- крутящий момент  $M_x = P_1 l_1 = 3 \cdot 4 = 12$  кН·м;
- изгибающие моменты:  $M_y = P_2 l_1 = 2 \cdot 4 = 8$  кН·м,

$$M_z = P_2 l_2 - (P_3 + P_1) x_3 = 2 \cdot 3 - (5 + 3) x_3 \text{ при } 0 \leq x_3 \leq l_3 :$$

если  $x_3 = 0$   $M_z = P_2 l_2 = 6$  кН·м,

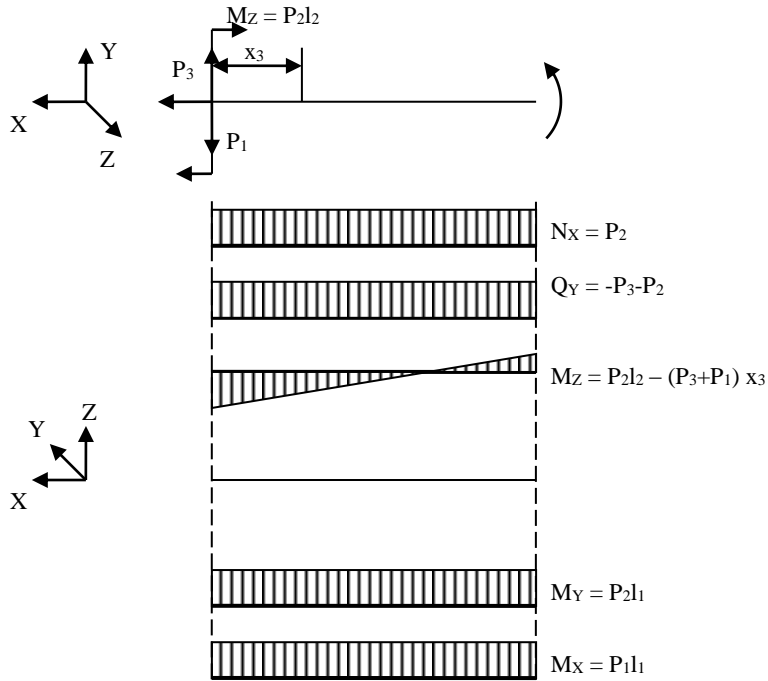
если  $x_3 = l_3$ , то  $M_z = P_2 l_2 + (P_3 - P_1) l_3 = -28$  кН·м (рис.2.5).

При построении эпюр для 3–го стержня можно все внешние силы привести к центру тяжести правого конца данного стержня (см. рис.2.3, а). Для этого приложим две равные и противоположно направленные силы  $P_2$ . В результате переноса на правом конце стержня будут действовать растягивающая сила  $P_2$ , момент  $M_x = P_1 l_1$ , закручивающий стержень, момент  $M_y = P_2 l_1$ , изгибающий стержень относительно оси  $y$ , момент  $M_z = P_2 l_2 - (P_3 + P_1) \cdot x_3$ , изгиба-

ющий относительно оси  $z$ , и сила  $-(P_3 + P_1)$ , действующая параллельно оси  $y$ . Тогда будем иметь:

$$N_x = 2 \text{ кН}, M_x = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}, Q_z = 0, Q_y = -8 \text{ кН},$$

$$M_y = P_2 l_1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_z = P_2 l_2 - (P_3 + P_1) \cdot x_3 = 6; -26 \text{ кН} \cdot \text{м при } 0 \leq x_3 \leq l_3$$



ис.2.5

Эпюры  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  приведены на рис.2.6.



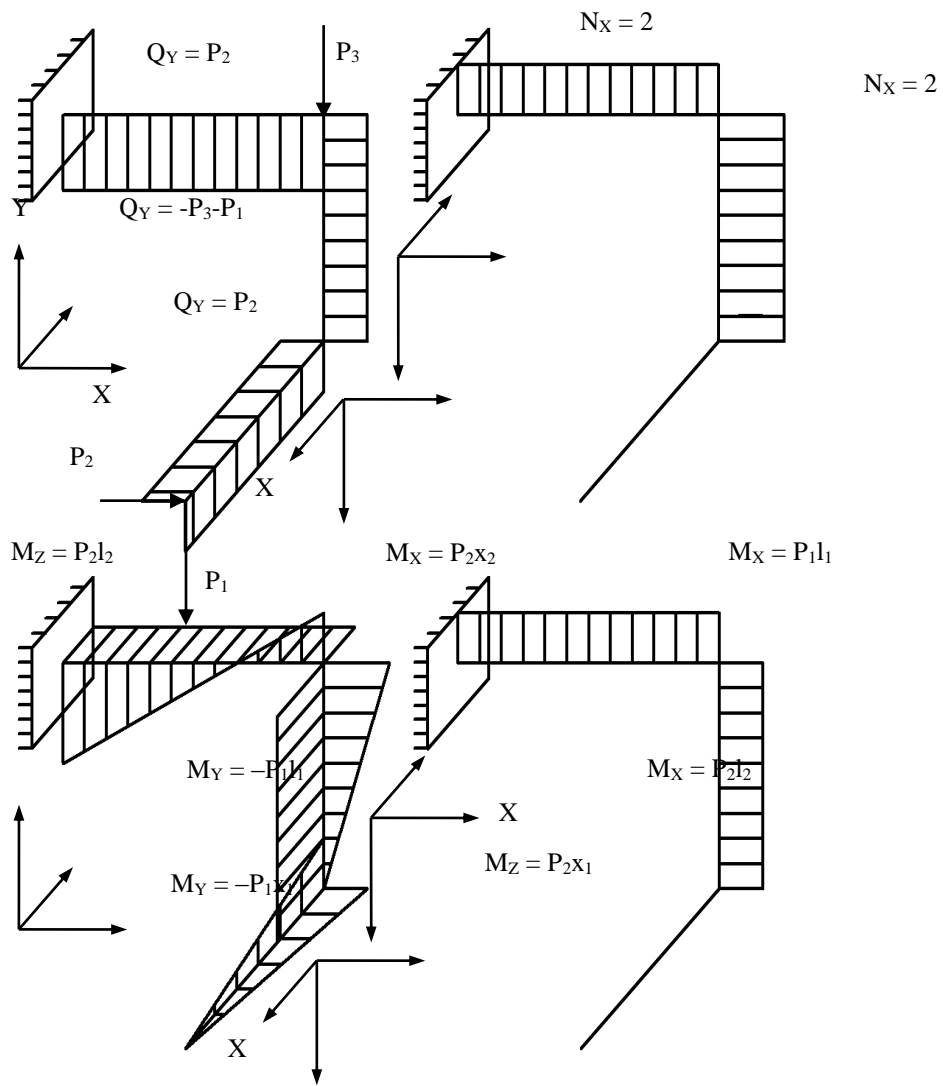


Рис.2.6

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979 (и более поздние издания).
2. *Беляев Н.М.* Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В.К. Качурина. М.: Наука, 1979 (и более поздние издания).
3. *Горшков Л.К.* Построение эпюр поперечных сил, изгибающих моментов и выбор сечений балок / Л.К. Горшкова, А.А. Яковлев. СПб., СПГГИ, 2004.
4. *Горшков Л.К.* Сборник задач по сопротивлению материалов / Л.К. Горшков, В.Г. Гореликов, Г.Г. Зарецкий-Феоктистов, А.А. Яковлев. СПб.: СПГГИ, 2000.
5. Сиренко Р.Н. Сопротивление материалов: Учебное пособие. – М.: РИОР, 2007.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Метод начальных параметров .....	4
1.1. Основные положения и допущения .....	4
1.2. Дифференциальное уравнение изгиба призматической балки. Понятие о начальных параметрах .....	5
1.3. Граничные условия .....	11
1.4. Пример и правила выполнения расчета .....	12
2. Расчет пространственного бруса на сложное сопротивление .....	19
2.1. Основные понятия и определения .....	19
2.2. Построение эпюр нормальных и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов для пространственной стержневой конструкции .....	20
Рекомендуемая литература .....	28
Содержание .....	28